数学解题教学法

А·Б瓦西列夫斯基著　李光宇　王力新译

湖南科学技术出版社

数学解题教学法
А·Б 瓦西列夫斯基 著
李光宇 王力新 译
责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年7月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：8.375 字数：188,000
印数：1—21,400
统一书号：13204·59 定价：0.88元

目　　录

前　　言

本书系供师范学院数学系师生解题教学实习的教学参考书。全书共有四大部分：代数，几何，三角，竞赛题与国际奥林匹克数学竞赛题。

因为与中学数学教学有直接关系的很多问题，在代数、数学分析和几何教程里业已讲授，所以在代数、几何和三角实习时只涉及这些教程当中未被讲透而又是中学数学教程重点的那些问题。书的取材注意到学生为钻研上述教材而必备的解题（实际应用）理论知识。

书中讲述了在中学数学教材里和国际奥林匹克数学竞赛与其它竞赛等情况下所碰到的一些数学问题的一般解法和特种解法。对于求解各种难题的方法的训练的教学法，尤为注意。

中学数学教学大纲，包括向学生介绍这样一些重要概念，如导数，积分、几何变换、矢量法和坐标法，等等。因而教材的研究方法有着非常重要的改变。它特别注重函数研究，集合论语言的引入。这样一来，就扩充了中学数学教材的范围，使读者能够了解到比较普遍的解算方法。书中，对于用函数法求解代数和几何上的问题，给予很大的注意。它指出，在什么样情况下用导数才能简化等式的证明、不等式的证明与解算、以及含参数方程根的研究。为了简化足够复杂的方程式和不等式（特别是含参数情况）的解，广泛利用函数的图象。

学生在解题过程中的数学活动是数学训练不可分割的一部

分，因而书中对下列问题给以极大的注意，即构造法、图解法和解析法的综合利用，假设的探求，各种集合性质的揭示，等等．学生通过解题过程熟悉解题的各种一般方法和特殊方法，获得用这些方法寻求解题途径的技能．

书中很多例题的陈述具有习题的特点．对研究非标准问题方面的教学法的描述占有重要地位．

每一节的末尾都有供独立解算的练习．书中讲明求各类代数题和几何题解的基本检验方法，因此大多数练习题不给答案．我们认为，在解题过程中也应该具备独立核验的技能．比较复杂的习题，附有提示．练习题上的参数和星号・（它代替＝，＞，＜），是为了便于让学生分成几个不同的小组进行解算．

§7.8 中的不复杂然而独具特色的习题，适合于用来系统地进行代数、三角和几何的实习以及初级数学教程的作业．

本书采用了作者写的《解题方法》（明斯克，《高等学校》出版社，1974）一书中的部分资料．

此书也可供中学解题训练的讲习班使用，还可用作小组作业和选修作业．

作者衷心感谢埃・弗・格鲁丹诺夫和勃・斯・卡普兰，他们费神审稿并提出了许多宝贵建议．

作　者

主要符号目录

$[D\text{-}ABC]$——底为 ABC 的棱锥 $DABC$。

$[D\text{-}ABC]^{\Pi}$ 底为 ABC 的正棱锥 $DABC$。

$S(\Phi)$—图形 Φ 的面积.

$S(ABC)$，$S(ABCD)$——三角形 ABC 的面积，四边形 $ABCD$ 的面积.

$[ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1]$——底为 $ABCD$ 及 $A_1B_1C_1D_1$ 的四棱柱.

$[ABC\text{-}A_1B_1C_1]^{\Pi}$ ——正棱柱.

$[ABCD\text{-}A_1B_1C_1D]^{\perp}$ ——直立棱柱.

Σ，Γ——平面.

$|A, (DBC)|$——点 A 到平面 DBC 的距离.

$(\widehat{AB, MCD})$——直线 AB 与平面 MCD 所构成的夹角值.

$(\widehat{ABC, MDE})$——平面 ABC 与平面 MDE 所构成的二面角值

$(\widehat{AB, CM})$——直线 AB 和直线 CM 之间的夹角值.

$|A, (BC)|$——点 A 和直线 BC 之间的距离.

第一章　整数性质的研究方法

§1.1　数的整除性*

因式分解. 将一含变量的表达式分解成因式。然后，证明给定式和除数有公因子。用这种方法解题时，常用到下面两个公式：

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}), \quad (1.1)$$

式中 n 是自然数；

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^{n-1}b^{n-1}), \quad (1.2)$$

式中 $n=2k+1$，k是任意自然数。

欲证公式（1.1）和（1.2）是否正确，只须将括号内的式子互乘即可。

例1　求证：对于任意自然数 n，$17^n - 11^n$ 的值能被 6 整除。

根据公式（1.1），有

$$17^n - 11^n = (17-11)(17^{n-1} + 17^{n-2} \times 11 + \cdots + 11^{n-1}).$$

于是命题得证。

---

*这里，我们只考虑利用整除性理论来解问题的方法，就其思路而言接近中学数学。

例2 求证：对于任意自然数 n，$2\times7^n+1$能被3整除。

因为$2\times7^n+1=2(7^n-1)+3$，又从公式(1.1)推知7^n-1可以被3整除。所以命题得证。

例3 求证：对于任意自然数 n，$3^{2n+1}+2^{n+2}$能被7整除。

显而易见，$3^{2n+1}+2^{n+2}=9^n\times3+2^n\times4=3(9^n-2^n)+3\times2^n+4\times2^n=3(9^n-2^n)+7\times2^n$。根据式（1.1），数$9^n-2$能被7整除，数$7\times2^n$也能被7整除。命题证毕。

数学归纳法．数学归纳法是以下列原理作基础的一种证明方法：(1) 某性质X对于 $k=1$ 成立；(2) 假设对于 $k>1$ 也成立，由此推出，对于下一个数$k+1$具有这种性质，那么对于任意自然数都具有性质X.

例4 证明：对于任意整数 $n\geqslant1$，8^n+6是7的倍数。

当 $n=1$时，命题成立。设：当 $n=k$（$k>1$）时，命题成立，就是说，

$$8^k+6=7m\quad（m是自然数）. \tag{1.3}$$

现在验证：在 $n=k+1$时，命题也成立，就是说，下式成立：

$$8^{k+1}+6=7t\quad（t是自然数）. \tag{1.4}$$

由等式（1.3）得出$8^k=7m-6$。故

$$\begin{aligned}8^{k+1}+6&=8\times8^k+6=8(7m-6)+6=7\times8m-42\\&=7(8m-6),\end{aligned}$$

也就是 $t=8m-6$。

因为t是自然数，所以据式（1.4)就证完命题。

例5 证明：对于任意自然数 n，表达式 $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ 的值能被11整除。

当 $n=1$时，命题成立。假设对于 $n=k$，命题也成立，即

$$3^{2k+2}+2^{6k+1}=11m, \tag{1.5}$$

这里，m是自然数。

兹证：$n=k+1$时命题亦真，即

$$3^{2(k+1)+2}+2^{6(k+1)+1}=11p, \tag{1.6}$$

这里，p是自然数。

由等式（1.5），得

$$3^{2k+2}=11m-2^{6k+1}. \tag{1.7}$$

根据等式(1.7)，和式

$$3^{2(k+1)+2}+2^{6(k+1)+1}$$

可以变换成下式：

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)+2}+2^{6(k+1)+1}&=3^2\times 3^{2(k+1)}+2^{6(k+1)+1}\\&=3^2(11m-2^{6k+1})+2^{6(k+1)+1}\\&=3^2\times 11m-3^2\times 2\times 2^{6k}+2^7\times 2^{6k}\\&=3^2\times 11m+2^{6k}(2^7-2\times 3^2)\\&=3^2\times 11m+2^{6k}\times 110=11(9m+10\times 2^{6k}).\end{aligned}$$

于是，等式(1.6)的真确性得证；且$p=9m+10\times 2^{6k}$

余数法．设 N_1 和 N_2 是自然数，且$N=N_1+N_2$。如果$N_1=qn_1+p_1$，$N_2=qn_2+p_2$（q，n_1，n_2，p_1，p_2是自然数），则$N=(qn_1+p_1)+(qn_2+p_2)=q(n_1+n_2)+(p_1+p_2)$．因此，如果$N_1$和$N_2$被$q$除得的余数$p_1$和$p_2$之和也能被$q$整除，即$p_1+p_2=qk$（$k$是自然数），那么，数 $N=N_1+N_2$可以被 q 整除。

例 6　证明：对于任意自然数 n，数$2\times 7^n+1$是3的倍数．

显然，$2\times 7^n+1=2(6+1)^n+1$．应用牛顿二项式于$(6+1)^n$后，不难看到：当$(6+1)^n$除以3，便得余数1．因此，当2×7^n被3除时，得余数2．于是，$2\times 7^n+1=(3m+2)+1=3(m+1)$．

例 7　证明：对于任意自然数n，表达式$21^{2n+1}+17^{2n+1}+$ $+15$的值，不能被19整除．

显然，$21^{2n+1}+17^{2n+1}+15=(19+2)^{2n+1}+(19-2)^{2n+1}$

$+15$，应用牛顿二项式于表达式$(19+2)^{2n+1}$和$(19-2)^{2n+1}$之后，得出$(19+2)^{2n+1}$被19除的余数是2^{2n+1}，$(19-2)^{2n+1}$被19除的余数是$(-2)^{2n+1}$。但是，$2^{2n+1}+(-2)^{2n+1}=0$。因此，表达式$21^{2n+1}+17^{2n+1}+15$被19除得的余数为15。命题证毕。

用反证法证。假设命题不成立，即给定的含变量的表达式不是已知自然数的倍数。由此假设便得出矛盾，这就证明命题成立。

例 8 证明：对于任意的自然数n，表达式n^2+3n+5不能被121整除。

假设命题不成立，即存在这样一个整数m，使

$$n^2+3n+5=121m. \tag{1.8}$$

解方程(1.8)中的n，得

$$n_{1,2}=0.5(-3\pm\sqrt{11(44m-1)}).$$

根据题设条件，n为整数，所以必须使$11(44m-1)=(11k)^2$，这就是使$44m-1=11k^2$（k是整数），后一等式的左边在m为任意数值时，它都不是11的倍数。因此，方程(1.8)没有整数解。因而得出矛盾，这就证明命题成立。

练习

1．证明（k是自然数）：

(1) $4\times6^k+5^k-4$是5的倍数。

(2) $4^{2k+1}+3^{k+2}$是13的倍数。

(3) $5^{2k+1}+4^{k+2}$是21的倍数。

(4) $5^{6k+5}+7^{6k}+6$是9的倍数。

(5) $5^{2k-1}\times2^{k+1}+3^{k+1}\times2^{2k-1}$是19的倍数。

2．确定数k取何自然数值时，下式成立：

（1）11^k+7^k被9整除。

（2）13^k+k被12整除。

§1.2 求方程及方程组的整数根

对变量之一解方程. 一含几个变量的方程 $F(x, y, z, \cdots, u, v)=0$，对此方程中的诸变量之一进行求解，例如解出$v$。然后考察函数$v=f(x, y, z, \cdots, u)$．

例1 求方程$17(xyzt+xy+xt+zt+1)-54(yzt+y+t)=0$的自然数根。

兹解出此方程的x：

$$17x=54-17(zt+1):(yzt+y+t),$$

得

$$54-17x=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}. \qquad (1.9)$$

因为方程中的y，z，t，x是自然数，方程（1.9)的右边为正整数，因此$x\leqslant 3$．当$x=1$时，方程（1.9）左边等于37；当$x=2$时，则等于20；当$x=3$时，则等于3．于是，须解方程的自然数是：

$$37=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}; \qquad (1.10)$$

$$20=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}; \qquad (1.11)$$

$$3=\frac{17}{y+\dfrac{t}{zt+1}}. \qquad (1.12)$$

由方程(1.10)，得

$$37t:(zt+1)=17-37y. \qquad (1.13)$$

因为当$y\geqslant 1$时，方程（1.13）的右边为负，所以这个方程没有自然数解. 用类似的方法可以证明方程（1.11）也没有自然数解.

由方程（1.12）求出：$17-3y=3:(z+1/t)$。显然，$0<3:(z+t^{-1})<3$，式中z与t是自然数. 因此，$0<17-3y<3$. 由此得出：$y=5$。于是，$3:(z+t^{-1})=2$，即$z+1/t=1+1/2$. 因而$z=1$，$t=2$。

答：$x=3$，$z=1$，$t=2$，$y=5$。

方程中所含表达式的因式分解. 这种方法的实质是，将方程两边分解为因式，然后用几个方程作成的方程组代替原方程.

例2 证明：方程式$x^3-5x^2=13$没有自然数解.

将方程变换成形为

$$x\times x(x-5)=1\times 1\times 13. \qquad (1.14)$$

方程(1.14)等价于方程组$x=1$与$x-5=13$。此方程组无自然数解(它是矛盾方程组).

例3 求整数x和y使$x>y>0$且

$$x^3+7y=y^3+7x. \qquad (1.15)$$

将已知方程变换成

$$x^3-y^3=7x-7y \text{ 或 } (x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y).$$

但因$x>y$，故方程(1.15)与下式等价：

$$x^2+y^2+xy=7 \text{ 或 } (x-y)^2=7-3xy.$$

显然，$7-3xy>0$。即$xy<7:3$。但这仅在(1)$x=1$,$y=2$;(2)$x=2$，$y=1$的条件下才有可能。因题设$x>y$，故得$x=2$，$y=1$。

练习

1 证明下列方程没有整数解：

(1)$x^2+y^2=1971$；(2)$x^3=2+3y^2$。

2 求方程$x^4+2x^7y-x^{14}-y^2=7$的自然数解。

3 求下列方程的整数解：

(1)$x^2-6xy+13y^2=100$；(2)$x^2-6xy+5y^2=121$。

4 证明方程$x^2+y^2+z^2=28$没有自然数解。

5 试问：当a为何负值时，方程$x^3+5x^2-13=a$有自然数解。

6 证明：表达式$2x+3y$和$9x+5y$在x和y取同一整数时，能被17整除。

第二章　解方程和不等式的研究方法

§2.1　方法的实质

问题类型是：解方程$f(x)=0$，解不等式$f(x)\geqslant 0$；证明恒等式$f(x)=a$（a为参数）；在$x\geqslant b$时证明不等式$f(x)\geqslant a$（a，b为参数）。这些都是考察函数性质和作出它们的图象的一个更为一般的问题的一部分。由于这些问题充分地利用了我们所知道的相应的函数性质，所以把解方程和不等式，证明恒等式和不等式综合一起来研究是适宜的。

考察函数性质的一般步骤是：(1) 研究函数的奇偶性和周期性；(2) 讨论函数的单调性和极值（用导数或不用导数）；(3) 求函数的零点。

为了说明研究方法的实质，兹举例如下。

例1　解方程

$$4x^2+(a-2)x+(a-5)=0, \tag{2.1}$$

并讨论当参数a取何值时，方程(2.1)有正根、负根、一个正根和一个负根、重根、没有实根。

此题可用下述方法得解：(1) 解出方程(2.1)中的a，并讨论函数$a=\varphi(x)$。在这种情况下，不解出方程(2.1)根可以进行讨论。(2) 讨论函数$y_1=4x^2+(a-2)x$，$y_2=5-a$。(3) 先解出方程(2.1)中的x而后考察函数$x=f(a)$。(4)研究函数$y=y(x)=4x^2+(a-2)x+(a-5)$。

从我们所研究的方法来看，上述诸法中，对头种方法最感兴趣。解出方程(2.1)中的a，得

$$a=(-4x^2+2x+5):(x+1)。x\neq -1 \qquad (2.2)$$

现在来考察定义在$]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$上的函数(2.2)。

为求出这个函数的驻点，我们把方程(2.2)变换成$a=a(x)=-4x+6-(x+1)^{-1}$的形式，得

$$a'(x)=-4+(x+1)^{-2};\ a'(-0.5)=a'(-1.5)=0;$$

$$a(-0.5)=6;\ a(-1.5)=14;\ a(0)=5;$$

$$\lim_{x\to-\infty}a(x)=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}a(x)=-\infty;\ \lim_{x\to-1(x>-1)}a(x)=-\infty。$$

$$\lim_{x\to-1(x<-1)}a(x)=+\infty$$

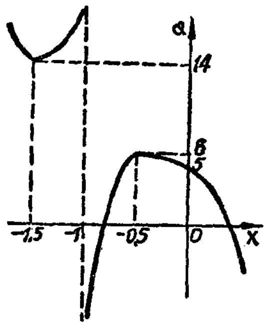

图2.1

我们作函数的图象（图2.1）。由图2.1可知：1）$a=14$，$x_1=x_2=-1.5$；2）$a>14$，$x_1,x_2<0$；3）$6<a<14$，方程(2.1)无根；4）$a=6$，$x_1=x_2=-0.5$；5）$5<a<6$，$x_1,x_2<0$；6）$a=5$，$x_2=0$，$x_1<0$；7）$a<5$，$x_1<0$，$x_2>0$.由图象可见，无论a取何值，方程(2.1)的根不等于-1。根据图象可撤底研究方程(2.1)的根如何随a的变化而变化。