高等学校教学参考书

# 应用固体力学基础

【下 册】 杜庆华 熊祝华 陶学文


高等教育出版社

高 等 学 校 教 学 参 考 书

# 应用固体力学基础

## 下 册

杜庆华 熊祝华 陶学文

高等教育出版社

（京）112号

## 内容提要

本书是高等学校工科专业的教学参考书。它从材料力学开始，比较全面地介绍了杆、板、壳等构件在弹性、塑性直至疲劳和断裂等方面的应用性基础知识，内容相当丰富，风格独特。全书分二册出版。上册主要是材料力学，但比目前已出版的其他材料力学教材在内容上更丰富，理论上更深刻。下册主要讲应用弹性力学，简明地介绍了板、壳的应力计算，以及稳定问题和线弹性断裂力学。

本书适用于高等学校工程力学、机械、土木、航空、造船等类有关专业，也可供其他各类学校有关专业的教师及工程技术人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

应用固体力学基础　下册/杜庆华等编.—北京：高等教育出版社，1996

ISBN 7-04-005347-0

I.应…　II.杜…　III.固体力学-基本知识 IV.034

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 01085 号

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张 14.25　字数 350 000
1996年12月第1版　　1996年12月第1次印刷
印数 0001—500
定价 16.50元

# 编 者 的 话

本书上册已于1987年出版，由于种种原因下册迟至今日才问世。纵观全书，体现了我们的初衷，即本书是工科专业的教学参考书，它从材料力学开始，比较全面地介绍了弹性、塑性直至断裂等方面的应用性的基础知识。我们力图从取材、体系及内容叙述上有别于同类书，以帮助教师、学生从一个新的角度教好、学好这门课。

本书总体构成由杜庆华教授提出，上册熊祝华教授做了较多工作，下册由陶学文教授定稿。

杜庆华
熊祝华
陶学文
1991.12

# 目　录

第一章　数学准备知识……………………………………………………………1
§ 1-1　指标符号……………………………………………………………1
1-1-1　求和约定，哑指标　…………………………………………………1
1-1-2　自由指标………………………………………………………………2
§ 1-2　克罗内克(Kronecker)记号和勒维-契维塔(Levi-Civita)符号…3
1-2-1　克罗内克记号 $\delta_{ij}$ ………………………………………………3
1-2-2　勒维-契维塔符号 $e_{ijk}$ ……………………………………………3
1-2-3　$\varepsilon$-$\delta$ 等式……………………………………………………………4
§ 1-3　坐标变换……………………………………………………………4
1-3-1　二维空间坐标转轴关系……………………………………………4
1-3-2　三维空间坐标转轴关系……………………………………………5
1-3-3　一般性的坐标变换…………………………………………………6
§ 1-4　矢量代数……………………………………………………………6
§ 1-5　直角坐标张量——笛卡尔张量……………………………………7
1-5-1　笛卡尔张量规则……………………………………………………8
1-5-2　坐标变换与张量定义………………………………………………9
1-5-3　偏导数……………………………………………………………10
1-5-4　张量的增阶和缩阶，张量的外积和内积…………………………11
1-5-5　张量检验的商法则…………………………………………………11
1-5-6　正对称和反对称张量………………………………………………12
1-5-7　二阶张量的一些性质………………………………………………12
1-5-8　张量的迹……………………………………………………………14
1-5-9　各向同性张量………………………………………………………14
§ 1-6　二阶张量的不变量…………………………………………………14
参考文献……………………………………………………………………16
第二章　线弹性力学的力学模型………………………………………………17

§ 2-1 应力分析 ……17
2-1-1 应力张量 ……17
2-1-2 运动微分方程 ……18
§ 2-2 应变分析 ……19
2-2-1 应变张量 ……19
2-2-2 刚体转动 ……20
2-2-3 变形协调条件 ……22
2-2-4 有限变形情形 ……24
§ 2-3 应力应变关系 ……27
2-3-1 应变能与虎克定律 ……27
2-3-2 各向同性弹性体的弹性系数 ……29
2-3-3 广义虎克定律，弹性常数间的关系 ……30
§ 2-4 线弹性力学的基本方程 ……32
2-4-1 用位移表示的基本方程 ……33
2-4-2 用应力表示的基本方程 ……34
2-4-3 马克斯威尔(Maxwell)和摩勒拉(Morera)应力函数 ……36
§ 2-5 线弹性力学的一些基本特点 ……37
2-5-1 叠加原理 ……37
2-5-2 线弹性静力学问题解的唯一性 ……38
2-5-3 无体积力情形解的意义 ……39
2-5-4 关于圣维南(Saint-Venant)原理 ……39
参考文献 ……40
第三章 厚壁圆筒和球壳 ……42
§ 3-1 厚壁圆筒 ……42
3-1-1 应力分析 ……42
3-1-2 应变和位移分析 ……44
§ 3-2 多层缩套圆筒 ……46
3-2-1 缩套圆筒的应力 ……47
3-2-2 相同材料缩套圆筒的优化尺寸和优化过盈量 ……48
3-2-3 不同材料双层缩套圆筒的优化设计 ……51
§ 3-3 厚壁球壳 ……53

参考文献 ……………………………………………………………56

第四章　弹性力学平面问题 ……………………………………………57
§ 4-1　平面应变和平面应力 ……………………………………………57
4-1-1　平面应变 ……………………………………………………57
4-1-2　平面应力 ……………………………………………………58
§ 4-2　平面问题基本方程 ………………………………………………59
§ 4-3　应力函数方法 ……………………………………………………60
§ 4-4　极坐标形式的应力函数解 ………………………………………65
4-4-1　平面问题的极坐标通解 ……………………………………65
4-4-2　例 ……………………………………………………………69
§ 4-5　半无限楔形体和无限半平面 ……………………………………73
4-5-1　半无限楔形体 ………………………………………………73
4-5-2　无限半平面受边界集中力作用 ……………………………75
4-5-3　无限半平面公式应用例 ……………………………………76
§ 4-6　弹性力学平面问题的复变函数解法 ……………………………79
4-6-1　基本公式 ……………………………………………………79
4-6-2　无限大板中的孔口问题 ……………………………………80
4-6-3　有椭圆孔的无限大板受拉情形 ……………………………83
4-6-4　有中心裂纹的无限大板受拉情形 …………………………85
参考文献 ……………………………………………………………90

第五章　杆的扭转和弯曲 ………………………………………………91
§ 5-1　等直杆的扭转 ……………………………………………………91
5-1-1　扭转应力 ……………………………………………………91
5-1-2　扭转杆的位移 ………………………………………………95
§ 5-2　薄膜比拟法 ………………………………………………………97
5-2-1　薄膜比拟法 …………………………………………………97
5-2-2　椭圆截面杆的扭转 …………………………………………98
5-2-3　狭长矩形截面杆的扭转 ……………………………………100
5-2-4　粗短形截面杆的扭转 ………………………………………102
§ 5-3　圆形截面梁的弯曲应力 …………………………………………102

5-3-1 梁的应力函数 …… 102
5-3-2 圆截面梁的应力 …… 105
§ 5-4 半圆截面梁的弯曲中心 …… 106
§ 5-5 密圈螺旋弹簧的应力修正系数 …… 109
5-5-1 弹簧应力修正系数的近似解 …… 109
5-5-2 弹簧应力修正系数的弹性力学解 …… 113
参考文献 …… 121
第六章 薄板的小挠度弯曲 …… 122
§ 6-1 基本假设 …… 122
§ 6-2 基本方程 …… 123
6-2-1 几何方程 …… 123
6-2-2 本构方程 …… 124
6-2-3 平衡方程 …… 127
6-2-4 按位移求解的基本方程 …… 128
6-2-5 任意斜截面上的变形和内力 …… 130
§ 6-3 边界条件 …… 131
§ 6-4 简支矩形薄板的双三角级数解——纳维埃解 …… 138
§ 6-5 两对边简支矩形板的单三角级数解——莱维(Lévy)解 …… 141
§ 6-6 弹性薄板的内力换算式 …… 148
§ 6-7 圆形薄板弯曲的基本方程 …… 150
§ 6-8 圆形薄板的轴对称弯曲 …… 152
6-8-1 简支圆板受均布载荷及中心集中力 …… 153
6-8-2 简支圆板在周边受均布弯矩 …… 155
6-8-3 简支圆板中心部分受均布载荷 …… 156
6-8-4 内边简支环板在外边界受均布弯矩 …… 158
§ 6-9 反对称载荷作用下的圆形薄板弯曲 …… 160
参考文献 …… 164
第七章 简单薄壳的弹性结构分析 …… 165
§ 7-1 旋转对称薄壳的几何关系和薄膜内力 …… 166
§ 7-2 球壳和锥壳的薄膜分析 …… 169

7-2-1 球壳 …… 169
7-2-2 圆锥壳 …… 171
§ 7-3 旋转对称薄壳、环壳和椭球壳的薄膜分析 …… 173
7-3-1 旋转对称的薄壁壳顶 …… 173
7-3-2 壳顶有开孔的情形 …… 175
7-3-3 具有尖顶的壳顶 …… 175
7-3-4 环壳 …… 176
7-3-5 椭球壳 …… 177
§ 7-4 轴对称的薄壳变形分析 …… 179
§ 7-5 旋转对称壳受非对称载荷情况 …… 180
§ 7-6 圆柱形薄壳的薄膜力分析 …… 182
§ 7-7 旋转对称薄壳的弯曲理论 …… 185
§ 7-8 圆柱壳的轴对称弯曲 …… 191
7-8-1 受端部载荷的圆管 …… 193
7-8-2 半球形封头压力容器 …… 194
§ 7-9 球壳的轴对称弯曲 …… 196
§ 7-10 圆锥壳的轴对称弯曲 …… 203
参考文献 …… 208
第八章 弹性力学的能量原理 …… 210
§ 8-1 虚功原理 …… 210
§ 8-2 应变能定理 …… 212
§ 8-3 虚位移原理 …… 212
§ 8-4 最小势能原理 …… 214
§ 8-5 虚力原理 …… 216
§ 8-6 最小余能原理 …… 220
§ 8-7 弹性应变势函数和余函数的外凸性 …… 221
8-7-1 外凸函数 …… 222
8-7-2 $W$和$W_c$的外凸性 …… 222
8-7-3 最小势能原理和最小余能原理 …… 223
§ 8-8 里兹(Ritz)法 …… 229

§ 8-9 伽辽金(Галёркин)法 …… 237
§ 8-10 用能量法求解薄板弯曲问题 …… 242
8-10-1 里兹法 …… 242
8-10-2 伽辽金法 …… 247
§ 8-11 功的互等定理 …… 249
参考文献 …… 252
第九章 弹性稳定问题 …… 254
§ 9-1 计算临界力的能量法 …… 254
9-1-1 压杆问题变分方程 …… 254
9-1-2 里兹法 …… 255
9-1-3 铁木辛柯法 …… 257
9-1-4 伽辽金法 …… 259
§ 9-2 计算临界力的有限差分法 …… 261
9-2-1 差分法 …… 261
9-2-2 差分结果的外推 …… 263
§ 9-3 受扭杆及压缩与扭转同时作用 …… 269
9-3-1 受扭杆的临界扭矩 …… 269
9-3-2 同时受压力$P$和扭矩$T$的杆 …… 270
§ 9-4 螺旋弹簧受压时的稳定性 …… 272
9-4-1 螺旋弹簧的刚度计算 …… 272
9-4-2 临界压力计算 …… 274
§ 9-5 麻花杆 …… 277
§ 9-6 随动载荷下的压杆 …… 287
9-6-1 用欧拉静力学法求临界力 …… 287
9-6-2 动力学方法求临界力 …… 290
§ 9-7 脉动载荷下的压杆 …… 292
§ 9-8 薄板的稳定分析 …… 294
9-8-1 矩形板单向压缩 …… 294
9-8-2 矩形板双向压缩 …… 296
9-8-3 差分法求临界力 …… 298

§ 9-9 圆柱壳的临界力 …… 300
9-9-1 圆柱壳的基本微分方程 …… 300
9-9-2 圆柱壳的简化微分方程 …… 302
9-9-3 圆柱壳受轴向压缩情形 …… 304
§ 9-10 某些结构失稳事故的简述 …… 307
参考文献 …… 314
第十章 塑性力学基础 …… 316
§ 10-1 布列奇曼(Bridgman)试验体积弹性定律 …… 316
§ 10-2 广义虎克定律 …… 318
§ 10-3 应力空间 $\pi$ 平面 …… 319
§ 10-4 屈服条件 …… 320
10-4-1 屈服函数及屈服曲面的基本性质 …… 320
10-4-2 屈雷斯卡(Tresca)屈服条件 …… 323
10-4-3 米塞斯(Mises)屈服条件 …… 325
10-4-4 两个屈服条件的比较 …… 326
10-4-5 相继屈服曲面的概念 …… 330
§ 10-5 蝲拉克尔(Drucker)公设 …… 332
§ 10-6 完全塑性材料的本构方程 …… 335
10-6-1 与米塞斯条件相关联的流动法则 …… 335
10-6-2 广义塑性位势理论——与屈雷斯卡屈服条件相关联的流动法则 …… 339
§ 10-7 全量理论 …… 346
10-7-1 简单加载 …… 346
10-7-2 单一曲线假设 …… 347
10-7-3 依留辛微小弹塑性变形理论 …… 347
10-7-4 全量理论与增量理论的关系 …… 349
§ 10-8 厚壁圆筒的弹塑性分析 …… 353
10-8-1 弹性完全塑性厚壁筒 …… 353
10-8-2 残余应力 …… 355
10-8-3 有反向屈服时的残余应力 …… 358
10-8-4 幂强化厚壁筒 …… 360

§ 10-9　厚壁球壳的极对称变形 …… 364
§ 10-10　等厚旋转圆盘 …… 366
§ 10-11　等直杆的扭转 …… 369
10-11-1　基本情况 …… 369
10-11-2　弹性解回顾 …… 371
10-11-3　塑性扭转 …… 372
10-11-4　弹塑性扭转 …… 375
参考文献 …… 377
**第十一章　工程断裂力学** …… 378
§ 11-1　裂纹扩展力 $G$ …… 378
11-1-1　裂纹扩展力与能量释放率 …… 378
11-1-2　$G$ 与 $K_{\mathrm{I}}$ 的关系 …… 379
§ 11-2　关于 $K_{\mathrm{I}}$ 准则 …… 380
11-2-1　裂纹顶端的塑性区 …… 380
11-2-2　应力强度因子的塑性区修正 …… 383
11-2-3　薄壁容器断裂前渗漏的概念 …… 384
§ 11-3　裂纹顶端张开位移(COD)法 …… 386
11-3-1　计算裂纹体位移的帕里斯(Paris)公式 …… 386
11-3-2　达格代尔(Dugdale)模型的 COD 的计算 …… 387
11-3-3　COD设计曲线 …… 390
11-3-4　臌胀效应 …… 392
11-3-5　关于 COD方法的评价 …… 392
§ 11-4　双准则方法 …… 393
§ 11-5　$J$ 积分 …… 396
11-5-1　势能变化率 …… 397
11-5-2　$J$ 积分的回线积分定义 …… 398
11-5-3　$J_{\mathrm{Ic}}$ 的测试 …… 400
11-5-4　$J$ 与 $\delta$(即 COD)的关系 …… 401
§ 11-6　应力强度因子的工程算法 …… 402
11-6-1　柔度法 …… 402

11-6-2 按照简化的应力分布计算应力强度因子的方法 …………………… 404
11-6-3 权函数法 …………………………………………………… 411
§ 11-7 复合型断裂准则 …………………………………………… 415
11-7-1 最大正应力准则 …………………………………………… 416
11-7-2 比应变能准则（$S$ 准则） ……………………………… 418
§ 11-8 疲劳裂纹扩展 ……………………………………………… 423
11-8-1 疲劳裂纹扩展速率 ………………………………………… 423
11-8-2 疲劳短裂纹问题 …………………………………………… 427
§ 11-9 损伤力学的概念 …………………………………………… 433
11-9-1 矩形截面梁的损伤力学分析 ……………………………… 434
11-9-2 双悬臂梁的损伤力学分析 ………………………………… 438
参考文献 ……………………………………………………………… 441

# 第一章　数学准备知识

应用固体力学基础讨论的内容，在超出工程上常用的材料力学的范围时，往往用数学工具矢量和张量。用矢量和张量表达的关系式简洁扼要，全部列出所有分量而不遗漏，而且排列有序，利于编制计算机程序。近年的力学方面技术文献用张量的很多。笛卡尔直角坐标的张量表达式是最常用的。

## § 1-1　指标符号

$n$ 个变量或数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可以记作 $x_i, i=1, 2, \cdots, n$。$i$ 的集合从 1 到 $n$ 必须加以规定。$i$ 指其中任意的一个，这一符号称为指标。写在右下角的指标称为下指标。

### 1-1-1　求和约定，哑指标

求和式(1-1-1)

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{1-1-1}$$

可以应用求和符号写成

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \tag{1-1-2}$$

可以看出，如下几种形式的求和结果是相同的：

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i,\quad S = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j,\quad S = \sum_{m=1}^{n} a_mx_m \tag{1-1-3}$$

式中 $i$，$j$，$m$ 重复出现，而指标字母的不同并不影响求和结果，这种指标称为哑指标。如果规定指标重复出现一次就表示必须求和，则可省去符号$\Sigma$，这称为求和约定。于是有

$$S = a_i x_i = a_j x_j = a_m x_m \tag{1-1-4}$$

这里只需规定 $i,j,m$ 从 1 到 $n$。今后规定不只一次重复出现的指标，求和时应加求和符号。

设以 1 到 3 为 $n$ 的范围，则可写出(1-1-5)的各求和式

$$\left.\begin{aligned}
&a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\
&a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
&a_i \boldsymbol{e}_i = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3 \\
&a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \\
&\qquad + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + \\
&\qquad + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3
\end{aligned}\right\} \tag{1-1-5}$$

上式中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 即 $\boldsymbol{e}_i$，$i=1,2,3$ 代表笛卡尔直角坐标轴方向的单位矢量，这是一种不随位置改变的单位矢量。

### 1-1-2 自由指标

方程组(1-1-6 $a$)

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
\bar{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
\bar{x}_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned}\right\} \tag{1-1-6 $a$}$$

可以写成

$$\bar{x}_i = a_{ij} x_j \tag{1-1-6 $b$}$$

式中 $i$ 为自由指标(不重复)，$j$ 为哑指标(重复，求和)。自由指标在每一式中，从 1,2,3 中取一项。式(1-1-6 $b$)是式(1-1-6 $a$)的一种缩写方式。指标符号起着缩写的作用。

可以写出如下的坐标转换关系：

$$\bar{x}_i = \alpha_{ij} x_j \tag{1-1-7$a$}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \alpha_{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{1-1-7$b$}$$

式中加一横的记号代表新坐标。

式(1-1-7)中的 $\alpha_{ij}$ 代表方向余弦，即

$$\alpha_{ij} = \cos(\bar{x}_i, x_j) \tag{1-1-8}$$

如果引进单位矢量 $\boldsymbol{n}$，则可用记号

$$n_i = \cos(\boldsymbol{n}, x_i) \tag{1-1-9}$$

在式(1-1-8)和式(1-1-9)中，(,)代表该括号内二方向之间的夹角。

关系式 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ 可写成

$$n_i n_i = 1 \tag{1-1-10}$$

在三维直角坐标中，微线段长度可以写成

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2$$

即

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_i \tag{1-1-11}$$

## § 1-2 克罗内克(Kronecker)记号和勒维-契维塔(Levi-Civita)符号

### 1-2-1 克罗内克记号 $\delta_{ij}$

克罗内克记号 $\delta_{ij}$ 可以定义为

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1-2-1}$$

于是

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j \\ 0, 当\ i \neq j \end{cases} \tag{1-2-1a}$$

如果写成矩阵，则

$$\underset{\sim}{I} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-2-1b}$$

而

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \tag{1-2-1c}$$

### 1-2-2 勒维-契维塔符号 $\varepsilon_{ijk}$

$\varepsilon_{ijk}$ 可以定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \equiv [\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k] \tag{1-2-2}$$

或用下列关系式

$$\varepsilon_{ijk}=\frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i, \tag{1-2-2a}$$

则

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, 若(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\\ -1, 若(i,j,k)=(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\\ 0, 当下标有重复时\end{cases} \tag{1-2-2b}$$

于是

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}=-\varepsilon_{jik} \tag{1-2-2c}$$

例如，行列式

$$|a_{ij}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23})-$$

$$-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23})$$

$$=\varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}=\varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{1-2-3}$$

### 1-2-3 ε-δ等式

勒维-契维塔符号与克罗内克记号之间有如下恒等关系：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{jp}\delta_{iq} \tag{1-2-4}$$

这个常用公式可用下列规则记住：第一项是两个第一下标在一起，两个第二下标在一起；第二项是两个 $\delta$ 的第一下标交换，乘积前加一负号。

## § 1-3 坐标变换

### 1-3-1 二维空间坐标转轴关系

对于平面内的两个直角坐标系 $x_1Ox_2$ 和 $\bar{x}_1O\bar{x}_2$(图 1-1)，

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1&=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\ \bar{x}_2&=-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-3-1}$$