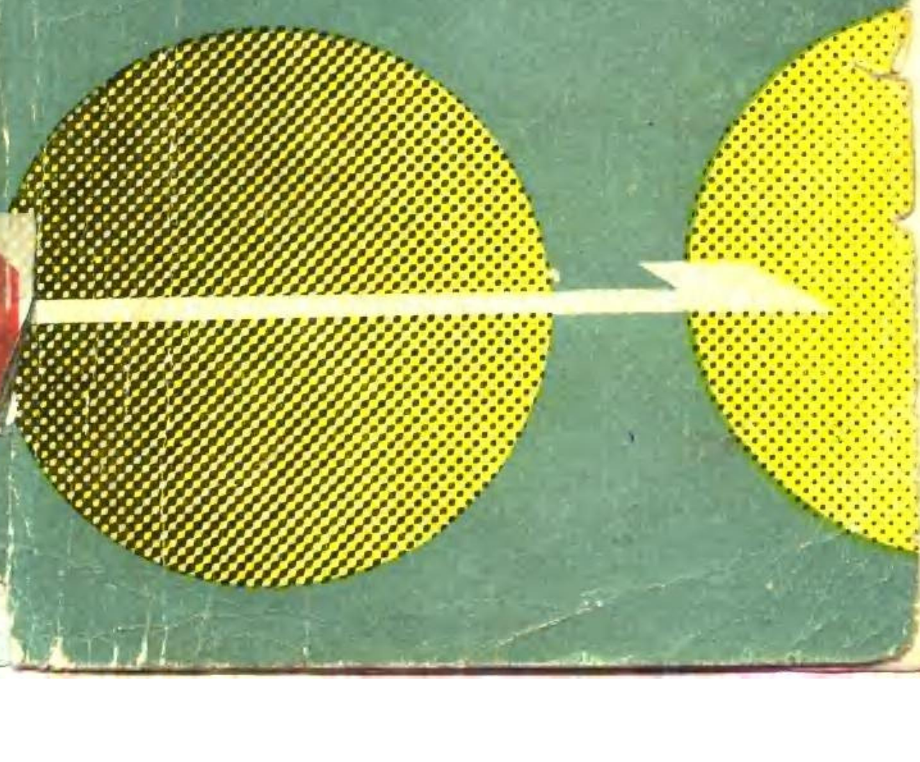
数学分析的理论与方法

崔宝同　王海滨　等编著



数学分析的理论与方法

崔宝同 王海滨等 编著

科学技术文献出版社

内 容 简 介

数学是各门科学的基础，而数学分析又是数学中最重要的基础课程。本书内容包括：函数，数列极限，函数的极限，连续函数，实数连续性，导数与微分，微分学基本定理及其应用，不定积分，定积分，级数，多元函数微分学，隐函数，重积分，广义积分，含参变量的积分，曲线积分，曲面积分。书后附有阶的估计方法。

本书在取材和阐述方面有别于一般教科书和专著，立足于帮助读者克服学习及解题中的困难，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供高等学校师生及广大科技工作者参阅。

数学分析的理论与方法

崔宝同　王海滨等　编著

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路15号)

一二〇一工厂印刷

新华书店科技发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　14.5印张　309千字

1990年10月第1版　1990年10月第1次印刷

印数：1—5500册

科技新书目：228—112

ISBN 7-5023-1298-6/O·81

定价：7.50元

序　　言

数学主要是研究现实世界的数量关系与空间形式的科学，它不仅在自然科学和工程技术中有广泛应用，而且也渗透到一些社会科学和人文科学中，如经济学、心理学、语言学等．在科学技术的研究中，数学是重要而基本的工具，也是培养各类科技人才的必要基础．因此，可以说数学是各门科学的基础，而数学分析又是数学中最重要的基础课程．

本书是作者在多年辅导升学考试中所积累资料的基础上，经过修改整理而成的．我们希望它成为大学生在学习数学分析方面的一本课外读物，同时也为有关的高等学校教师及科技工作者提供一本有益的参考书．本书在取材和阐述方面，既不类同于一般教科书，也与专门著作有别．我们主要立足于帮助读者克服学习及解题过程中可能遇到的困难，提高分析问题和解决问题的能力，为读者参加升学考试准备一本内容翔实的参考资料．在编写过程中，我们尽量详尽地分析了基本理论的难点；对抽象化的问题进行了具体化和几何直观的说明；对重点内容的意义及应留意的事项作了较多的注释．例题的选取也具有典型性、实用性、新颖性．另外，较细致地介绍了一些一般教科书中难以展开讨论的问题，力争揭示解题之规律，归纳出一般方法，指出方法的应用范围和可能出现的错误．有时还介绍有关科研新成果或将结论推广，这有利于开拓读者的视野、加深读者对概念的理解和提高读者的解题能力．

本书共有十七章及一个附录．除个别地方外，基本按现行数学分析教科书的内容次序编排．内容包括一元函数微积分学、级数和多元函数微积分学．在附录中，我们结合例题较详细地介绍了数学分析中极其重要的方法——阶的估计方法．

本书由崔宝同、王海滨主编，参加编写工作的还有王修德、李文祥、司兴海、高存臣、程远纪、冯文忠、周长桐、郭嘉骅、胡建勇、尉建飞、秦超、袁俊华、吴崇俭、陈明华、项文恺、包俊东、史本广、沈传龙、于祥忠、王晓知、彭步端、杜永安．

在本书的编写过程中，得到了安徽大学数学系主任郑祖庥教授和李文荣教授的热情支持和鼓励，并提出过许多宝贵意见，在此表示感谢．最后还应特别感谢科学技术文献出版社的同志，由于他们的关心和支持，才有可能使本书早日与读者见面．

由于我们水平所限，书中不当与错误之处在所难免，我们恳切希望读者批评指正．

编　者

1989.4.10

目　录

第一章 函 数

在全部数学中，最重要的概念莫过于函数了，因为它几乎是现代数学每一分支的主要研究对象．函数的概念及对函数的研究是数学分析最重要的内容，数学分析是在实数范围内研究函数的．本书所说的数皆指实数．

本章重点 函数的概念；一些特殊类型的函数的性质；复合函数及绝对值不等式．

§1 函数的概念

定义 设A为非空数集，R为实数集，若对每一个数$x\in A$，按照对应关系f都对应唯一一个数$y\in R$，称对应关系f是定义在数集A上的函数，表示为$f:A\to R$，其中数x对应的数y称为f在x的函数值，记为$y=f(x)$．数集A称为函数f的定义域；所有函数值的集合称为f的值域，表为$f(A)$，即$f(A)=\{y\mid y=f(x),\ x\in A\}\subset R$．

一、有关函数的记号f

f表示x与y之间的某种对应关系，$f(x)$表示函数f在x处的函数值，二者有本质上的差异．如$y=f(x)=x^3-4x+1$，这里对应关系f表示，任何一个数x的立方减去此数的4倍加1，就得到对应的数y，而$f(2)=2^3-4\cdot 2+1=1$表示f在$x=2$处的函数值．又如$y=\cos x$，y和$\cos x$是函数值，$\cos$是函数．但在通常的数学解析中，约定：函数用f或$y=f(x)$ $(x\in A)$或$f(x)$ $(x\in A)$表示．一般地，函数值也用$f(x)$表示．

只要注意，这并不会使函数与函数值发生混淆.

二、关于函数的定义域

函数概念中最重要的是对应关系(即函数)和函数的定义域（它是今后研究函数性质时不可忽视的).那么，如何确定函数的定义域呢？对于实际问题，必须根据问题的实际意义具体确定；对于由分析表达式 $y=f(x)$ 给出的函数，它的定义域是使函数有意义的一切 x 的全体组成的集合，我们称为自然定义域. 通常有以下几种情况：

1） 在分式中，分母不为零；

2） 偶次根号下非负；

3） 对数真数大于零；

4） 在反三角函数$\arcsin x$，$\arccos x$中，$|x|\leqslant 1$；

5） 若一个函数是几个解析表达式的和，则要分别考虑每一部分的定义域，然后找出各部分定义域的公共部分，即是函数的定义域.

例 1　求函数$y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域.

解　当$x-1\leqslant 0$ 时，$\lg(x-1)$无意义，故$\lg(x-1)$的定义域是$x-1>0$，即$x>1$；又当$x+1<0$ 时，$\sqrt{x+1}$ 无意义，且$\sqrt{x+1}$不能为零，所以$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域是$x+1>0$，即$x>-1$.

综上所述，函数 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域是$x>1$，可表示为$\{x|1<x<+\infty\}$.

例 2　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域.

解 当 $x^2-x-6\geqslant 0$ 时，$\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义，解此不等式得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$； 而 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$；解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$. 所以，函数的定义域是 $3\leqslant x\leqslant 4$ 或 $-3\leqslant x\leqslant -2$，亦即 $\{x|\ 3\leqslant x\leqslant 4\}\cup\{x|-3\leqslant 4\leqslant -2\}$.

三、两个函数的相同

两个函数的相同，是指它们的定义域相同，对应关系也相同(指在相同的定义域内，每个 x 所对应的函数值总相同)，二者缺一不可. 例如，$f(x)\equiv 1\ \ (x\in R)$ 和 $g(x)=\frac{x}{x}$ $(x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty))$ 是不同的函数.又如 $h(x)=\operatorname{arc\,tg}x$ 与 $\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\ (x\in(0,+\infty))$ 亦是不同的函数. 要注意，两个相同的函数，其对应关系的表达式可能不同.如 $f(x)=x$ $(x\in R)$ 与 $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)\quad(x\in R)$ 表示形式不同，但却是同一函数. 两个相同的函数，亦称相等.

四、单值函数与多值函数

在定义中，每一 $x\in A$，都对应唯一一个 $y\in R$，这样的函数称为单值函数.若 y 值不唯一，则称该对应关系为多值函数.在数学分析中，仅限于讨论单值函数.值得注意的是，在单值函数的定义中，一个 $y\in f(A)$，不一定只有唯一一个 $x\in A$ 与它对应.原因在于定义中要求每个 $x\in A$ 对应唯一一个 $y\in R$，并未说不同的 x 对应不同的 y.这就是说，不同的 x 可以对应同一 y，如 $y=x^2$，$x\in R$，当 $x=\pm 2$ 时，有 $f(\pm 2)=(\pm 2)^2=4$.

五、函数概念的扩充

在现代数学中，由于集合论的发展，函数概念可以不受

实数集合的限制．也就是说，不要求A与$f(A)$都是实数集，可以是任意的抽象集合．这里，我们用“映射”的观点来建立函数的概念．

设X和Y是两个抽象集合．所谓从X到Y的映射，是指下述的一个规则f：对任意$x\in X$，有唯一确定的$y\in Y$与之对应，记为$f:X\to Y$．例如，设X是所有三角形的全体组成的集合，Y是所有圆组成的集合，则f可以是这样一种规则：把每一个三角形与它的外接圆对应；f也可以是每一个三角形与它的内切圆对应的规则．

数学分析中的函数就是特殊的映射，因为它的定义域、值域均是实数集R的子集．实际上，映射、对应、变换、算子等概念都是函数概念的发展．当然，在不同的发展阶段对不同的概念要有不同的认识．

函数概念另一方面的扩充，是将函数定义为有序数对集合．具体地说，“函数是具有下列性质的有序数对集合$\{(x, y)\}$：若(x, y)和(x, z)都在该集合内，则$y=z$”．即在该集合内不存在包含第一个元素相同的两个不同的有序数对，如$f=\{(1, 7), (3, 7), (5, 3), (4, 8)\}$．这样定义的函数比较抽象，对初学数学分析的读者来说，可能是难以理解的，我们在本书中不采用这种定义．

我们曾将函数定义为一种“关系”（或“规则”），但难于搞清它是什么意思．若用“规则”一词，其缺点是：如果将规则理解为用来确定$f(x)$的实际运算，则$f(x)=x$和$f(x)=x(\sin^2 x+\cos^2 x)$当然是不同的规则，但我们却规定$f(x)=x$和$f(x)=x(\sin^2 x+\cos^2 x)$为同一函数．正是由于这个原因，我们将函数定义为数与数之间的一种对应“关系”．遗憾的是，“关系”一词虽能避免“规则”一词所遇到的非议，但它的含义

更含糊．因而，在“有关函数相同”一部分中，我们用括号给予了解释．正是由于现行函数概念的“不确切”，才导致了有人把这一概念定义为有序数对的集合．

§2 几种特殊函数

一、有界函数与无界函数

定义 设函数$f(x)$在数集A上有定义，若存在$C>0$，使对任意$x\in A$，都有$|f(x)|\leqslant C$，则称$f(x)$在数集A上有界．

由定义易知，C不是唯一的(事实上有无限多个)．学习过程中应注意以下几个问题：

1．要判断$f(x)$在数集A上是否有界，关键在于能否寻找到具有这样性质的C：$C>0$，对任意$x\in A$，有$|f(x)|\leqslant C$．为此，在具体问题中，需在给定的数集内，结合恒等变形和绝对值不等式等，把$|f(x)|$放大到某一常数．

例1 证明$f(x)=|1-x|-|1+x|$在$[-a, a]$$(a>0)$上有界．

证明 由于对任意$x\in[-a, a]$，有

$$|1-x|-|1+x|\leqslant|(1-x)+(1+x)|=2$$

故$f(x)$在$[-a, a]$上有界．

2．数集A上的有限个有界函数的和、差、积仍是A上的有界函数．

定义 设函数$f(x)$在数集A上有定义，若对任意的$P>0$，总存在某个$x_p\in A$，使得$|f(x_p)|>P$，则称$f(x)$在A上无界．

从定义可以看出，无界函数与有界函数是两个相反类．将函数有界性定义中的“任意”调换为“存在”，把“$\leqslant$”改

为“>”，即有无界性的定义；反之为有界性的定义．函数$f(x)$有界与否，不仅与给定的函数有关，而且还与给定的数集有关。如$f(x)=1/x$在$(1,2)$上有界，但在$(0,1)$上却无界．

有界函数间的商不一定有界，这是值得注意的．如定义在$(0,1)$上的函数$f(x)=1$与$g(x)=x$在$(0,1)$上都有界，但它们的比$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上无界．

二、单调函数

定义　设函数$f(x)$在数集A上有定义，若对任意的x_1，$x_2\in A$，

(1) 当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (\text{或} f(x_1)<f(x_2))$$

则称$f(x)$在A上单调增加(或严格增加)．

(2) 当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$在A上单调减少(或严格减少)．

显然，一区间上的常值函数既是单调增加又是单调减少的函数，但非严格单调．

一般来说，为了证明函数在定义域（或某区间）上的单调性，可先在定义域(或某区间)内任取两点x_1，x_2，不妨设$x_1<x_2$，作差$f(x_1)-f(x_2)$，然后判别$f(x_1)-f(x_2)>0$（或$\geqslant 0$)还是$f(x_1)-f(x_2)<0$(或$\leqslant 0$)，即可确定函数的单调性．

例 2　证明$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内严格增加．

证明　对任意的x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，不妨设$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$．

因为$x_1<x_2$，即$x_1-x_2<0$，但$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\dfrac{1}{2}x_2\right)^2+$

$\frac{3}{4}x_2^2>0$，因而 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$. 因为 x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$的任意性，所以$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内严格增加.

例 3　证明：若 $f(x)$ 在数集 A 上严格增加（或单调增加），则 $-f(x)$ 在 A 上严格减少（或单调减少）.

证明　对任意的 x_1，$x_2\in A$，设 $x_1<x_2$，则有关系式 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$），从而有

$$-f(x_1)>-f(x_2)\text{（或}-f(x_1)\geqslant -f(x_2)\text{）}$$

故 $-f(x)$ 在 A 上严格减少（或单调减少）.

此例可作为判断函数单调性的方法来使用. 如 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增加，则 $y=-x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格减少，这一点可借助解析几何的直观性来理解.

三、函数的奇偶性

定义　设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，若对任意 $x\in A$ 有 $-x\in A$，且 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称函数 $f(x)$ 在 A 上是奇函数（或偶函数）.

由定义容易看出，所论函数 $f(x)$ 的定义域 A 是对称于原点的数集（因为对任意 $x\in A$，有 $-x\in A$）. 因此，为判断给定的函数 $f(x)$ 的奇偶性，需考察两点：①$f(x)$ 的定义域为对称于原点的数集；②对任意 $x\in A$，$f(-x)=-f(x)$ 还是 $f(-x)=f(x)$.

例 4　证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

证明　显然当 $x\geqslant 0$ 时，$x+\sqrt{1+x^2}>0$；当 $x<0$ 时，

$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$$