广义谱算子理论

I. 卡拉乔拉　C. 福耶斯 著

科学出版社

广义谱算子理论

I. 卡拉乔拉 C. 福耶斯 著

孙佑民 安世全 译

陈文塬 耿 堤 校

科学出版社

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书在 N. Dunford 所创立的谱算子理论的基础上，发展了谱测度和谱函数理论，引入了 U 谱函数、U 谱算子等，并对该理论作了系统的阐述．全书共六章，第一章介绍预备知识；第二章讨论很大的一类算子——可分解算子；第三章讨论 U 谱算子；第四章讨论广义纯量和谱算子；第五章讨论 U 酉和 U 自伴算子；第六章举出了一些有意义的例子，并提出了一些未解决的问题．

本书可供大学数学系泛函专业的学生、研究生以及该方向的研究工作者使用．

Ion Colojoară and Ciprian Foias

Theory of Generalized Spectral Operators

Gordon and Breach Science Publishers

New York, 1968

广义谱算子理论

I. 卡拉乔拉　C. 福耶斯　著

孙佑民　安世全　译

陈文嶙　耿　堤　校

责任编辑　朴玉芬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1992 年 7 月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1992 年 7 月第一次印刷　　印张：8 1/2

印数：0—1600　　字数：179 000

ISBN 7-03-002892-9/P·572

定价：7.80 元

引　　言

由 N. Dunford 所创立的谱算子理论在我们这个时代所取得的重大进展是众所周知的。然而，在最近六年中，一个不是基于谱测度而是基于谱空间或谱函数的理论开始得到发展。这一理论与 Dunford 的标算子及谱算子理论并行不悖。

本书的目的是对于这些新工作给予系统的概述，我们主要感兴趣的是阐述那些在与谱测度相关联中（如第二章和第四章中换位子所起的作用，它与谱空间有关的幂零和拟幂零性等)或已知较大类的类似形式中所没有出现过的新结果，标算子、谱算子的有用性质（第三、四章）以及此扩展理论所适用的各类稍许具体的算子，和对这些算子的性质的完整的说明（第五、六章）。 我们仅讨论 Banach 空间中的有界算子，因为很容易将这一讨论推广到无界算子和局部凸空间上去，否则技巧性的困难会在细节上干扰我们对真正的新问题的注意力。

我们试图使本书更容易被读者理解，因而证明是十分详细的(第五章及第六章少数地方例外).一些引用而没有证明的定理，都来自非常熟知的且被广泛地引用的文献. 如Dunford Schwartz 的论文或 Pally-Wiener 的专题报告，或 Dunford 著名的著作[27]. 不管怎样，总是假定读者对于算子理论是有所了解的。

本书共分为六章，每章都补充了简短的注释，有些注释是说明历史背景的。由于本书应该包括本课题统一、普遍的阐

述和一定数量的新结果，所以我们就冒昧地对其内容给了较长的说明。

在第一章里讨论了三个基本概念，即在§1 中给出了单值扩张性的初等性质［即算子 $T\in B(\mathscr{X})$ 若对于某一 $\mathscr{X}$ 值解析函数 $x(t)$，$(\lambda I-T)x(\lambda)\equiv 0$，则 $x(\lambda)\equiv 0$］。这些算子 N. Dunford[26] 在 1952 年已经考虑过，而我们研究的关于 Dunford 函数演算[25,30]［即定理 1.5—1.6］似乎是新的[29,30]。§2 引出了关于 $T_1,T_2\in B(\mathscr{X})$ 的两个算子的拟幂零等价性 $T_1\overset{q}{\sim}T_2$（$B(\mathscr{X})=$ Banach 空间$\mathscr{X}$上的线性有界算子的全体），即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(-1)^{\nu}T_1^{n-\nu}T_2^{\nu}\right\|^{\frac{1}{n}}=0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}T_2^{n-\nu}T_1^{\nu}\right\|^{\frac{1}{n}}.$$

这个等价性由作者[19]引出，它作为交换算子 T_1 和 T_2，T_1-T_2 是拟幂零等价的事实在非交换情况中的推广，证明了谱单值扩张性以及元素 $x\in\mathscr{X}$ 对于具单值扩张性的算子的谱，在拟幂零等价时是不变的。最后在§3 中研究了关于算子 T 的谱极大空间的初等性质，使得将 T 限制在$\mathscr{Y}$上时，谱包含在某一闭集中，此空间是 T 的极大不变子空间 $\mathscr{Y}$。

第二章专门研究一个很大的算子族，称为可分解算子(因为它们容许谱分解)。对此 Dunford 理论的许多工作仍是有效的。

在§1 里，首先证明了可分解算子具有单值扩张性。用这个事实确定了这种算子的谱极大空间的构造［即相应于闭集 F 的谱极大空间是 $\mathscr{X}_T(F)=\{x\in\mathscr{X}\mid\sigma_T(x)\subset F\}$］，以及

Dunford 的函数演算的分解的特征.

§2 证明了可分解算子有关拟幂零等价性的特征. 若 T_1 是可分解的且 $T_1 \overset{q}{\sim} T_2$, 则 T_2 也是可分解的,且 T_1 和 T_2 对应于任何闭集 F 的谱极大空间 $\mathscr{X}_{T_1}(F)$ 及 $\mathscr{X}_{T_2}(F)$ 重合. 另外, 若 T_1 和 T_2 是可分解的且上述重合性质成立时, 则 $T_1 \overset{q}{\sim} T_2$. 作者得到的这些结果[19],构成了 Dunford 的谱算子典型分解的一般化(稍微改变一下也包括不可交换的情形).

§3 建立了关于可分解算子的换位子的新性质,设 S 和 T 是两个可分解算子,则对于任何算子 A, $A\mathscr{X}_S(F) \subset \mathscr{X}_T(F)$ 对于所有的闭集 F 成立,当且仅当

$$\|C(T,S)^n A\|^{\frac{1}{n}} \to 0, \text{其中 } C(T,S): x \to Tx - xS.$$

特别地,对于任何算子 A, 当且仅当

$$\|C(T,T)^n A\|^{\frac{1}{n}} \to 0, \text{其中 } C(T,T): x \to Tx - xT$$

时,可分解算子 T 的极大谱空间不变.

§4 给出了某些弱相似的情况,当算子不具备谱性质也不是可分解算子时,仍然保持某些不变子空间.

第三章开始介绍下面的基本概念: 函数的容许代数 $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ 谱函数及 $\mathfrak{U}$ 标算子. 由于这些定义必须回避 $\mathfrak{U}$ 上的任何拓扑结构, 所以至少须对于 Banach 空间中的有界算子而言. 值得指出算子 T 是 $\mathfrak{U}$ 标的, 是指存在一 $\mathfrak{U}$ 标函数 U [即 $\mathfrak{U}$ 到 Banach 代数 $B(\mathscr{X})$ 的同态 $U: f \to U_f$ 满足一些代数的及分析的性质],使得 $U_\lambda = T$ (这里 λ 是 C 上的一个恒等函数 $\lambda \to \lambda$).

在 §2 中证明了"唯一性",即假设 $\mathfrak{U}$ 是一个连续函数的逆闭代数(即若 $f \in \mathfrak{U}, f \neq 0$,则 $\frac{1}{f} \in \mathfrak{U}$). 则对应于相同 $\mathfrak{U}$ 标算

子T的$\mathfrak{U}$谱函数在下面的意义下是唯一的：假设U及V是$\mathfrak{U}$谱函数且 $U_\lambda = T = V_\lambda$，则对于所有的 $f \in \mathfrak{U}, U_f \overset{q}{\sim} V_f$.

在§3中介绍了$\mathfrak{U}$可分解的及$\mathfrak{U}$谱算子，并研究了它们的初等性质.

§4的内容是受了 Ringrose[98] 的论文的启发，它包括了关于$\mathfrak{U}$可分解算子的某些不变子空间的全序族（网）的研究.因为紧算子对于适当选取的容许代数也是 $\mathfrak{U}$ 标算子，所以这些研究特别是对于紧算子的研究可以看成是 Ringrose 工作的推广.

第四章专门讨论更特殊的但有趣的情形，即 $\mathfrak{U} = C^\infty(R^2) = C^\infty$且假设$\mathfrak{U}$谱函数是广义函数的情况.这种 $\mathfrak{U}$ 标或 $\mathfrak{U}$ 谱算子称为广义标或广义谱算子，是由作者分别引进的（关于标的情况见文献[39]，关于谱的情况见文献[15]及文献[81]）. 这些算子类虽然是 Dunford 关于标及谱算子第一个自然推广，但仍存在许多未解决的问题.其中的某些问题例如正则性问题（见定义 IV.17）是新颖的，因而是很有趣的. 这一方向的研究可在§§1，2 及§4 各节中找到. 最好的结果如下：设U及V是同一个广义标算子的两个谱分布，则对于所有的 $f \in C^\infty, (U_f - V_f)^{[n]} = 0$，若$T$是具有谱重数为 1 的算子，还有唯一性！最后，若 T，S 是两个广义标算子，使得 $T \overset{q}{\sim} S$，则对于某一n我们有 $(T - S)^{[n]} = 0 = (S - T)^{[n]}$（关于 $(T - S)^{[n]}$ 见第一章§2 定义）.

第一个结果早在文献[39]中已得到.而另外两个是新的.

在§3中给出了两个交换正则（或完全正则）的广义标（或谱）算子的和及乘积是广义标（或谱）算子，由此得两个可交换的标或谱算子的和及乘积是广义标或谱算子.

在§§5，6，7各节中将 Foguel[36]，Stamptli[117] 及 Kurepa[67] 对于标及谱算子的某些结果推广到广义标和谱算子(是第一个作者[15,17,18]完成的).即(在§6中)当$T=S+Q$是将广义谱算子T典型分解为广义标部分S及它的拟幂零部分Q，则若T属于由算子构成的闭左理想，必存在整数 $p\geqslant 0$，使得 S^{p+1}及 Q^{p+1} 也属于这个理想．或(§7)当 T^n 或 e^T 是广义标算子或谱算子，则若 $\sigma(T)$ 不分离 0 及∞，那么T自己是一个广义标算子或谱算子．

第五章特别讨论一些谱在单位圆或实直线上的算子．

§1 精确地描述了谱在单位圆上的广义谱算子，证明了(命题 1.2)这样的算子与 Fr. Wolf 的算子[130]是一致的．因一系列特征与 Wolf 算子相一致．作为应用，我们给出了不变子空间的存在性定理，推广了 Sz-Nagy 及第二位作者的一个定理，并且给出了关于 Banach 代数自同构的谱的乘法定理．

§2 专门讨论一个重要的函数代数，即由函数

$$f(e^{i\tau})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{i\tau}$$

构成的代数 $\mathfrak{A}[\rho]$，其中 $\|f\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|\rho_n<\infty$，$\rho=\{\rho_n\}$是由$\geqslant 1$ 的数组成的固定的数列，满足$\rho_{n+m}\leqslant\rho_n\rho_m(n,m\in Z)$且当 $n\to\infty$时，$\sqrt[n]{\rho_n}\to 1$．主要的结果(定理 2.7) 是当且仅当它是一个正则的 Banach 代数时，$\mathfrak{A}[\rho]$ 是一个容许代数．关于这个正则性的准则是属于 A. Beurling 的，在定理 2.12 中证明．此证明受到了 J. Wermer 论文[128]的启发．证明是自足的，仅用到了 Paley-Wiener[94] 的一个经典定理，由这些结果，若 $\{\|T^n\|\}_{n\in Z}$ 满足 Beurling 条件，即

$$\sum_{n\in Z}\frac{\log\|T^n\|}{1+n^2}<\infty,$$

则 $\sigma(T)$ 包含在单位圆 C_1 中的算子T 是可分解的(确切地是 $\mathfrak{U}$ 标的).

在§3中证明了若 $\sigma(T)\subset C_1$, 且对于某一$\beta>0$,

$$\|(\lambda I-T)^{-1}\|\leqslant M\exp(K||\lambda|-1|^{-\beta})$$

$$(|\lambda|\neq 1,|\lambda|\to 1)$$

成立,则T 满足前面的条件. 在§4中将此注释应用于谱在实直线上的算子 T. 我们得到若

$$\|(\lambda I-T)^{-1}\|\leqslant M\exp(k|\mathrm{Im}\lambda|^{-\beta}),$$

$$(\mathrm{Im}\lambda\neq 0,\mathrm{Im}\lambda\to 0),$$

则T 是可分解的(对于适当的容许代数 $\mathfrak{U}$, 甚至T 是一个 $\mathfrak{U}$ 标算子).

§4末尾(定理4.5)给出了带实谱的广义标算子的精确描述,这种算子与 Tillmann[121,122] 及 Kontorovitz[55] 研究过的算子重合. 当然它的特性可以在这里找到.

在§5内我们考虑 Hilbert 空间的谱包含在单位圆或直线内的算子 T, 使得 $I-T^*T$ (前一种情形)或 T^*-T (后一种情形)属于由紧算子构成的 Schatten 理想. 我们依 J. Schwartz[112] 的方法, 证明了这类算子的预解式满足前面所说的增长条件, 这样得到那种算子对适当的选取的容许代数 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{U}$ 标算子. 最后,在§6中我们研究了由 Sahnovič[104] 所给出的具有足够多的不变子空间的算子的三角模型. 此外, 还有比其更精确的其他模型, 但是我们之所以选取 Sahnovič 的模型是由于它的最简单性. 我们指出,在这里也可见到, J. Feldman 最近所得到的关于不变子空间的结果及其证明(见本章定理6.13).

第六章是我们专题论文的最后一章，处理了许多可分解算子的具体例子。 在§1中，我们研究乘可微函数空间中的固定正则函数的乘法算子，这种算子当然是最具体的广义标算子的例子。 尽管在各种特殊情况下它们是正则的（推论 1.16）．我们还没有成功的证明它的正则性。 此外我们的研究证明了两个乘法算子 T 和 S 是拟幂零等价的，当且仅当 $T=S$（定理 1.7）。

§§2—3 处理了卷积算子，在§2中特别证明了对于固定的 $f\in L'(G)$，每个卷积算子 $g\to g*f$ 在 $L'(G)$（这里 G 是一局部紧的 Abel 群）中是一个可分解算子。并且，对于任何一个容许代数 $\mathfrak{U}$，存在卷积算子不是 $\mathfrak{U}$ 标的正则算子。在§3中，Krabbe 关于在 $L^p(-\infty,\infty)$ 内的卷积算子的一些结果，是以自足的方式引出的，它自然地插入在本书的内容里。§4唯一的目的是弄明白这些算子，关于这方面的内容也出现在最近 N. Dunford 所考虑的一类新算子的研究之中。

最后，我们列出了与本书的课题相关的一些未解决的问题。

本书在引用命题、定理和注释等时与通常的办法一样，即引用章、节及段。如果是属于引文同一章的，我们便删去章。“参考文献”中的篇目在正文中并未完全被用到，那些被引用了的文献在每章的最后的“注释和注记”中均有说明。本专题论文的许多成果是第一次公布的，有些是我们首先得到的，另外一些是在写本书的过程中得到的。

本书的作者们充分意识到，这本专题报告的一个缺点是未致力于解决常微分算子的奇异边界问题。关于这一点，我们推荐读者去参阅 Ljance 的一些论文。

本专题报告是在 J. Schwartz 教授的启发和鼓励下写成的，谨借此机会向他表示感谢。我还要感谢我们的同事 C. Apostol 及 F. Vastlescu，他们阅读了原稿并提出了一些有益的意见。最后我们特别感谢 A. Wick 夫人，事实上是她将我们的书重新写成了地道的英文。

作　　者

1966年7月于布加勒斯特

引言的附录

在未开始以前我们来说明与我们有关的一些定义及 Dunford 理论的要点(见文献[27]及[28]).

设 $\mathscr{X}$ 是一 Banach 空间, $B(\mathscr{X})$ 是 $\mathscr{X}$ 上的线性有界算子构成的 Banach 代数. $\mathscr{P}_x$ 表示 $\mathscr{X}$ 的投影集合. $\mathscr{B}$ 是复平面 C 上的 Borel 集作成的族. 映射 E: $\mathscr{B}\to\mathscr{P}_x$ 称为谱测度,若

$$E(B_1\cap B_2)=E(B_1)E(B_2)\quad(B_1,B_2\in\mathscr{B}).\tag{1}$$

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)x=\sum_{n=1}^{\infty}E(B_n)x,\ (B_n\in\mathscr{B},$$

$$B_n\cap B_m=\varnothing,n\neq m,x\in\mathscr{X}).\tag{2}$$

$$E(C)=I.\tag{3}$$

算子 $T\in B(\mathscr{X})$ 称为谱算子,是说若存在谱测度 E 使得

$$TE(B)=E(B)T\quad(B\in\mathscr{B}),\tag{i}$$

$$\sigma(T\mid E(B)\mathscr{X})\subset\overline{B}\quad(B\in\mathscr{B})\tag{ii}$$

满足 (i) 和 (ii) 的谱测度是由 T 唯一决定的, 它称为 T 的谱测度. 若 S 可以表示为

$$S=\int_C\lambda dE\lambda,$$

其中 E 是它的谱测度, 则谱算子 S 是标型的(或简称标).

算子 $Q\in B(\mathscr{X})$ 称为是拟幂零的,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Q^n\|^{1/n}=0$, 或等价地, $r(Q)=\{0\}$. Dunford 证明了当且仅当 $T=S+Q$ 时算子 T 是谱算子. 其中 S 是一个标算子, Q 是一个

与S可交换的拟幂零算子，而且这样的分解是唯一的，称为典型分解。S称为T的标部分，Q称为T的根部分。

最后，让我们回忆若$F\subset C$是闭的且若$\mathscr{X}_T(F)$如定义 1.1.1 所确定，则 $E(F)\mathscr{X}=\mathscr{X}_T(F)$。$E$是$T$的谱测度。

目　录

引言 ………………………………………… iii

引言的附录 ………………………………………… xi

第一章　预备知识 ………………………………………… 1

§1　算子的单值扩张性 ………………………………………… 1

§2　拟幂零等价算子 ………………………………………… 12

§3　谱极大空间 ………………………………………… 21

注释和注记 ………………………………………… 32

第二章　可分解算子 ………………………………………… 36

§1　可分解算子谱极大空间的结构 ………………………………………… 36

§2　可分解算子的拟幂零等价 ………………………………………… 47

§3　两个可分解算子的换位子 ………………………………………… 56

§4　可分解算子的拟相似性 ………………………………………… 64

注释和注记 ………………………………………… 68

第三章　$\mathfrak{U}$ 谱算子 ………………………………………… 71

§1　函数的容许代数及 $\mathfrak{U}$ 谱函数 ………………………………………… 71

§2　$\mathfrak{U}$ 谱函数生成的代数 ………………………………………… 81

§3　$\mathfrak{U}$ 可分解和 $\mathfrak{U}$ 谱算子、基本性质 ………………………………………… 89

§4　$\mathfrak{U}$ 可分解算子的超不变子空间套 ………………………………………… 94

§5　连续 $\mathfrak{U}$ 谱函数 ………………………………………… 104

注释和注记 ………………………………………… 105

第四章　广义标算子和谱算子 ………………………………………… 107

§1　广义标算子的谱分布的唯一性 ………………………………………… 107

§2　广义标算子的谱分布的唯一性定理 ………………………………………… 115

§3 广义标算子及谱算子的和与积 …………………… 118
§4 广义标算子的交换子的幂零性 …………………… 125
§5 广义谱算子与它的标部分之间的关系 …………………… 129
§6 广义谱算子分解为实部与虚部 …………………… 133
§7 广义谱算子的根和对数 …………………… 135
注释和注记 …………………… 139
第五章 𝔘 酉算子及 𝔘 自伴算子 …………………… 141
§1 𝔘 酉算子；广义标算子的情形 …………………… 141
§2 Banach 代数 $\mathfrak{U}[\rho]$ …………………… 155
§3 𝔘 酉算子；$\mathfrak{U}_T$ 酉算子 …………………… 171
§4 𝔘 自伴算子 …………………… 174
§5 Hilbert 空间中的 𝔘 酉算子及 𝔘 自伴算子 …………………… 183
§6 Hilbert 空间中的算子的三角型及不变子空间 …………………… 189
注释和注记 …………………… 206
第六章 一些例子和公开问题 …………………… 209
§1 可微函数的 Banach 空间内的乘积算子 …………………… 209
§2 Banach 代数内的乘积算子 …………………… 220
§3 关于 $L^p(R)$ 内的某些乘子的 Krabbe 函数演算 …………………… 230
§4 与矩阵函数相关的算子族的注记 …………………… 237
§5 一些公开问题 …………………… 242
注释和注记 …………………… 244
参考文献 …………………… 245
译后记 …………………… 253

第一章　预 备 知 识

§1　算子的单值扩张性

设 $\mathscr{X}$ 是一个复 Banach 空间，$B(\mathscr{X})$ 是 $\mathscr{X}$ 上的线性有界算子所构成的代数，C 是复数域.

1.1 定义　算子 $T\in B(\mathscr{X})$ 有单值扩张性，是指如果对于任何解析函数 $f:D_f\to\mathscr{X}$，$D_f\subset C$ 是开的，同时 $(\lambda I-T)f(\lambda)\equiv 0$ 时，有 $f(\lambda)\equiv 0$.

对于具有单值扩张性的算子 $T\in B(\mathscr{X})$ 及 $x\in\mathscr{X}$，我们可以考虑集合 $\rho_T(x)$，其元 $\lambda_0\in C$，使得存在定义在 λ_0 的邻域内，值在 $\mathscr{X}$ 中且满足 $(\lambda I-T)x(\lambda)\equiv x$ 的解析函数 $\lambda\to x(\lambda)$.

由定义 1.1，$x(\lambda)$ 是唯一的，显然 $\rho_T(x)$ 是开的且 $\rho_T(x)\supset\rho(T)$. 取 $\sigma_T(x)=C\rho_T(x)$ 和

$$\mathscr{X}_T(F)=\{x\in\mathscr{X}\,|\,\sigma_T(x)\subset F\},$$

其中 $F\subset C$，显然 $\mathscr{X}_T(F)=\mathscr{X}_T(F\cap\sigma(T))$.

1.2 命题　设 $T\in B(\mathscr{X})$ 为一有单值扩张性的算子，则

(i) $F_1\subset F_2$ 蕴涵 $\mathscr{X}_T(F_1)\subset\mathscr{X}_T(F_2)$;

(ii) $\mathscr{X}_T(F)$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间(不一定闭);

(iii) $\sigma_T(x)=\varnothing$ 当且仅当 $x=0$;

(iv) 对于每个 $A\in B(\mathscr{X})$ 且 $AT=TA$，有 $\sigma_T(Ax)\subset\sigma_T(x)$;

(v) $\sigma_T(x(\lambda))=\sigma_T(x)$, $x\in\mathscr{X}$ 且 $\lambda\in\rho_T(x)$.

证明：(i) 是平凡的.

(ii) 考虑 $x,y\in\mathscr{X}$ 及 $\alpha,\beta\in C$，设 $\lambda\to x(\lambda)$[相应地，$\lambda\to y(\lambda)$] 是定义在 $\rho_T(x)$[相应地 $\rho_T(y)$] 上的解析函数，满足 $(\lambda I-T)x(\lambda)=x$[相应地 $(\lambda I-T)y(\lambda)=y$]. 则 $z(\lambda)=\alpha x(\lambda)+\beta y(\lambda)$ 在 $\rho_T(x)\cap\rho_T(y)$ 上，满足 $(\lambda I-T)z(\lambda)=\alpha x+\beta y$，因此 $\rho_T(x)\cap\rho_T(y)\subset\rho_T(\alpha x+\beta y)$，即 $\sigma_T(\alpha x+\beta y)\subset\sigma_T(x)\cup\sigma_T(y)$.

现在，若 $x, y\in\mathscr{X}_T(F)$，则 $\sigma_T(x)$，$\sigma_T(y)\subset F$，因此 $\sigma_T(\alpha x+\beta y)\subset F$，即

$$\alpha x+\beta y\in\mathscr{X}_T(F).$$

(iii) 如果 $\sigma_T(x)=\varnothing$，则 $x(\lambda)$ 是一个整函数. 因此它满足 $(\lambda I-T)x(\lambda)=x$，对于 $|\lambda|>\|T\|$. 我们有

$$x(\lambda)=R(\lambda,T)x\to 0,\quad (|\lambda|\to\infty) \tag{1}$$

所以由 Liouville 定理(文献 [47] 或 [30])，

$$x(\lambda)\equiv 0. \tag{2}$$

从 (1) 及 (2) 得

$$x=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\|T\|+1}x(\lambda)d\lambda=0.$$

反之，显然，$x=0$ 则 $\sigma_T(x)=\varnothing$.

(iv) T 和 A 是连续算子，我们对 $\lambda\in\rho_T(x)$，有

$$(\lambda I-T)(Ax(\lambda))=A(\lambda I-T)x(\lambda)=Ax,$$

所以

$$\rho_T(x)\subset\rho_T(Ax),\quad 即\ \sigma_T(Ax)\subset\sigma_T(x).$$

(v) 考虑 $\lambda\in\rho_T(x)$ 及 $\mu\to(x(\lambda))(\mu)$ 这个解析函数，在 $\rho_T(x(\lambda))$ 上有 $(\mu I-T)(x(\lambda))(\mu)=x(\lambda)$. 因此对于每个 $\mu\in\rho_T(x(\lambda))$,

$$(\mu I-T)(\lambda I-T)(x(\lambda))(\mu)$$