

多变量样条有限元法

沈鹏程 著



科学出版社

内 容 简 介

本书系统阐述了基于广义变分原理、状态空间理论和样条函数理论的多变量样条有限元法及其应用。全书共分五章,内容包括:一、二、三类变量的变分原理,广义变分法及其简单应用,样条插值函数,二、三类变量的样条有限元法。书中还介绍了基于状态空间理论的多变量数值方法,其中包括直角坐标系平面条形体、极坐标系平面体、矩形板弯曲和圆柱形壳体弯曲等多变量场问题的状态空间理论与算法。书中给出了梁、板、壳的弯曲、振动与稳定问题的大量数值结果。此外,还安排了结构动力响应分析的状态空间法。

本书是国家自然科学基金资助项目“多变量样条有限元法”的主要研究成果。

本书可作为高等院校土建、道桥、机械、造船、航空及工程力学等专业的研究生教学参考书,亦可供工程技术人员、科学研究工作者和教师作自学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

多变量样条有限元法/沈鹏程著.-北京:科学出版社,1997

ISBN 7-03-005726-0

I. 多… II. 沈… III. 多变量-样条函数-有限元法 IV. 0241.5

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第22602号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997年6月第一版 开本:850×1168 1/32

1997年6月第一次印刷 印张:7 3/4

印数:1—1 600 字数:197 000

定价:16.00元

前 言

本世纪 60 年代以来,随着计算机科学的发展,出现了一类与计算机相结合的数值方法,如有限元法、边界元法及样条有限元法等,使结构分析与计算发生了突破性进展。但是,上述各种方法均属于一类单变量数值方法,当求出了单变量的近似值后,还必需通过其函数的若干阶导数及其关系才能求得其它变量的近似值。

近几年来,我们应用乘积型二元三次 B 样条插值函数来构造多变量场函数,基于二、三类变量广义变分原理与现代控制论中的状态空间理论建立了多变量样条有限元法模型。在计算各类场变量时,无需进行求导,甚至也不用物理关系,能直接获得其近似解答,从而扩大了弹性结构理论的解题范围。由于工程物理问题其数学模型大多可归结为偏微分方程的边初值问题,若能找到相应的广义变分原理,就可以应用多变量有限元法求解多类场变量问题。因此,基于广义变分原理与状态空间理论的多变量数值方法的研究是一项很有学术意义和应用价值的课题,到目前为止,国内外尚未出版过这方面的专门著作,我们在完成国家自然科学基金资助下的多变量样条有限元法研究课题的基础上,并结合有关文献资料,撰写成本书。本书对二、三类变量广义变分原理,广义变分法,状态空间法,样条插值函数,多变量样条有限元法模型以及梁、板、壳的弯曲、振动与稳定分析等问题作了系统论述,书中还列出了较为详尽的数值结果。

本书的出版得到国家自然科学基金的资助,在此向国家自然科学基金委员会表示诚挚的谢意。由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,望读者批评指正。

沈鹏程

于合肥工业大学

1995. 8

绪 论

本世纪 60 年代,随着计算机科学技术的发展,在结构分析矩阵方法的基础上,诞生了有限元法.50 年代中期,阿吉里斯(Argyris J. H.)^[1]研究复杂结构,从而进一步发展了结构分析的矩阵方法,它特别适合在计算机上实施计算.1956 年特纳(Turner M. J.)与克拉夫(Clough R. W.)^[32]等将刚架位移法的思想推广应用于弹性平面体问题上,建立了单元与结构刚度方程.1960 年,克拉夫^[33]首次引入了“有限元法”(Finite Element Method)这一名词,并发表了平面应力问题的有限元法论文,这标志着有限元法正式诞生.70 年代前后,基于各种变分原理的有限元法得到了迅速发展,米洛希(Melosh R. J.)^[34]等应用势能原理导出了有限元位移模型,卞学镛(Pian T. H. H.)^[35]应用余能原理建立了杂交应力有限元法模型,赫尔曼(Herrmann L. R.)^[36]应用汉林格-赖斯纳原理(Hellinger-Reissner)建立了混合有限元模型,辛克维茨(Zienkiewicz O. C.)^[2]和张佑启(Cheung Y. K.)等^[4]作了进一步发展与应用.这样,有限元法获得了牢固的理论基础和广阔的发展与应用前景.

我国学者在有限元法模型的构造中,亦作出了许多贡献(见文献[37,39,40,51,75,82],[7-16]和[19-22]).有限元法的发展促进结构力学现代化,出现了计算结构力学.钱令希倡导的计算结构力学及其应用在国内得到了迅速发展^[38].现在,人们已不限于对复杂结构分析与计算方面(应用计算机就能快速高效地获得计算结果),而进入到计算机辅助结构设计、结构优化设计^[5]与结构控制^[6,7]等科学技术领域.从而推动了结构力学、固体力学等基本理论的发展,如函数插值理论、变分原理与状态空间理论等.1974 年恩脱斯(Antes H.)^[49]提出了应用截断式三次 B 样条插值函数来构造位移场函数,求解了薄板弯曲问题,但在一段时间内未得到进一步发展.1979 年,石钟慈^[51]提出了

用分段式三次 B 样条插值函数来构造矩形板的弯曲位移场函数,应用最小势能原理导出了样条有限元法计算模型,解答了薄板弯曲问题。随后,在国内,对该法展开了广泛的应用研究,在板壳结构的静力、振动、稳定与动力问题上取得了一系列成果^[51-79]。尽管与计算机相结合的各种数值方法使结构分析与计算发生了巨大变化,取得了显著进步,但是,上述各种方法大多属于一类单变量数值方法。当求出了单变量近似值之后,还必需通过其函数的若干阶导数及其关系才能求得全部场变量的近似值。

近几年来,我们应用乘积型二元三次 B 样条插值函数来构造多变量场函数,基于二、三类变量广义变分原理与现代控制论中的状态空间理论建立多变量样条有限元法计算模型。在计算各类变量时,无需进行求导,甚至也不用物理关系,能直接求得各类场变量的近似解答。对一类不满足物理关系的问题,也能获得近似解,从而扩大了弹性理论的解题范围。由于工程物理问题其数学模型大多可归结为偏微分方程的边初值问题,若能找到相应的广义变分原理,就可以应用多变量数值方法求解多类场变量问题,这有重要的理论意义与广阔的应用前景。

本书的第一章介绍了一、二、三类变量的变分原理及其简单应用,样条函数的构造,多点样条函数的线性组合及其积分,边界条件的处理等,为后续章节提供应用。

第二章安排了基于二类变量广义变分原理的多变量样条有限元法,应用样条函数来构造二类场变量(应力与位移)函数,应用二类变量广义变分原理(也称混合能量原理)导出多变量样条有限元法方程组,对工程中一类量大面广的厚、薄梁与厚、薄板等弯曲、振动与稳定问题,建立了计算格式,给出了一系列数值结果。由于样条函数具有解析与数值的双重特性,连续性强,待定未知量少,逼近精度高,也由于独立设置二类变量场函数,因此,计算精度对二类变量均比较高,尤其是在结构承受集中荷载的情况下,所获得二类场变量值就是精确解。

第三章讲述了采用乘积型二元三次 B 样条函数来构造三类变量(应力、位移与应变)场函数,基于三类变量广义变分原理导出多变量样条有限元法方程组,给出了板结构的弯曲、振动与稳定问题的一系列数

值解答。由于独立设置三类变量场函数,因此,对应力、位移与应变均有较高的计算精度。

第四章论述了基于状态空间理论的多变量数值方法。根据弹性理论与结构力学控制方程及其等价的混合变分原理,进行数学变换,建立系统的状态方程。也可以通过古典力学中的哈密顿(Hamilton)原理,导出状态方程,研究其解法。应用三角函数、代数插值函数与三次B样条插值函数,分别来建立解析方法、半解析与半数值方法的计算格式。根据状态空间理论中的指数函数矩阵求解方法,给出了弹性结构状态空间表达式的若干求解方案。除了对一系列结构静力问题给出了解答外,还简要地介绍了结构动力分析的状态空间方法。

第五章介绍了多变量样条有限元法分析扁壳问题。应用乘积型二元三次B样条插值函数,来构造二、三类场变量函数,根据扁壳的二、三类变量广义变分原理,建立了多变量样条有限元法计算模型,其中包括样条混合有限元法与三类变量样条有限元法的计算格式。由于位移、应力与应变一起求解,故计算精度均比较高。本章给出了一系列壳体结构的弯曲与振动问题的数值解答。

本书所介绍的多变量数值方法和给出的大量计算成果,对工程物理领域中的多类场变量问题的求解,有启发、借鉴与指导意义。

目 录

前言

绪论

第一章 广义变分法与样条函数	(1)
1.1 弹性力学的基本方程	(1)
1.2 最小总势能原理	(3)
1.3 最小总余能原理	(5)
1.4 二类变量广义变分原理(混合能量原理)	(7)
1.5 二类变量广义变分法	(12)
1.6 三类变量广义变分原理	(18)
1.7 三类变量广义变分法	(19)
1.8 样条插值函数	(21)
1.9 B 样条函数的构造	(23)
1.10 三次 B 样条函数的积分计算	(28)
1.11 三次、五次 B 样条函数的线性组合及其积分	(31)
1.12 边界条件的处理	(43)
第二章 基于二类变量广义变分原理的多变量样条有限元法	(46)
2.1 薄板弯曲的二类变量广义变分原理	(46)
2.2 基于二类变量广义变分原理的广义变分法	(48)
2.3 数值算例	(50)
2.4 多变量样条有限元法解薄板弯曲问题	(54)
2.5 多变量样条有限元法解薄板的振动与稳定问题	(57)
2.6 数值算例	(57)
2.7 多变量样条有限元法解弹性地基矩形板	(61)
2.8 样条有限元法解中厚度矩形板弯曲	(66)
2.9 样条混合有限元法解中厚度矩形板的弯曲	(73)
2.10 样条混合有限元法解梁的弯曲	(78)
2.11 样条混合有限元法解梁的振动与稳定问题	(80)

2.12	样条混合有限元法解弹性地基梁	(82)
2.13	样条混合有限元法解厚梁问题	(85)
第三章	基于三类变量广义变分原理的多变量样条有限元法	(90)
3.1	薄板的三类变量广义变分原理	(91)
3.2	三类变量广义变分法解薄板弯曲、振动与稳定问题	(93)
3.3	数值算例	(96)
3.4	广义变分法解弹性地基板问题	(99)
3.5	三类变量样条有限元法分析矩形薄板的弯曲	(102)
3.6	数值结果	(104)
3.7	多变量样条有限元法分析矩形薄板的振动与稳定问题	(107)
3.8	弹性地基上矩形薄板的弯曲、振动与稳定	(109)
3.9	若干数值算例的结果	(111)
第四章	基于状态空间理论的多变量数值方法	(114)
4.1	直角坐标系内弹性平面体的状态方程	(114)
4.2	弹性平面条形体的状态空间法	(120)
4.3	叠层矩形平面体的解法	(123)
4.4	基于状态空间理论的多变量样条有限元法	(125)
4.5	数值算例	(127)
4.6	基于状态空间理论的有限元法	(129)
4.7	数值算例	(133)
4.8	极坐标系弹性平面问题的状态方程	(137)
4.9	轴对称厚、薄壁圆筒的统一问题	(140)
4.10	空间弹性体的轴对称问题的状态方程	(146)
4.11	圆柱形坐标系内三维弹性力学的状态方程	(150)
4.12	矩形厚、薄板的状态方程	(157)
4.13	分离变量法解简支厚、薄矩形板的弯曲	(161)
4.14	基于状态空间理论的多变量样条有限元法	(163)
4.15	数值算例	(168)
4.16	圆柱壳弯曲的控制方程及其二类变量广义变分原理	(169)
4.17	圆柱壳的状态方程及其解法	(172)
4.18	轴对称圆柱壳弯曲的解法	(175)
4.19	状态空间法分析结构动力响应问题	(179)
4.20	状态空间迭代法计算结构的动力响应量	(185)

第五章	多变量样条有限元法分析扁壳问题	(189)
5.1	双曲扁壳的基本方程	(189)
5.2	双曲扁壳的二类变量广义势能原理	(192)
5.3	基于二类变量广义势能原理的双曲扁壳的多变量样条有限元法	(194)
5.4	数值算例	(198)
5.5	双曲扁壳的振动	(199)
5.6	闭合圆柱形薄壳的多变量样条有限元法	(201)
5.7	开口圆柱形扁壳弯曲的二类变量广义势能原理	(203)
5.8	开口圆柱扁壳的多变量样条有限元法	(206)
5.9	开口圆柱扁壳的振动与稳定	(207)
5.10	双曲扁壳的三类变量广义势能原理	(209)
5.11	双曲扁壳基于三类变量广义势能原理的多变量样条有限元法	(212)
5.12	圆柱形扁壳的三类变量广义势能原理	(216)
5.13	圆柱形扁壳基于三类变量广义势能原理的多变量样条有限元法	(218)
5.14	圆柱形扁壳的振动与稳定	(220)
5.15	矩形底扁球壳的三类变量广义势能原理	(222)
5.16	多变量样条有限元法分析扁球壳	(224)
5.17	数值算例	(227)
参考文献		(230)

第一章 广义变分法与样条函数

本章介绍二、三类变量广义变分原理和样条插值函数,为以后各章建立多变量样条有限元法提供理论基础.首先,详细论证了二、三类变量广义变分原理,提出了广义变分法及其在简单问题中的具体应用.其次,介绍了三、五次 B 样条函数的构造及其函数的导数和积分计算的一些基本知识.

1.1 弹性力学的基本方程

在弹性力学(弹性理论)中,对一般线弹性体,从静力学、几何学和物理学三方面的规律来考虑,可获得 15 个基本方程,其中包括 3 个平衡方程,6 个物理方程和 6 个几何方程.在位移边界问题中,位移分量在边界上还应满足位移边界条件,即 $u=\bar{u}, v=\bar{v}, w=\bar{w}$.在应力边界问题中,应力分量在边界上还应满足应力条件,即在边界上应满足应力与边界面力保持力的平衡.为了简洁地表达这些方程,现将弹性力学中 15 个基本方程表达成矩阵形式.

平衡微分方程

$$\underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0} \quad \text{在域内} \quad (1.1.1)$$

$$\underset{\sim}{E} \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\bar{p}} \quad \text{在域的边界 } S_r \text{ 上} \quad (1.1.2)$$

在上两式中,矩阵微分算子和方向余弦矩阵分别为

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

$$\underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

应力、体力及面力向量分别为

$$\underset{\sim}{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}]^T \quad (1.1.5)$$

$$\underset{\sim}{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (1.1.6)$$

$$\underset{\sim}{\bar{p}} = [\bar{p}_x \quad \bar{p}_y \quad \bar{p}_z]^T \quad (1.1.7)$$

方向余弦为

$$l = \cos(x, N), \quad m = \cos(y, N), \quad n = \cos(z, N) \quad (1.1.8)$$

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u} \quad (1.1.9)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1.1.10)$$

$$\underset{\sim}{u} = [u \quad v \quad w]^T \quad (1.1.11)$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}_e \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (1.1.12)$$

式中, $\underset{\sim}{D}_e$ 为弹性矩阵, 其表达式为

$$\underset{\sim}{D}_e = D_e \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (1.1.13)$$

其中

$$D_e = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

1.2 最小总势能原理

上节把弹性力学基本方程表达成矩阵形式,简洁而紧凑.除了简单问题外,一般很难应用解析方法求解上述偏微分方程组的边值问题.为了求得问题的近似解,可将偏微分方程的边值问题转换成一个变分问题,从而可扩大弹性力学的解题范围.

设有一空间弹性体,处于平衡状态下,其上有体力作用,假设该弹性体有两类边界条件,一部分为固定边界 S_u ,其上有未知面力 \underline{p} 和已知位移 \underline{u} ;另一部分为自由边界 S_σ ,其上有已知面力 \underline{p} 和未知位移 \underline{u} .带上一杠的字母表示给定的位移和面力,如图 1.1 所示.

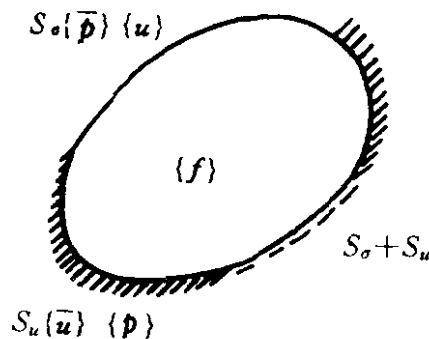


图 1.1

整个系统的势能包含两部分,一部分是弹性体应变能 U ,另一部分是外力势能.应变能

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^T D_e \underline{\epsilon} d\Omega$$

外力势能

$$V = - \int_{\Omega} \underline{f}^T \underline{u} d\Omega - \int_{S_\sigma} \underline{\bar{p}}^T \underline{u} ds$$

式中, Ω 与 S 分别代表弹性体所占的空间与表面. 整个弹性体的总势能为

$$\Pi_p = U + V = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{D}}_e \underline{\underline{\epsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \underline{\underline{u}} d\Omega - \int_{S_0} \underline{\underline{p}}^T \underline{\underline{u}} ds \quad (1.2.1)$$

现对式(1.2.1)进行关于位移的变分, 并令其变分为零, 就有

$$\delta \Pi_p(\underline{\underline{u}}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \delta \underline{\underline{u}} d\Omega - \int_{S_0} \underline{\underline{p}}^T \delta \underline{\underline{u}} ds = 0 \quad (1.2.2)$$

对上式的积分项 $\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}} d\Omega$ 进行分部积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\epsilon}} d\Omega &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{L}}^T \delta \underline{\underline{u}} d\Omega \\ &= \int_{S_0 + S_u} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\sigma}} ds - \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

现将公式(1.2.3)代入式(1.2.2), 经过整理后, 有

$$- \int_{\Omega} (\underline{\underline{L}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}})^T \delta \underline{\underline{u}} d\Omega + \int_{S_0} (\underline{\underline{E}} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{p}})^T \delta \underline{\underline{u}} ds = 0$$

考虑到在域内位移变分是不为零的任意微小值, 因而可以由上式得到弹性体的平衡微分方程与力的边界条件, 即

$$\underline{\underline{L}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 域内} \quad (1.2.4)$$

$$\underline{\underline{E}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{p}} \quad \text{在 } \Omega \text{ 域的边界 } S_0 \text{ 上} \quad (1.2.5)$$

这表明弹性体的平衡微分方程的边值问题等价于其总势能变分为零的问题. 由此可得到一个结论: 连续变形体的一切可能的位移状态中, 那些满足域内与边界平衡条件的位移状态, 能使其总势能有驻值, 即 $\delta \Pi_p = 0$ 时的 Π_p 值, 此值既非极大值, 也非极小值, 而称为驻值. 当线弹性连续变形体处于稳定的平衡状态时, 总势能有极小值. 论证如下.

设有一线弹性连续变形体, 在给定荷载作用下, 处于稳定平衡状态下, 若有一真解或正确解 $\underline{\underline{u}}$, 它满足弹性理论的全部微分方程与边界条

件,并设想若有另一组解答为 \underline{u}' , 根据泰勒级数, 有

$$\Pi_p(\underline{u}') = \Pi_p(\underline{u} + \delta\underline{u}) = \Pi_p(\underline{u}) + \delta\Pi_p + \delta^2\Pi_p \quad (1.2.6)$$

在式(1.2.6)中, $\delta\Pi_p$ 为一阶变分, $\delta^2\Pi_p$ 为二阶变分, 三阶以上变分均略去. 若线弹性连续变形体处于稳定平衡状态, 则有 $\delta\Pi_p = 0$, 而二阶变分 $\delta^2\Pi_p$ 为应变能增量, 为正定二次型, 故必有 $\delta^2\Pi_p > 0$, 于是由式(1.2.6)可以看出,

$$\Pi_p(\underline{u}') > \Pi_p(\underline{u}) \quad (1.2.7)$$

因此, 若 \underline{u} 为问题的真解或正确解, 则总势能泛函数必定为极小值.

线弹性连续变形体的最小总势能原理叙述如下: 线弹性连续变形体在真实位移状态下的总势能恒小于其它可能位移状态下的总势能. 或者线弹性连续变形体处于稳定平衡的必要与充分条件是总势能有最小值.

1.3 最小总余能原理

弹性体的总余能定义为余应变能与已知位移边界上的外力余功之和, 即有

$$\begin{aligned} \Pi_c &= U_c + V_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} d\Omega - \int_{S_u} \underline{p}^T \underline{u} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{D}_e^{-1} \underline{\sigma} d\Omega - \int_{S_u} \underline{p}^T \underline{u} ds \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

对式(1.3.1)关于应力 $\underline{\sigma}$ 进行变分, 并令其为零, 即有

$$\delta\Pi_c = \int_{S_u} \delta\underline{\sigma}^T \underline{D}_e^{-1} \underline{\sigma} d\Omega - \int_{S_u} \underline{u}^T \delta\underline{p} ds = 0 \quad (1.3.2)$$

我们知道, 任意一组域内应力变分应该满足域内齐次平衡方程, 任意一组边界面力变分应满足边界齐次平衡方程, 即有

$$\underline{L} \delta\underline{\sigma} = 0, \quad \underline{E} \delta\underline{\sigma} = \delta\underline{p} = 0 \quad (1.3.3)$$

现将真实位移 \underline{u} 乘以式(1.3.3)左边, 并对整体进行积分, 应用分部积

分就有

$$\int_{\Omega} \tilde{u}^T \tilde{L} \tilde{\delta\sigma} d\Omega = \int_{S_\sigma + S_u} (\tilde{u}^T \tilde{E} \tilde{\delta\sigma}) ds - \int_{\Omega} \tilde{\delta\sigma}^T \tilde{L}^T \tilde{u} d\Omega = 0 \quad (1.3.4)$$

现比较式(1.3.2)和式(1.3.4),并考虑到式(1.3.3),就有

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{L}^T \tilde{u} \quad \text{在 } \Omega \text{ 域内} \quad (1.3.5)$$

$$\tilde{u} = \tilde{u} \quad \text{在 } \Omega \text{ 域的 } S_u \text{ 边界上} \quad (1.3.6)$$

由总余能 Π_c 的变分为零,即 $\delta\Pi_c = 0$,就得到弹性体的几何方程或变形协调性条件即域内应变与位移间的微分关系和边界上的位移条件.弹性体的几何协调条件能变换成总余能泛函的一个变分问题.

结论:在连续变形体内部满足平衡条件;并在边界上满足应力边界条件的一切应力状态中,那些满足变形协调性条件的应力状态能使总余能泛函有驻值,或者真实应力场使弹性体的总余能为驻值.可进一步证明此时的 Π_c 为最小值,这就得到最小总余能原理.

设有一弹性变形体在给定荷载作用下处于稳定平衡状态下,若此问题有真解或正确解为 $\tilde{\sigma}$,设想另一组解答为 $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} + \tilde{\delta\sigma}$,根据泰勒级数有 $\Pi_c(\tilde{\sigma}') = \Pi_c(\tilde{\sigma} + \tilde{\delta\sigma}) = \Pi_c(\tilde{\sigma}) + \delta\Pi_c + \delta^2\Pi_c$,式中, $\Pi_c(\tilde{\sigma})$ 是真解之总余能, $\delta\Pi_c$, $\delta^2\Pi_c$ 分别为总余能的一阶、二阶变分,对于三阶以上总余能变分均忽略不计.若连续变形体处于变形协调状态下,则总余能一阶变分为零,即 $\delta\Pi_c = 0$,而其二阶变分为 $\delta^2\Pi_c$ 为余应变能增量,是正定二次型函数,总有 $\delta^2\Pi_c > 0$.这样由上式可知: $\Pi_c(\tilde{\sigma}') > \Pi_c(\tilde{\sigma})$,于是连续变形体的最小总余能原理可叙述如下:连续变形体真实应力状态下所具有总余能恒小于其它可能应力状态下的总余能,或者连续变形体处于变形协调性状态的必要与充分条件是总余能为最小值.

上述二种变分原理,对精确解来讲,其体系的总势能与总余能之间存在有如下关系,即

$$\Pi_p(\tilde{u}) + \Pi_c(\tilde{\sigma}) = 0$$

其次,还有关系式

$$-\Pi_p(\underline{u}') \leq -\Pi_p(\underline{u}) = \Pi_c(\underline{\sigma}) \leq \Pi_c(\underline{\sigma}')$$

式中的等号只有在可能位移或可能应力就是真实位移或真实应力状态下才成立,不等号表明真实位移场或真实应力场使总势能或总余能取最小值.

在弹性力学问题中,通常有二类解题方法,一类称位移法,以位移作为基本未知量,求解位移函数表示的平衡微分方程,并使所求的位移分量在 S_u 上应满足位移边界条件,一般情况下,只有少数问题可用解析方法求得其精确解.在结构分析与力学计算问题中,应用最小总势能原理来求解近似解答是十分有效的,它提供了在结构的一切可能变形状态中寻求接近真实变形状态的位移解答,例如在梁、板与壳结构问题中,先假设具有待定参数的协调性位移函数,即梁板壳的弹性挠曲线方程式而后计算其总势能泛函,其总势能泛函的积分结果为待定参数的二次型函数,由总势能极小值条件来确定这些参数值,从而可求得问题的近似解答.目前在工程界广泛应用的有限元法,就是建立在最小总势能原理的基础上的.另一类称力法,该法选择力为基本未知量,应用最小总余能原理建立一组超静定未知力的代数方程组,求解此方程组,即可求得超静定未知力.最小总余能原理是有限元力法、杂交元法的理论基础,见文献[35].

1.4 二类变量广义变分原理(混合能量原理)

上二节分别介绍了最小总势能原理与最小总余能原理.在应用最小总势能原理求解问题时,原理本身已严格体现了平衡条件,在选取位移函数上,可作一些简化假设,因而可求得问题的近似解;应用最小总余能原理求解问题时,原理本身已严格体现了变形连续性条件,在选取应力函数时,可作一些简化假设.这二条原理在求解弹性力学问题近似解答时,能扩大其解题范围,其次在建立有限元位移与应力模型时,它们又是其理论基础^[34,35].这二条原理又称为一类变量变分原理.

下面,我们将介绍二类变量变分原理.上述最小总势原理与最小总余能原理是分别以位移与应力作为自变函数的泛函.它们都是有约束

条件的一类变量变分原理,对最小总势能原理,其约束条件为域内几何方程与位移边界条件;对最小总余能原理,其约束条件为域内的平衡方程与力的边界条件.上述一类变量变分原理也称为泛函的条件极值原理^[22].下面要讨论的广义变分原理,就是把一类变量变分原理的条件极值转化为无条件驻值.一般有二类变量广义变分原理和三类变量广义变分原理.

二类变量广义变分原理最早由哈林格(Hellinger)于1914年提出,后来由赖斯纳(Reissner)于1950年加以完善的,因此,通常称为哈林格-赖斯纳变分原理,亦称混合变分原理.下面,我们通过一类变量变分原理和拉格朗日乘子法推导出二类变量广义变分原理.

根据上节式(1.3.2)最小总余能原理改写为

$$\delta \Pi_c = \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{D}_c^{-1} \underline{\sigma} d\Omega - \int_{s_u} (\underline{E} \underline{\sigma})^T \underline{\bar{u}} ds \right\} = 0 \quad (a)$$

其中,自变函数 $\underline{\sigma}$ 要求满足域内平衡条件和力的边界条件,因此,这是一个条件极值原理问题.如果引入两个拉格朗日(Lagrange)乘子 $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2$,把平衡方程和力的边界条件加入到变分式中,并将乘子参与变分,则可将式(a)转化为无条件驻值问题,此时,新泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{c2}^* = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{D}_c^{-1} \underline{\sigma} d\Omega - \int_{s_u} (\underline{E} \underline{\sigma})^T \underline{\bar{u}} ds \\ & + \int_{\Omega} (\underline{L} \underline{\sigma} + \underline{f})^T \underline{\lambda}_1 d\Omega - \int_{s_s} (\underline{E} \underline{\sigma} - \underline{\bar{p}})^T \underline{\lambda}_2 ds \end{aligned} \quad (b)$$

现对上式关于 $\underline{\sigma}, \underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2$ 进行变分,有

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{c2}^* = & \int_{\Omega} \{ \delta \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} + (\underline{L} \underline{\sigma} + \underline{f})^T \delta \underline{\lambda}_1 \} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\underline{L} \delta \underline{\sigma})^T \underline{\lambda}_1 d\Omega - \int_{s_u} (\underline{E} \delta \underline{\sigma})^T \underline{\bar{u}} ds \\ & - \int_{s_s} (\underline{E} \underline{\sigma} - \underline{\bar{p}})^T \delta \underline{\lambda}_2 ds - \int_{s_s} (\underline{E} \delta \underline{\sigma})^T \underline{\lambda}_2 ds = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

将上式第二个积分项进行分部积分,得