

弹性板理论

TANXINGBAN
LILUN

曲庆璋

编著

章 权 季求知 梁兴复



人民交通出版社

00013043

0343

66

TANXINGBAN LILUN

弹性板理论

曲庆璋

编著

章 权 季求知 梁兴复

HK86/07



C0489221

人民交通出版社

内 容 提 要

本书共有8章,包括了弹性板的诸多方面问题,且有相当深度。书中介绍了板问题的各种不同解法,并附有较多的例题,这对学生和工程技术人员是有益的。

本书可作为高等学校土木、公路、桥梁、造船等专业研究生弹性板理论课程的教材,同时也是本领域广大科研工作者及工程技术人员的重要参考书。

图书在版编目(CIP)数据

弹性板理论 / 曲庆璋主编. —北京: 人民交通出版社,
1999.7

ISBN 7-114-03386-9

I. 弹… II. 曲… III. 弹性力学 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 21856 号

弹 性 板 理 论

曲庆璋

章 权 季求知 梁兴复 编著

版式设计:周 园 责任校对:杨 杰 责任印制:杨柏力

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街10号)

各地新华书店经销

北京鑫正大印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 15.125 字数: 397千

2000年1月 第1版

2000年1月 第1版 第1次印刷

印数: 0001-1500册 定价: 22.00元

ISBN 7-114-03386-9

U · 02431

前 言

本书是在交通系统高等学校内部教材“弹性板理论及计算”(1987年由西安公路学院印刷出书使用)的基础上,经大量的补充、修改而成的。同时作者还把近10年所发表的新的研究成果写进了本书。

原书是为工程力学专业本科生及有关专业的研究生而写的,曾在西安公路交通大学及其他大学作为教材使用10多年。在使用中有关教师及学生提出了不少的改进建议。在这次成书过程中,倾听了很多专家、教授的意见,增加了较多的内容(如矩形薄板的线性弯曲问题的一般解、矩形中厚板的一般解及非线性薄板问题等等)。这样使得本书不但仍适用于作为研究生使用教材,而且也是本领域广大科研工作者、工程技术人员的重要参考用书。

本书内容广泛,涉及到弹性板问题的诸多方面,而且有一定的深度。书中介绍了较多的弹性板解法,并同时配有大量的例题。如作为教材使用,可以根据不同专业要求有较大的选择余地。本书以介绍板的各种解法为主线,因此与现有教材、专著多以板的形状进行分类讲述有所不同。

本书是在建立薄板非线性 Von. Karman 方程组的基础上,得到弹性地基板以及稳定、振动等问题的控制方程,并蜕化为线性问题的控制方程以及薄膜问题(第二章)。第三章介绍了薄板精确求解方法,包括级数型精确解,给出矩形板的一般解。第四章介绍了薄板求解的复变函数方法。第五章较全面地介绍了薄板的各种数值近似解法。第六章介绍了薄板的差分解法。第七章介绍了中厚板理论,主要是 Reissner 的理论,以及矩形中厚板的一般解。第八章则以较大篇幅介绍了非线性薄板弯曲问题的各种解法。

本书是多人的劳动成果结晶。主编曲庆璋制定了编写大纲,负责全书的文字统编工作,并承担了书中主要内容的编写。广东省交通厅章权、交通部季求知、青岛建筑工程学院梁兴復承担了部分内容的编写,为本书的主要编著者。

首先要感谢我的老师钱令希教授,是他讲授的薄板力学,使我终身受益,而且他的思想观点及讲述方法,深深地影响了本书的编写。

上海交通大学匡震邦教授,西安交通大学陈瀚教授,西安建筑科技大学梅占馨教授等曾对原教材提出过很多宝贵的意见。定稿后又承陈瀚教授及西安交通大学张元冲教授认真详细地审阅,提出了修改建议,在此表示衷心地感谢。

交通部青岛海监局曲蕾助理工程师,帮助整理大量资料,并承担了书中的描图工作。研究生岳建勇、孟珣、李建华等帮助进行稿件的抄写及校对工作,在此一并表示谢意。作者还要感谢青岛建筑工程学院有关部门的领导,他们积极支持本书的编写工作,并提供了大量的帮助。

曲 庆 璋

于青岛建筑工程学院

1999.3.29

目 录

第一章 绪论	1
1.1 弹性板的概述	1
1.2 弹性板理论的发展简史	3
1.3 弹性薄板的基本假设	7
第二章 弹性薄板的控制微分方程	9
2.1 变形几何分析及物理关系	9
2.2 薄板的内力分析	17
2.3 平衡条件及卡曼方程组的建立	20
2.4 不同情况下薄板的控制方程	27
2.4.1 薄板的非线性弯曲振动控制方程	27
2.4.2 小挠度薄板理论(板弯理论)	27
2.4.3 弹性地基上的小挠度薄板	30
2.4.4 有纵向荷载作用时的薄板小挠度弯曲	30
2.4.5 小挠度板的振动问题	33
2.4.6 正交异性薄板的小挠度弯曲	33
2.4.7 弹性薄膜	35
2.5 线性薄板的边界条件	35
2.6 薄板的应变能	40
2.7 用能量法建立小挠度薄板的控制微分 方程及边界条件	43
2.8 稳定、振动问题的能量公式	47
2.9 柱坐标中薄板控制微分方程及能量表达式	49
习题	56
第三章 薄板的精确解	57

3.1	弹性板求解的概述	57
3.2	周边固定椭圆形薄板—简单问题的精确解	58
3.3	圆形薄板的轴对称弯曲问题	60
3.4	静水压力作用下圆形薄板的弯曲	69
3.5	直边简支扇形板的弯曲问题	71
3.6	圆形薄板的稳定问题	73
3.7	圆形薄板的自由振动	76
3.8	两对边简支无限长矩形薄板	79
3.8.1	直接积分法求解	80
3.8.2	用级数法求解	81
3.9	两对边简支无限长矩形薄板在线荷载作用下的求解	83
3.10	均布荷载作用下的半无限长矩形薄板	87
3.10.1	三边简支	87
3.10.2	对边简支一边固定	89
3.10.3	对边简支一边自由	89
3.11	弹性梁支承的无限长矩形薄板	89
3.12	矩形薄板线性弯曲的解	91
3.13	四边简支矩形板——双三角级数法	94
3.13.1	弯曲问题	95
3.13.2	弹性地基上的薄板	101
3.13.3	稳定问题	101
3.13.4	自由振动问题	104
3.14	单三角级数法解弯曲问题	105
3.15	初参数法及连续矩形板	116
3.16	狭长矩形板的再讨论	121
3.17	单三角级数法解弹性地基上的薄板	122
3.18	单三角级数法解矩形板稳定问题	123
3.19	单三角级数法求矩形板的自振频率	129
3.20	单三角级数法解正交各向异性板	132

3.21	矩形悬臂板问题	133
3.22	两相邻边固定另两边自由矩形板的一般解	143
3.23	两相邻边简支另两边固定矩形板	151
3.24	Winkler 弹性地基上四边自由矩形板问题	153
	习题	164
第四章	薄板问题的复变函数解法	167
4.1	概述	167
4.2	薄板控制方程的复数表示	168
4.3	薄板控制方程的特解	170
4.4	内力和位移的复数表示	171
4.5	沿边界内力的主矢量及主矩,边界条件	173
4.6	函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的确定性	177
4.7	有限多连通域中函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的形式	180
4.8	无限域问题	182
4.9	极坐标	185
4.10	带有一个小圆孔的矩形板	186
	习题	190
第五章	能量法及其他近似方法	191
5.1	近似求解薄板问题的概述	191
5.2	瑞莱—李兹法 (Rayleigh—Ritz)	191
5.2.1	弯曲问题	193
5.2.2	稳定问题	206
5.2.3	振动问题	213
5.2.4	矩形悬臂板的弯曲,稳定和自由振动	219
5.3	伽辽金方法 (Галёркин)	226
5.3.1	弯曲问题	229
5.3.2	稳定问题	233
5.3.3	振动问题	238
5.3.4	弹性基支四边自由矩形板的弯曲、稳定及自由 振动问题	241

5.4	屈列夫斯方法(Trefftz)	250
5.5	最小余能及卡斯提梁努法(Castigliano)	252
5.6	康脱洛维奇法(Конторовиц. л. в)	256
5.7	其他各种限制误差法——加权残值法	269
5.7.1	正交法	269
5.7.2	最小平方误差法	273
5.7.3	试点法	278
5.7.4	试域法	280
5.7.5	矩量法	280
	习题	280
第六章	薄板问题的差分解法	283
6.1	概述	283
6.2	矩形网格上薄板的差分方程式	283
6.2.1	弯曲问题	287
6.2.2	稳定问题	288
6.2.3	振动问题(求自振频率)	288
6.2.4	弯矩、扭矩、横向力及边界上总横向力的差分公式	289
6.3	边界条件及例题	290
6.4	分步差分法	298
6.5	差分法中对若干问题的处理	308
6.5.1	关于集中荷载问题	308
6.5.2	关于变集度分布荷载	309
6.5.3	关于非矩形边界的处理	310
6.6	三角形网格的差分表达式	315
6.7	差分法的误差外插法	320
6.8	松弛法的基本原理及应用	321
6.9	对称性在松弛法中的应用及其他	327
	习题	329
第七章	中厚板问题	331

7.1	板的修正理论——精化理论	331
7.2	Reissner 矩形板的一般解	340
7.3	矩形悬臂中厚板弯曲问题的一般解	342
7.4	相邻边自由另两边任意 支承矩形中厚板问题的一般解	352
7.5	两相邻边固定另外两边任意支承矩形 中厚板问题的一般解	357
7.5.1	另外两边一边固定一边自由	362
7.5.2	另外两边自由	364
7.5.3	另外两边固定	366
7.5.4	另外两边简支	367
7.6	两相邻边固定和自由另外两边任意支承矩形 中厚板的一般解	368
7.7	Winkler 弹性地基上自由矩形中厚板问题	373
	习题	382
第八章	薄板的非线性分析	384
8.1	非线性薄板问题的求解方法	384
8.2	薄板非线性问题控制微分方程及边界条件	384
8.3	薄板非线性问题的变分原理	388
8.4	狭长矩形板	393
8.4.1	精确解	393
8.4.2	狭长矩形板的近似解	399
8.5	可动夹紧边矩形薄板非线性弯曲问题的精确解	403
8.6	可动夹紧边矩形板非线性弯曲问题的伽辽金解	407
8.7	可动简支矩形板的非线性弯曲问题	411
8.8	不可动边界矩形板问题	413
8.9	Winkler 地基上四边自由矩形板的非线性 弯曲问题	415
8.10	不同边界条件矩形板非线性问题的广义伽辽金 解法	421

8.11	矩形板边界有支承梁问题的近似解	425
8.11.1	四边简支矩形板	425
8.11.2	边界夹紧矩形板	430
8.12	摄动法解均布荷载作用下的边界不可动夹紧矩形板	434
8.13	能量变分法的应用	438
8.14	柱坐标中薄板非线性问题的控制微分方程和边界条件	440
8.15	圆板的轴对称问题	442
8.16	中心有集中荷载的圆板问题	451
8.17	在圆板边界上作用有均布力矩的问题	454
8.18	径向可动简支圆板在组合横向荷载作用下的问题	455
8.19	圆板轴对称变形的变分解法	458
8.20	圆板轴对称大变形的伽辽金解法	462
	习题	465
	参考文献	468

第一章 绪 论

1.1 弹性板的概述

任何一个结构及它的一部分,实际上都是一个三维体。但是在分析它们的应力和变形时,并不是经常用弹性力学三维(空间)理论,因为如果这样会带来数学处理上的困难,甚至在很多情况下不能求解。

在材料力学,结构力学中,所研究的杆、柱、梁及其组合,它们都是特殊的三维结构。由于它的某一个方向尺寸远远大于另外两个方向的尺寸,以至于可以用一维问题的分析来代替。弹性平面问题和柱体自由扭转问题,由于其特殊的几何形状及受力特点,可以简化为二维问题来分析。工程中还大量存在着另一类特殊的三维结构,它的一个方向尺寸(厚度)远远小于其他两个方向的尺寸,而且是无曲率的,平直的,这种特殊的三维结构就称作为“板”或“平板”。本书所研究的是厚度为常量 h 的等厚度板。

同板的上下表面等距离的点,所构成的平面称为板的“中平面”或简称为“中面”。中平面在板理论中的作用,同梁理论中的中性轴所起的作用相似。在垂直于中平面方向的荷载(一般称为横向荷载)作用下,板发生弯曲变形,此时中平面变为一个曲面,称为板的“弹性曲面”。中平面同弹性曲面之间,在垂直中平面方向上的距离,称为板的“挠度”。

按板的结构特点(几何尺寸,受力情况等),板可分为厚板、薄板(它又可分为刚性板及柔性板,即小挠度板和大挠度板),薄膜等。这种分类看来似乎是几何上的分类,但实际上,应当说是力学

特性上的分类。

刚性薄板(小挠度薄板或线性薄板)的力学特性,就是在横向荷载作用下,发生弯曲变形,并主要以弯曲变形来抵抗外加的横向荷载。或者说以内力矩及横向剪力同外荷载维持平衡。它的工作性质同梁相似。薄膜则是以沿厚度均匀分布的张力(膜内力)来同外加横向荷载维持平衡。当板的厚度很薄,而横向荷载相当大时,板的工作情况便趋近于薄膜受力状态。一般认为,当挠度大于5倍板的厚度,而仍保持为弹性时,便可以按薄膜进行计算。而柔性板(大挠度薄板或非线性薄板)的工作状态,处于刚性板与薄膜之间。它是以内力矩,横向剪力以及膜内力(包括法向膜内力和切向膜内力)来承担外加荷载。而厚板与薄板之间的差别,同普通梁与高梁之间的差别相似。严格地讲,厚板必须用弹性力学的空间一般理论来分析,但这是相当困难的,不过在薄板理论的基础上,放弃某些假设,还有所谓“中厚板理论”一板的精化理论。

对于薄板,根据它的几何形状特点,可以引进若干假设,使问题大为简化。由于它是在弹性理论基础上又引进若干几何假设,所以板的理论属于“应用弹性力学”的范畴。

本书中将主要研究薄板问题,同时还将介绍板的精化理论一中厚板理论,对应刚性薄板的计算理论称为薄板小挠度理论(线性理论或板弯理论),而柔性板的计算理论称为薄板的大挠度理论(非线性理论)。

当薄板受横向荷载作用时,中平面将发生弯曲而形成弹性曲面,从而在曲面内产生张力,称其为膜内力。所以板中的应力实际上是由两部分组成:一部分是弯曲应力,它沿板的厚度按某种规律变化;另一部分是膜应力,它沿板的厚度是均匀分布的。

如果横向荷载不是很大,板的挠度同板的厚度相比是很小的(例如小于板厚度的 $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{4}$),此时膜内力很小,在考虑弯曲变形时,可以忽略不计,即认为中面无伸缩,这时就可以把它作为刚性板处理。如果横向荷载很大,以至于挠度大到与板的厚度相当,此

时由中面的伸缩所发生的膜内力对弯曲变形的影响就不能忽略不计,即膜内力已承担一部分荷载的作用,薄板的工作状态属柔性板的范围。如果横向荷载继续增大(挠度随之增加),以至于膜内力成为主要承担外荷载的因素,而板的抗弯作用反而可以忽略不计,此时就可以看为薄膜问题。也可以说,如果薄板在横向荷载作用下弯曲时,它的中平面可以看作无伸缩变形,则为刚性板,如必须考虑中平面伸缩变形,则为柔性板。

应当指出,必须通过计算才能将板进行分类。同一块板根据其所受横向荷载的大小,可以弯曲如刚性板,也可能为柔性板,甚至薄膜。当然此时荷载不能使板的材料变形超出弹性范围。

板除有横向荷载作用外,还可能有纵向荷载(或称面内荷载)作用。该纵向荷载也产生膜内(应)力。在薄板的线性理论中,纵向荷载产生的膜应力(此时为弹性理论中的平面应力问题),以及横向荷载产生的弯曲应力,可以看作互不影响,因此,可以应用叠加原理(线性理论的特点)计算板内力。但在柔性板中,纵向荷载对弯曲的影响就不能忽略。

除此而外,还有板的振动问题、稳定问题、基础板问题、各向异性板问题等等。

1.2 弹性板理论的发展简史

这里简要回顾一下弹性板理论的发展过程。

作用在结构上的荷载,可以区分为静荷载及动荷载。在建立基本理论(方程)时,一般总是首先从静荷载作用下的结构开始研究,然后再进一步考虑动荷载的影响。但是关于板的第一次分析和实验研究,却是从板的自由振动开始的。

弹性板理论是属于应用弹性理论的范畴。弹性理论的建立,始于法国工程师、桥梁专家纳维尔(Navier, L. M. H. 1785 年 ~ 1836 年)在 1821 年给出的弹性体平衡和运动微分方程。但是,关于弹性板的探索,却开始于 1766 年,著名科学家欧拉(Euler, L. 1707 年

~1783 年)对薄膜振动的研究。他在描述一个薄膜的振动时,把薄膜当作由两组互相正交,且拉紧的线条组成,从而解决了矩形和圆形薄膜的自由振动问题。他建立了如下的数学表达式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

式中 w 为挠度, A 、 B 为两个常量。欧拉的学生杰克·伯努利 (Jacques Bernonlli, 1759 年 ~ 1789 年, 是著名的伯努利科学家家族的成员之一), 将欧拉的比拟用于板的弯曲问题, 给出方程

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.2)$$

认为横向荷载强度 q , 是由 x 、 y 方向的两组梁来分担。 x 方向梁承担 $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q_x$; y 方向梁承担 $EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_y$ 。而在两梁的交点处有相同的挠度, 且 $q_x + q_y = q$ 。但是伯努利本人也认为这是近似的, 例如不取正交的梁, 则结果不同。同时还可以看到, 两梁截面的交线在变形后将分裂为两条线, 这是由于在板的弯曲问题中, 伯努利的理论仍采用梁理论中的平面假设所致。实际上, 在该理论中忽略了扭转所承担的一部分荷载, 相当于在微分方程(1.2)中未包括板的抗扭刚度。

德国物理学家启拉第 (Chladni, E. F. F.) 于 1808 年秋天, 在做板的振动实验时, 发现了各种自由振动的振型, 这引起了对板理论的极大关注。1809 年他应拿破仑和法国科学院的邀请, 到法国科学院作这一实验的表演, 拿破仑亲自光临, 并在他的建议下, 法国科学院提出资金为 3000 法郎的悬赏题目“探求板振动的数学理论”, 并用实验验证, 1811 年 10 月为应征截止期。许多科学家如拉格朗日 (Lagrange, J. L. 1736 年 ~ 1813 年)、毕奥 (Biot)、拉普拉斯 (Laplace)、勒让德 (Legendre)、富里叶 (Forier, J.)、纳维尔、泊松 (Poisson, S. D.) 都曾试图求解这个问题。但届时只有一人应征, 她就是法国数学家索菲·诺曼 (Sophie Germain, 1776 年 ~ 1831 年)。她是在数学力学领域中历史上两位著名的女科学家之一。她是一

位富商的女儿,曾得到拉格朗日的爱护和支持。她从弯曲变形能的积分式出发,用变分原理得到挠度的微分方程。她设板的弯曲变形能的积分式为

$$A \iint \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 ds \quad (1.3)$$

式中 ρ_1, ρ_2 为弹性曲面的主曲率半径。但是在计算变形能的积分表达式(1.3)时,由于忽略了板中面的翘曲所作的功,而发生错误,未得到正确的微分方程。她于 1811 年、1813 年、1816 年共投寄三篇论文,最后于 1816 年获得这项奖励。然而审查人对她的工作并不满意,曾是审查人之一的著名科学家拉格朗日修正了她的工作,加进了遗漏项,得到一个较满意的方程

$$k \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

这便是通常所说的索菲·诺曼—拉格朗日方程。

弹性理论奠基人纳维尔给出了第一个令人满意的,完整的薄板弯曲理论,列出了板弯曲变形能的正确公式(1820 年提交科学院,1823 年发表)。他以富里叶提出的三角级数理论为依据,给出纳维尔方法(双三角级数法),用于精确求解四边简支矩形板的弯曲问题,并求解了有均布荷载及矩形板中点有集中荷载作用这两种荷载情况。1829 年泊松进一步改进了板的理论,在索菲·诺曼—拉格朗日方程中,他认为常数 k 与板的厚度 h 的平方成比例,并把它推广到静荷载作用下板的弯曲问题,得到微分方程,抗弯刚度 D 的值相当于泊松比 $\nu = \frac{1}{4}$ 。

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.5)$$

泊松还讨论了板的边界条件。对简支边和固定边,他给出的边界条件方程与现在通用的边界条件是完全一样的。但对沿着有已知分布力的边界情况,他要求有三个边界条件(剪力、扭矩和弯矩)。由于板的控制微分方程是四阶的,而一个边界上有三个边界

条件与此是矛盾的。从三个边界条件减为两个边界条件是由克希霍夫(Kirchhoff, G. R. 1824 年 ~ 1887 年)完成的,他是著名科学家牛曼(Newmann, F. 1798 ~ 1895 年)的学生。克希霍夫于 1850 年发表了薄板理论的重要论文,提出了薄板的两个基本假设,确立了板弯理论的基础。他纠正了泊松在边界条件上的矛盾,指出在板的每一边界上只存在两个边界条件。他被公认为是考虑弯曲和拉压联合作用的板理论的创始人。开尔文(Kelvin, L. 1824 年 ~ 1907 年)对有分布力作用的边界上的边界条件,由三个减为两个做了物理上的解释。他应用圣文南(Saint—Venant)原理,认为沿板的边缘可以把扭矩转换为静力相当的等效剪力,这样就使得在边界上只有总剪力和弯矩这两个边界条件。

19 世纪末,列维(Levy, M. 1838 年 ~ 1910 年)研究了对边简支另两边任意支承矩形板问题,提出“单三角级数法”。其后,陆续出版了一些板的专著,如那达依(Nadai, A)的“Elastische Platten”(Berlin, 1925 年);伽辽金(Галёркин, БГ)的“Упругие Тонкие Плиты”(1933 年)等。

对薄板理论做过贡献的科学家,还可以列出很多,如布勃诺夫(Бубнов, И. Г.)、韦司脱高德(Westgard, H. W.)、胡柏(Huber, M. T.)、巴普科维奇 ПАПКОВИИ, д. Ф.)、符拉索夫(Власов, В. З.)、列赫尼茨基(Лехницкий, С. Г.)铁木申科(Timoshenko, S)等等。

当板有较大的挠度时,必须考虑中平面的拉伸,这就是非线性(大挠度)板问题。克希霍夫等首先对这一问题进行了研究,但是由于他们得到的非线性方程很难处理,只能用于最简单的情况。1907 年费耳(Foppl, A.)在一篇论文中对很薄的板非线性方程加以简化。而在 1909 年,冯·卡曼(Von karman)推导出了大挠度板(柔性板)理论的控制(偏微分)方程组的最终形式,这便是著名的卡曼方程组,至今仍被广泛地应用。

在板弯理论(线性理论)中所建立的控制微分方程,根据克希霍夫假设忽略了横向剪切对挠度的影响,因而即使在板很薄时,它也是近似的理论。随着板厚度的增加,剪切的影响逐渐加大,利用