目 录

第零章 《分形图形学》背后的人和事

Benoit B. Mandelbrot

很高兴看到 Heinz-Otto Peitgen 与几个朋友聚在一起，向世人揭示在计算机上绘制分形的秘密。当然，空谈家会宣称分形的每一个分支首次出版会立即揭示相关的每一个秘密。在此，我要重新解释所谈，本书的目的是在不必费力再探讨已知内容的条件下告诉世人如何绘制分形图。

本书无需序言，但被要求写一个。于是，在没有空间限制的前提下，回忆一下《分形图形学》中涉及的一些人和一些观点。这包括为了艺术的艺术和为了科学的艺术。其中的一些回忆甚至可以胜任作为历史或仅仅作为法国人所谓的 Lapetite histoire。正如一些读者所知，对我而言历史是现在的一部分。

也许是作为对这种观念的一个回报，为本书写下关于风景的分形构造的回忆，这使我对所有过去分形的特色不高兴。这些分形构造不能将起伏的地势与河流结合起来。最终，我们对于该缺限以及本书主体描述的分支构造的特性做了一些工作。这些新的方向在后序 A 中概括并在最后一刻增加到本书中。

0.1 分形的前史：Poincare，Fricke，Klein 和 Escher

首先，分形几何起步于 1975 年，但在许多方面重要的是应知道一些现在被冠之于分形的形状已著称好长时间了。但令人奇怪的是在计算机时代以前几乎没有被真正绘制出来。大多数只是自我相似或自我相近，代表着科学出版社的受雇巧匠的无艺术的作品。另外，在 Jean Perrin 的《LesAtomes》中以及 William Feller 的《概率概论》(Introduction to Probability) 中还有机械的和模拟的布朗运动的论述。这些论述帮助我圆了我的梦(正如我在 1982 年出版的《自然分形几何》(The Fractal Geometry of Nature [68])P. 240 中所述)但它们还不完美。分形于 1918 年在 Fatou 和 Julia crica 的工作中产生。但在当时没有任何说明。

但是，Poincare 更早期的作品(大约 1890 年)确实包括了略图。其中两段迥异的动人故事与此后由 Fricke 和 Klein 在 1897 年出版的名为《Vorlesungen uber die Theorie der automorphen Funktionen[43]》中的图解有关。本书的正文和前言出自于 Fricke，R. Robert Fricke 之手。但是(参见 P. vi)伟大的“导师和亲密朋友”Felix Klein，似乎特别愿意将其分加在书名页。图解比正文甚至更出名，他们被无休止地在数学书上再次出版，从而或好或坏地影响着许多数学家的直觉。

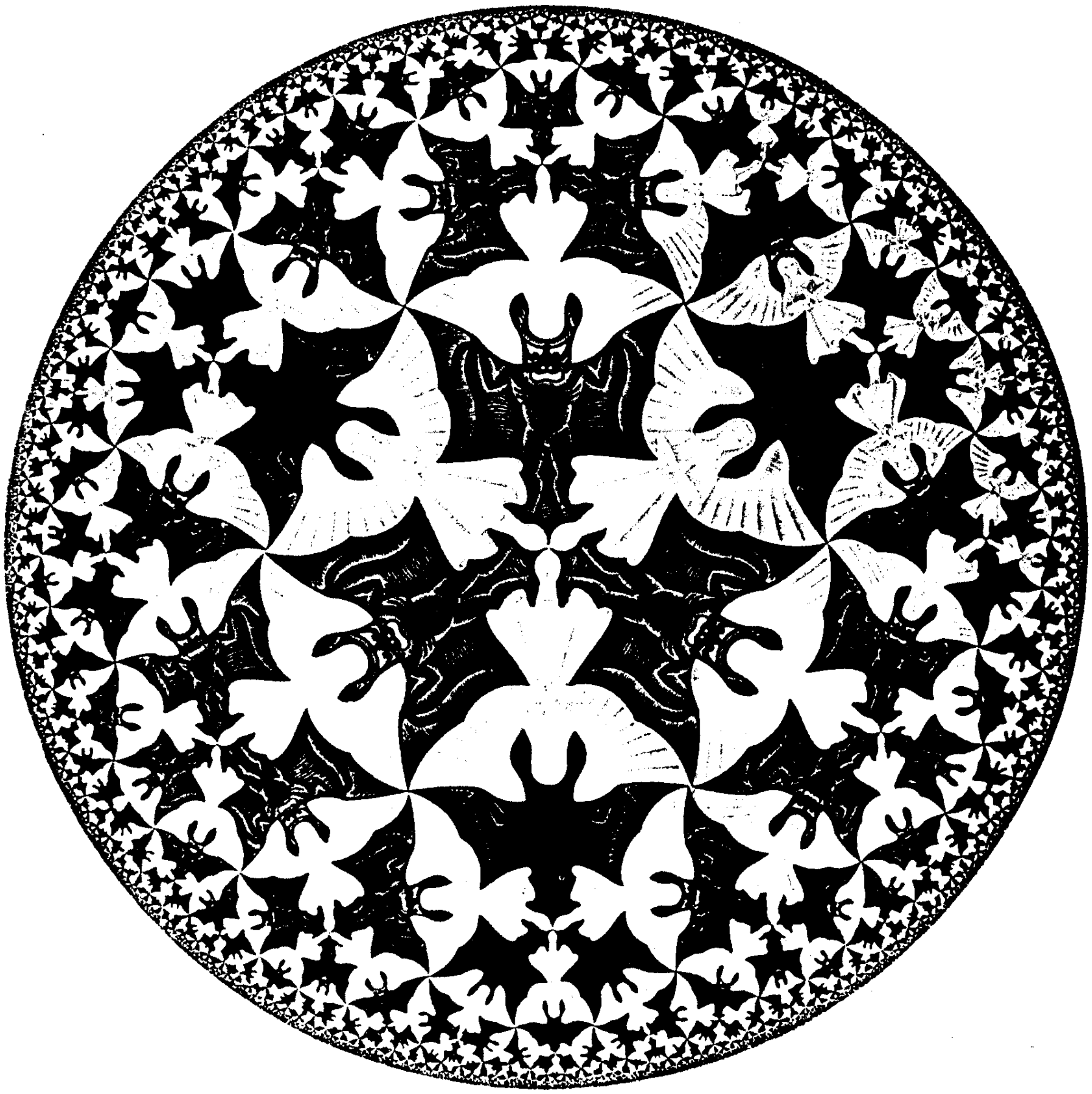

图 0.1 圆周极限 IV

有很强的传言声称在 Braunschweig 的 Tech-nische Hochschule(Fricke 在此教数学)，学习工业绘画绘图的学生将要画出这些图来作为作业甚至作为考试。其某些结果有一些不客气的说明。实际上，我也做了一份工作以弄清某些代表 Kleinian 组的分形性质有限集结果的缺限。这些未定图形的绘制借助于 Poincare 的原始算法。该算法特别慢。甚至对计算机也太慢。但是，1983 年在《The Mathematical Intelligencer》上发表的我的论文[70]对于构造这样

的有限集合给出一个清晰而快速的新算法。作为对某些"西格马"的完善，并且将 Fricke 的图 156 和计算机产生的实际形状用该新算法进行了比较。比较结果在《自然分形几何》(The Fractal Geometry of Nature)的第 179 页中总述。正如预期的那样，实际形状在两者中更细致精美，但并非完全如此：与期望相背的是，并没有那么复杂。我认为它更和谐，可以整体上理解，从而要比拙劣的旧图简单得多。然而，一位著名的数学家(比我早 15 年)看到他的静态振动原则竟被一台计算机击破而深表惊异。

目前更普遍的注意力集中在 Fricke 的"双曲线的棋盘"(hyperbolic tessellations)的绘制。原因是在诸如《The World of M. C Escher》中所见的 Maurits C. Escher 之笔在各种润色后变得极其流行。许多人立即在 Escher 和分形之间构想出了一些"明显而难于描述"的纽带。明白这些润色实际和分形密切相关性是很重要的。实际上，众所周知地，它们由 Poincare 引起，正如 H. S. M. Coxeter1979 年在他的 Leonardo[22]中所详细论述的。看过 Excher 的一些早期著作后，这位著名的几何学家写信给他，并收到了这样的回信："我感谢过你吗？我对这本册子特别高兴并为我的平面图案的两种复制品特别自豪……尽管你的文章[在 1957 年的 Trans. Royal Soc. Canada 中]正文对于象我这样的简单自制的平面图案人太博深，其中一些图解……使我大吃一惊……很长时间以来我一直注意这样的图案，其中每一点从中心向外面的圆形极限逐渐变小，正如你所显示的那样……我努力弄清这个图是如何几何构造的，但我只找到了最大的内接圆的圆心和半径。如果你能给我一个简单的解释……我将会特别高兴并非常感谢你。除此以外还有别的达到圆形极限的系统吗？……无论如何……我将你的模型用到一幅大型木刻画中"。这是他的"圆极限"图，它涉及如他在另一场合所写的那样："这个木刻画《圆极限 I》只是初此尝试，还暴露着各种缺限。"

在他的回信中，Coxeter 告诉 Excher 有无穷多的图案可以用黑白三角形来调色一个 Euclidean 或非 Euclidean 平面。Escher 的略图书表明在完成圆极限 II，III，IV 以前他在努力操完这些观点。他写道："在彩色木刻画"圆极限 III"中，"圆极限 I"的大多数缺限已被排除"。在他的《M. C. Excher 魔镜》(Magic Mirror of M. C. Escher)这本书中，Bruno Ernst 写道："四个中最好的是 1959 年的""圆极限 III"……除了位于圆周的直角上的弧外(正如本来应该的那样，)还有一些弧并不这样放置"。[现在回到 Coxeter]"实际上，所有的白弧应在同一角度，即 80°切开圆周(可以极其准确地完成)这样，Excher 的基于其直觉的作品在无任何计算的条件下很完美，尽管他对该作品的诗一般的描述只是近似的。"

除了这些简短引述外，鼓励读者去阅读 Coxeter 的论文，但只求把握重要部分。正如已阐述的那样，Coxeter 的作品被 Escher 采用了其风格从而使他出名并最终影响着我们当代人中的美学家。而该作品并非是一位艺术头脑的纯粹创造。它们直接出自于 Fricke 和 Klein 之手，并受到 Henri Poincare 的极大启发。它们属于和分形相同的几何空间。还要注意的是，前面的故事只是该论文中两者之一。它论述一个被专门培训为艺术家的人。

0.2 分形在 IBM

迈开系统分形几何发展第一步的(包括其图形字方面)是 IBM T. TWaston 研究中心，我碰巧在这个 IBM 基地参观。从而按历史的顺序，下一步任务是追忆 IBM 的分形工程。

该工程一直是微小科学的例证。实际上，我在 IBM 的 30 年的前 10 年中，该工程缩减到

只有我一个人。从此以后，原则上讲只包括一个程序员；确实很少有重叠，而长期以来是没有程序员的。J. M. Berger 的助手（我在 1962“外借”来的）以及我的工程的第一助理，Hirch Lewitan 均是“职业”雇员，而所有其他的则是新近的研究生或者甚至是短期合同制的大学生。这里有一个按时间顺序在此呆过几月的人的名单：G. B. Lichtenberger（兼职），M. S. Taqqu，J. L. Oneto，S. W. Handelman，M. R. Laff，P. Moldave（兼职），D. M. Mckenna，J. A. Given，E. Hironaka，L. Seiter，F. Guder，R. Gagne 和 K. Musgrave。IBM 研究员助学基金于 1974 年还招来了一位兼职的秘书：H. C. Dietrich，然后是 J. T. Riznychok 和后来的 V. Singh。现在，L. Vasta 是全时专职秘书。

R. F. Voss 自 1975 年以来在他不忙于低温物理时一直是一位难得的朋友（我目前可以这样讲）和亲密的搭挡。数学家 J. Peyriere，J. Hawkes 和 V. A. Notron 以及气象学家 S. Lovejoy（间断地）每人均作了一到两年的博士后访问学者。两个“IBM 人”，水文学家 J. R. Wallis 以及语言学家 F. J. Damerau 作为特邀内部工程访问学者在此呆了短期时间。至于设备，除了胶片投影仪、终端和 PC 计算机以及充分但不浪费的计算时，我的工程自 1983 年以来还借了一台高质量胶片记录机。自然，我的工程之外的个别 IBM 同事也偶尔短期做些分形方面的工作。

这些简单单子在付诸印刷时，并无意于赞扬而是早在 1986 年开始有这样的质问：“IBM 在分形研究方面投入了整个研究预算的可观部分”，所以值得详细列出。分形曾在 IBM 成为大科学的奇特感觉将会被广泛地忠实接受，对此该工程的男校友很惊奇也很自豪。但是几乎成为俗夸的事实对于许多现代科学观的观察者来说更有趣。要接受这一点并觉得值得赞赏，应投入来自学术界的学术自由的价码。

0.3 R. F. Voss 的分形山脉

下一步也是令人高兴的任务是告诉大家我如何遇见本书的合作作者以及其他一些与“分形学”的故事相关的人。

1975 年春天，Richard F. Voss 在美国做短期旅行以期找到合适的工作。由于在 Berkeley 的一篇论文，他很快成为 Voss 博士。该论文的内容涉及电子到音乐，但从未离开广泛传播的称之为$\frac{1}{f}$噪音的物理现象（当时空气会令人困惑，今天几乎仍一样令人不得其解）。该噪音的所有涉及分形的方面是我自 1963 年以来的感兴趣课题。我的将在 1975 年 6 月发表的《Les 对象分开》(Les Objets Fractals) 这本书包括了根据从曲线到曲面的$\frac{1}{f}$-噪音推广的原始分形山脉。Voss 的论文中更引人注目的涉及音乐的部分。他发现了有许多和$\frac{1}{f}$-噪音相关的方面。他甚至根据尼罗河流传的历史记录形成了一个为我所深爱的微清唱剧。

于是，在 IBM York 镇我和他谈起了他找工作这个问题，然后我给他提供了一个机会：到这儿来，让我们一起干吧。真正奇妙的某种结果注定会出来的。他真地加入了 York 镇低温组，而且很快我们成为了亲密的合作者和朋友。与普遍认为的相反，他从未参加我的小工程。他在实验物理方面投入了大量时间。无论如何，在关键时刻，他为分形做出了贡献。这是绝对重要的。首先，我们讨论写一本关于$\frac{1}{f}$噪音的书，但是这个工程从未取消（据我所知没

有人完成它)。实际上,每当他偶尔和我一块工作时,总会发现我在进行一些很不同的工作,即翻译并修订《Les 对象分形》。最终结果于 1977 作为《分形》出来了。为准备它,仍不断提出图形学方面的问题。Voss 不断地询问 Sig Handelman 和我在做什么。并不停地问我们能否考虑更好的方法。最后他找到了一个肯定会引起我们充分注意的方法。他设想了一个并不存在的计算机图形系统并带来了当时我们还没有来得及完成的分形图。这些均在《分形》中出现。这也就是序言将他说明为本书中插图的合作作者的原因。

彩图很晚才在 York 镇出来。在这个地方看来只有我们这些分形学家继续在我们的工作中使用高要求的图形学。我们在我的下一本于 1982 年出版的《自然分形几何》中首先采用彩色图。在 1981 年后期,正文已经印出来,而彩色图还未交给出版社。我们使用的胶片录制机是短期租借的,这一事实以及其他的一切将我们逼得奔忙。但我还是挺过来了。既然,“愿望是不受束缚的,而行动是限制的奴隶”([68],P. 38)很快这得到了完善(按 1981 的标准),但这还不够我肯求再进行一天或者一周的工作,我们将会取得不必再完善的结果,当“高原图形”取代了“低质图形”则我们不必再动它了。令我们高兴的是,Voss 将这一切做得很好。

分形的插图作为完全的整体出现。由 Jean-Louis Oneto 和 Sig Handelman 从古老的插图中察觉到的美是一个意外的收获。但是到了 1981 年其美已成熟并值得来自甚至我们这些严格的科学家的重视。同时它也堪称为对我们所花时间的奖赏。从那时起,许多人拿给我们看的分形图形达成百幅,但是在大多数情况下我只对其中很少几幅认真完成的满意。

大家都对 Voss 的图形表示惊奇。真有“百闻不如一见”之感。专家们也想知道这些图形是如何完成的。这是因为他们从未对这样的事实特别注意:Voss 不断地构想出和计算机图形学过程相同的技巧,而这些技巧直到后来才在图形学界建立起来。这就引起了哲人的评论。

多年来一直看着 Voss 从事计算机艺术家和物理学家的工作不断引起我有必要对作为一个科学家在社会和个人方面之间足够重视。成为一名科学家的唯一进步的方法是主要为了自得其乐地从事科学研究的过程。从该过程的公认结果中获得快乐是一件普通得多也完全迥异的事。众所周知的危险是,尽管 dilettare 意思是“在意大利逍遥(delight)”,而其源词 dilettante 却是“轻蔑”(Contempt)的意思。尽管没有几个人声称要成为一个严肃的科学家,但由于受到从工作中获得快乐的激励,没有谁举出我所认为的唯一可以接受的“严肃的快乐主义”的例证来。这就是一个人不将自己最杰出的工作发表或发布出来的意愿,甚至是强迫。尽管他完全知道他能从中获得名利。对于科学巨人这是最简单 不过的一方面,当一个人在并非完全不开化的条件下不能或不愿从事某一领域的工作时,每一位科学家总会是各个事件的主动或被动目击者。当文明的行为既非容易也非不可能时,就会产生真正的验证。根据这些和其他一些令人信服的背景,我认为 Dick Voss(作为图形学专家和物理学家)是我结识的人中最优秀的严肃科学家之一。

0.4 旧胶片

何谓胶片?我们只能以简陋的配备以及仅有的一台由我们制作的旧式胶片制作机(管式 Stormberg-Carlson 4020)来制作胶片。然而,在 1972 年,我们和 Hirsh Lewitan 一起,着手用 Seeded Vniverse 方法制作分形银河系胶片。然后在 1975 年,和 Sig Handelman 一起,我们又

制作了一张其风景被后来的《自然分形几何》作为图 271 采用的胶片。该胶片从深水处慢慢产生,然后慢慢旋转,最后滑回到水下。很快,人们称之为“泛滥”(Flood)顺序。很幸运,最高高度在两个不同点上取得,当这些点还可见时,一个程序设计的错误中止了“泛滥”。我异常高兴,于是我沉迷于这样的评论:根据我的山地分形模型,可以预测 Ararat 山脉有两个峰而非一个。……直到一位直接来自美国的听众如实地报告说该事实在他们国家已家喻户晓。“银河系”以及“Ararat 山脉”系列一起被谑称为“星期日与上帝竞赛”(Competing With the Good Lord on Sunday)。很快它们就显得过时了,而且特别原始,但现在它们很有历史价值,……宝贵的古董。

“泛滥”(flood)以及最近一个由 R. Greenberg 协会完成的 Voss 的一个数据库动画均围绕着同一风景,但没有放大。

0.5 Trek II 星

但是何谓“真正的好莱坞”?“它”很快就认识到了我在 1977 年发表的书上 Voss 的风景插图的潜力,并很快将这些分形的各种形式引入电影。这就导致了对古老的但总有新意的《美人和野兽》的重拍,因为认为电影更关心美而不在于智能,同时也因为对某些分形有所了解的少数科学家(直至这本书出来)还认为分形只不过是怪物野兽。“我们的跨地域的好莱坞”的台柱子是 Alain Fournier,Don Fussell 和 Loren Carpenter。早在 1980 年,我的合作者 John W. van Ness(他已于 1968 迁到 Dallas 的 Texas 大学)请求我对他的 Fournier 的博士论文进行点评。Fournier 和 Fussell 早期曾写信给我们请求 IBM 计划生成分形山脉。但是我们不想为了未发表的计划和律师打交道,而且这还和将要运到别的地方的一批计算机密切相关。于是,Fournier 和 Fussell 独自行动,并很快发现一种比 Voss 计算快得多的替代方法。

很巧这个同一可替换方法也同时被 Loren Carpenter 发现。当时他在 Boeing Aircraft 很快又移到 Lucasfilm,现在在 Pixar。用他在 1984 年 3 月的《大学数学杂志》上的话说:

“当我读到《科学的美国人》中 Martin Gardner 关于这一论题的独创专栏,我就出去并买了《自然分形几何》。我用了一个 2 到 3 倍的放大镜将它浏览了一遍。我发现它比其他任何东西都有启发。我自己所想到的是‘晦,所有就这些,如果我能找到一种构造图形的合理数学模型,我就能造出所有能在其中找出分形的东西的图形。那就是我可以为此激动的原因……

“我所采用的方法是递归分割。对于我们这里讨论的应用它有许多优点。即特别直观,动态改变,局部控制。如果我想将一座房子放在这里,我就办得到。再分割过程涉及将一个大三角形递归分裂为若干小三角形。我们可以调整我们使用的精度。例如,在“Trek 星”中图形并非计算得足够精细,因为这是一个动画序列,东西跑得很快。如果仔细看,你就能看到小三角形,但大多数人看不见。

“Mandelbrot 以及其他一些已从数学观点研究过这些过程的人长期以来一直认为在对这些过程的递归近似,但是真正使用递归近似以造图(这是计算机图形学类型的应用)的思想据我们所知首先由我,Fournier 和 Fussell 于 1979 年提出……

“用分形来合成图形的最大一个问题是控制问题。它们往往失控。它们会随机地在你面前的任何地方出现。如果你想牢牢控制住它,让它像你想要的那样。那就需要一点修补和经验才能做好。还没有很多人知道如何才能这样。”

当还在 Boeing 的时候，Carpenter 就因制作了一部短小的分形电影《Vol Libre》而在计算机图形学圈内出名。后来他被请到 Lucasfilm 准备担任《Star Trek II：The Wrath of khan》中的一个主要角色。该部电影中的一些计算机生成的画面是分形风景画，同时这也称为计算机图形学界的精典之作。最著名的是行星起源的演变序列图。另外一个公司，Digital Productions，后来在《The Last Starfighter》中容进大量的的分形风景画。该部电影并非听说而是我在飞机上亲眼看到过的。我在一个郊区电影院看过《Star Trek》(因为我因公去那儿，我的缺憾也就得到了补偿)。一位同事前一天晚上看过后，他说太糟糕了。其中的分形部分被剪掉了(值得欣慰的是，众所周知，在郊区他们总要剪掉最精彩的部分)。当然，我妻子和我立即看出了分形部分开始的地方，我们很惊奇：如果某些不像我们两个对此事这么投入的人如此容易被骗过，那么大多数人呢？

后来，因 1985 年夏发表的《La Lettre de l'image》被会见时，Carpenter 谈到他的工作受到经费的极大限制："我们付不起两倍的价钱将这些图形质量提高 2%"。我们不想被要求再增加一个数量的百分比以改善质量，但计算机价格确实急剧下降。我们希望未来的正片电影在令数学家们特别满意时使用分形会很便宜。

《美人和野兽》情节的确极为令人高兴，但却将我们带进某种困境，冗长的、空洞的痛苦但却于教益之中。我们很失望电影的无休止的赞誉中从未包括分形这个词，也没有我们的名字。其借口是相关的人都知道的。所以没有必要再说什么。另外，如果我们提到，则律师们恐怕我们会处于"分一份蛋糕"的位置。总的说来世人并不认为科学像我们会对这样的事实听之任之：即他们最杰出的工作(数学大原理和自然规律)没有专利、版权或者保护。科学家们期望的是大众的，而非个人的赞誉。

后来，我们同意采用 Alvy Ray Smith 的"graftal"这个术语。它与"分形"(fractal)的差别几乎不能分辨。

Fournier，Fussell 和 Carpenter 没有在本书中再次出现。很可惜我们对他们还不很了解。他们几乎从不给我们写信，即使在我们可以帮助并特愿意这样做时，无论如何，他们很喜欢按其自然进行他们的工作。

0.6 希腊几何中的中点置换：抛物线的阿基米德构造

我们与"我们的好莱坞"的摩擦产生了一种相互抵触的印象。有人开始认为 Fournier、Fussell 和 Carpenter 的分形在某种程序上并非"真正的分形"。当然，作为分形它们和 koch 曲线一样真。其他有人认为我对"递归再分别"如此的钧誉是为了从"中点置换"(这是不同术语的同一个意思)中为自己捞名。实际上，正如法国人在高级学校几何中教的那样，该程序本身(当然不是分形)的最主要荣誉并不归于那个个人而是阿基米德(公元前 287 年～前 212 年)。尽管参考资料的古老是一种消遣和奇迹，但其他的可以确保他的工作被充分论述。他的伟大的成就之一是算出了抛物线和弦 AB 之间的面积。许多作家认为他的成果是迈向积分学的第一步。将抛物线的方程写为 $y = P(x) = a - bx^2$ 并且取向使得 $b > 0$ 给出弦的端点为 $\{x_A, P(x_A) = a - bx_A^2\}$ 和 $\{x_B, P(x_B) = a - bx_B^2\}$ 阿基米德将 $P(x)$ 递归地插入到 x 值中，该值形成不断小的格子。首先注意到

$$\begin{aligned}
P\left[\frac{1}{2}(x_A+x_B)\right]-\frac{1}{2}[P(x_A)+P(x_B)]= \\
&= a-\frac{b}{4}(x_A+x_B)^2-\left[a-\frac{b}{2}(x_A^2+x_B^2)\right] \\
&= \frac{b}{4}(x_B-x_A)^2 \\
&= \frac{\delta}{4}
\end{aligned}$$

(由 δ 限定)这样,内插的第一步对原来的弦的中点进行向上的 $\frac{\delta}{4}$ 的偏移,即将它换为某个更短的弦。在内插的第二步。$x_B - x_A$ 要小两倍,这样该步要求对每个子弦的中点用等于 $4^{-2}\delta$ 的值来替换,等等。第 k 步要求对 2^{k-1} 弦的中点用等于 $4^{-k}\delta$ 的值来向上替换。当然,抛物线有方程的思想直到笛卡尔创立了分析几何才为人所知。但是,天才的专门论据使阿基米德取得了如上的等于 $4^{-k}\delta$ 的向上置换的规律。

0.7 分形云

正如 Voss 对本节所做的贡献中谈到的那样,他用于产生分形山脉的算法被推广到产生云彩。最终的图形如雷灌耳。但还没有能提供足够真实的天上的云彩。这是我们从 Shaun Lovejoy 的工作中得到的结论。

Lovejoy(后来在 Montreal 的 McGill 大学物理系学习气象学)写信给我并包括大量的他的论文草稿。前半部分涉及雷达观察,没有什么争议足以完成所有要求。但是后半部分涉及将分形映射进片象学。受人委托要研究特别恶劣的天气,于是他向我求助。我的感觉是他的工作显示着很大的前景,但需要时间“使成熟”。(这使我想起我的博士论文。该论文是在 1952 年于匆忙中完成的;由于我急于做博士后从而很久就不太令人感兴趣了。)因此,我给 Lovejoy 的建议是他应先根据他的非争议的工作取得初步结果,然后跟我做博士后。我们争论他不必在意对他的发表物的不可避免的不友好的批评。

我最欣赏 Shaun 的面积一周界流图。这是根据我在 1977 年发表的书中的分形规则得来的。该流图指出了云彩(正如从天顶例如从卫星上看到的那样)垂直的周长是大约4/3的分形尺寸。这个流图是由一篇论文缩减得来的。详细的标题出现在 1982 年的《科学》杂志上。这篇论文也立即出名。Lovejoy 后半部分的许多地方需要更多的工作,最后我开始努力完成。发表在我们合写的论文中的云彩于 1985 年在 Tellus 有了结果,但似乎还没有超过已有的。到那时,Lovejoy 已离我们而去。他对我拒绝再进行在相当程度上已取得成功的工作变得很不耐烦。按我的熟虑的愿望,尽管争议不可避免。但我希望能寻求一种“温和接受”而不是导致不可饶恕牺牲的“勉强接受”。

对于风景画家,云彩似乎是一个严峻的挑战,但是有人却因此扬名。这个人的名字就是 Salomon Van Ruysdael(1602~1670 年)。他想到了一个问题和一段经历。问题是分形几何能否帮助比较 Ruysdael 做的云自然之母的云。那段经历也不在这儿谈论,因为作为画家的工具它不涉及计算机。让我们接着往下谈吧。Elizabeth Carter 是一名在洛杉矶的加利福尼亚大学(VCLA)的 Gorge L. Siscoe 小组中学习气象学的大学生。她的爱好是拍摄云彩。她找到了一种因此取得学术声誉的绝好办法。他们对多种云彩的周长计算其分形大小。该周长是从

几乎水平方向看去得来的。这和 Lovejoy 的从顶向下看是不一样的。他们发现自然云彩的分形大小在未知的大范围内是很复杂的。从事后认识看来，该结果在预料之中：画工选择画出的云是复杂多变的，但并非不可能，从而其云彩的分形大小接近自然云彩的最大值。

0.8 分形树

在进入非线性分形前，先让我领导一个很小的分形小组以在没有打扰正在运行的程序下进行一些初步的测试是合理的。普林斯顿的四年级学生 Peter Oppenheimer 就是为此和我们一起工作了几周。后来他写了一篇关于分形的论文。最后他移到长岛上的纽约工学院并成为分形植物学的专家。如今他面临着来自于 Przemyslaw Prusinkiewicz 的挑战。

绘制非随机的分形树是比较简单的。在《自然分形》中就有几个分形树。但是绘制具有真实稀疏程度的分形树却遇到了极大的困难。因为各分支绝对不能重叠。设想要递归地构造一棵随机树。在没有考虑将要添加分支处的欧几里德邻域时，就不能增加一个分支，即使是很小的分支。

比较起来，空间似乎可以原谅。更准确地说是提供了一种近似于不容抗拒的虚拟。实际上，显示一个在一平面上的分形树的投影的形状并转变思路想象有这样一个投影的空间树。即使原始的空间分支碰巧互交或缠绕，我们也要想象可以分开它们并将它们看成一棵树。

现在回到平面树以及在不必考虑互交的情况下绘制的方法。很自然的方法是 Tom Witten 和 Leonand Sander 采用的方法。它产生于我们认为最可能的方式。不是在寻找特殊效果的过程中而是在寻找对某种网状或树形自然分形目录集的科学理解过程中。Witten Sander 将这种方法称为“发散受限聚集”。极为不幸的是，它没有造成真实的植物树，但它给了我们展望未来的希望。

0.9 迭代：昨日枯燥的数学，今天几乎荒唐的奇妙的新分形形状和“几何超级计算机工程”

现在让我们从模仿山脉、云彩和树的分形进一步转到探讨不能模仿的分形。对于艺术家和外行，它们只不过是近似荒唐的奇妙的形状。

我对于 Julia 集的最初研究是在 20 岁时，当时知道这一集合的为数不多的人称之为 J-集。这段插曲以及我开始对 $Z \rightarrow Z^2 + C$ 迭代的研究均已在对《分形美学》特邀致辞中谈过了，这里就不重复了。

但是在这个序言里我确实想提到的是与 David Mumford 的短期合作。这最终引起了特别有趣而广阔的新进展。

David 的名字正如数学界其他人的名字一样已为我所知。这是因为他在代数几何方面的工作。当我于 1979 年在 Harvard 时我们相遇了。1979 年 11 日他来参加我举办的一个研讨会。在关于迭代的讨论会结束后，他向我奔来：——按照你所说的，你应该也研究 Kleinian 小组；你也许会为他们的有限集找到一种清晰的构造方法。我回答说，实际上对于某个重要的特例我已找到了一种好算法。请到我办公室来，我将给你看。他过来看到了那个最终于 1983 年在《数学智能机》(The Mathematical Inte lligencer)上发表的算法。这在序言前面已谈

过了。——该算法如此简单，Poincare 或者自 Poincare 以前的其他某些人均能看懂。为什么这个发现得等你呢?——因为在我以前没有人用到计算机这个得力的工具！一但是有一个计算机并不能证明什么！——确实，使用计算机是猜想和极意外情况之源。它得出的关于 Kleinian 有限集的猜想很易于证明；而其他的对我则太难了。——那么，你能帮助我学用计算机吗？——特别乐意，但我们得求助于我的最新 IBM 助理 Mark Laff。

不久以后，显而易见 Mumfavd 得在剑桥找较密切的合作者。他为我的课程助教 Peter Moldave 所困扰，于是他开始和 David Wright 一起工作，后来和一名学数学的哈佛研究生。该研究生对此才不隐瞒他在编程技巧方面的特殊才能。最后，Mumford 完全投入于计算机，开始只是作为启发式的工具，后来是为了自己的应用。

在数学家圈中帮助传播将计算机作为工具的意识中他起了很大作用。最终需要发展如此之快以致转瞬间几乎八年后，国家科学基金现在创建了一个几何超级计算机工程！成员包括 F. Almgren (Princeton), J. Cannon (Brigham Young) D. Dobkin (Princeton), A. Douady (ENS. Paris), D. Epstein (Warwick), J. Hubbard (Cornell), B. B. Mandelbrot (IBM 和 Yale), A. Marden (Minnesota, J. Milnor (IAS, Princeton), D. Mumford (Harvard), R. Tarjan (Princeton 和 Bell 实验室) 以及 W. Thurston (Princeton)。冒着听起来滥词的危险，使我承认工程的开展是我生活中的至高点。

下面要谈的关于迭代的主题是我与 Princeton 的 1976 年数学博士 V. Alan Norton 的频繁接触。他从 1980～1982 年在我的小组中做博士后，住在 Yorktown 作为研究人员。他是《自然分形几何》的两个主要"插图者"之一。见本书的详细图画致谢栏。他取得了很大的声誉，这从他的 SIGGRAPH 1982 年上的富丽的四元 Julia 集图形开始。

Norton 还从事《自然分形几何》论文结尾的工作。该结尾论文集还有一个值得详细说明的故事。这些结尾论文(该书的最初印刷没有说明地疏漏了，对该省略我很遗憾)涉及一个产生于分析函数的迭代理论的重要问题，一个由于计算机潜在局限的人工制品以及两个修饰润色。

最初的图形是非受限的，于是 Norton 按照图形的变换，引入一个修饰性的润色。我很喜欢这个结果。不幸的是，尽管受限了，但不适于刚好出现在展开的两页纸上，于是我又进行了另一种更随意的修饰性润色：将图形水平伸展以填满可用空间。

将我带到该图形的严肃数学问题是利用牛顿方法解方程 $\exp(z) = c$。从积分角度讲结果是可能的，但是 Gaston Julia 在 1917 年表示牛顿的方法是研究复杂变量函数的迭代的基础。《自然分形几何》的第十九章探讨 $z^2 + c$ 和其他多项式的迭代，结尾论文讨论超越函数 $z - 1 + ce^{-z}$ 的 iteration(也可参见图 0.2)。

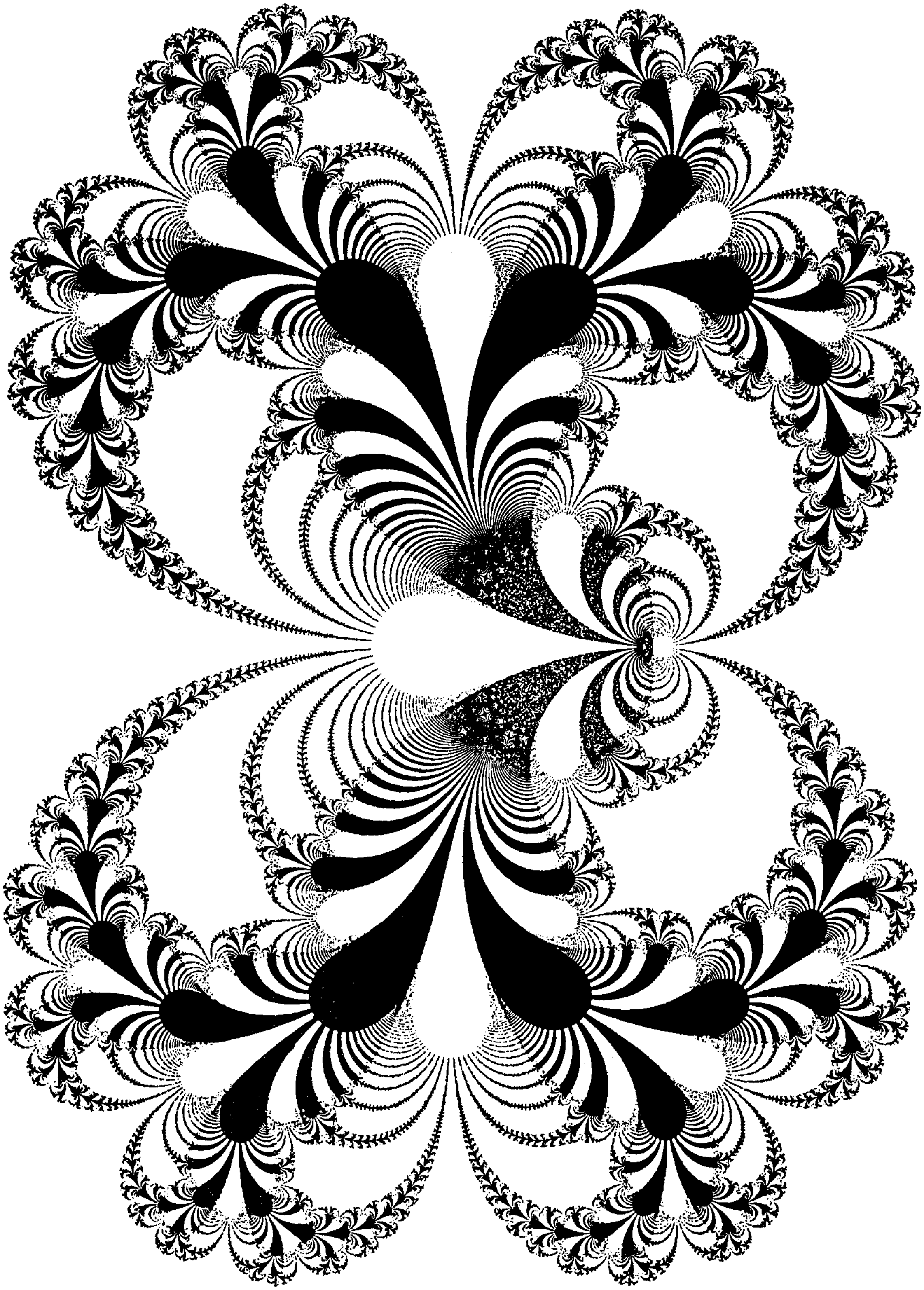

图 0.2 应用到 $e^z = 1$ 的牛顿方法的 Julia 集

Arthur Cayley 于 1879 年在对迭代的先驱的整体研究中，对迭代的兴趣产生于牛顿方法的应用(Peitgen et al 在 1984 年[84]的《数学智能机》中谈到了这段经历并示例说明了这一点)。Cayley 从解 $z^2 = c$ 开始，并接着试解 $z^3 = c$。该方程由于有三个没有找到解决方法的“灰色区域”而难住了他。Julia 于 1917 年发现了许多有关这些区域的事实。John H. Hubbard 向我们出示了他揭示的对相应 Julia 集的最早图形。在 1980 年后期，解 $z^p = c$ 对我们已是自然的事了。然后将 $e^z = c$ 看作 $z^p = c$ 的适当极限，其中 $p \to \infty$。对于这种极限情况我们进行了许多有趣的观察。但当我们转向另一件工作时，该研究还远未完成和发表。

最后的不幸事实是，在《自然分形几何》的结尾论文中，背景和纯彩色区域之间的非分形单边界是人工制品。先验函数的迭代研究很快导致了极大的整数，从而很快达到了内部极限。超过了这个极限计算机就不能正常工作。

0.10 Devaney，Barnsley 与 Bremen《分形美学》

我们认为超越函数的迭代是一个困难而丰富的主题，这一点被几位突出的数学家所证实像 Robert L. Devaney。于是毫不奇怪，人们能从我们的结尾论文和他的漂亮而宽大的示例插图和电影中看到很多相似处。Bob 的关于超越函数的迭代的论文已引起了他的注意。但是直到我们开始因分形《Son et Lumiere 旅游展》而频繁接触才很快成为朋友。

Michael Barnsley 的生活圈也影响着我的生活圈。后来我们因分形而作为邻居在一起。这段时间的悦人背景已在分形记录中，我就不再重复了。我最先在 James Gleick 的《混沌：一个新科学的诞生》这本书中谈到了这一点。它告诉我 Michael 如何会在某天充满着热情和精彩的故事闯进了我的房子。后来，我们在亚特兰大机场开了几次会议。从那以后总是很高兴地跟踪他及其同事的工作。

现在回到《自然分形几何》中的 Julia 和 Mandelbrot 集的图形。在 1984 年的夏天，邮来了刚出版的联邦德国杂志《GEO》5 月刊的时候，我们正开始和作为程序员的 Eriko Hironaka 一起将它们重做成彩色的。但很快意识到我们提议完成的许多工作已被完成了。实际上由 Heinz-Otto Peitgen Peter H. Richter，Dietmar Saupe，Hartmut Jurgens 及其助手在我们打算之外完成了。该小组早于 1984 年发表在《数学智能机》上的较早分形照片一直极受欢迎，但是那些彩色照片却未引起轰动。1984 年的《GEO》上的彩色照片显示了一只精巧而艺术的眼睛和一只有把握的手。看得出已很经验而绝非懒散粗糙之作。它们无疑是追求完美的结果。这种完美早在 Voss 的工作中我已很钦羡而我自己总设法去追求。

我写信给 Bremen 大学《GEO》的作者对他们表示祝贺，告诉了他们的成功所引起的计划上的变化并表示希望能很快见到他们。他们告诉了我正计划的一个分形展览，为此他们正准备一个栏目，该栏目最终形成了《分形美学》这本书。他们让我写出在本前言早些时候提到的稿子。尽管这本书不是由我们完成，但是他们完成了仍令人高兴。当他们于 1985 年 5 月邀请我去 Bremen 为他们的首次展示开幕时，我便结识了这些新朋友。后来我又在其他城市参加了这个展览。从那以后我们见面次数多得难以计数。没有要讲的轶事，只有一些值得记住的愉快的事。

结束语

当我的朋友们组织编写这本主编为 Heinz-Otto 和 Dietmar 的书时，不久前(伤害已完全消失了但记忆在心)我被告知没有人愿意看我早期的图片，即使只几分钟。这个未来新潮流的先驱还没有一个随从者。后来(在过去的记忆中相当漫长，而现在的观点则几乎是转瞬间)分形被广泛引起注意以致于 SIGGRAPH 也开始有分形专题，接着是整日的分形课程。SIGGRAPH 点的首次临时分形专题在我的指导下于 1985 年出台，第二次则是于 1986 年在 Peter Oppenheimer 的指导下，1987 年的第三次则产生了目前这卷书。

本书会是分形主题的终结吗？我想不是的，由于本书的起源，几位突出的作者被忽略掉了。以我自己的经历，即写序言这一举动足以使我明白许多新的待开拓的方向。这些将要被广泛地反复谈到。让我们都对这本书给予祝贺。

第一章 自然界中的分形:从描绘到仿真

Richard F. Voss

Mandelbrot 的分形几何为自然界中的许多表面复杂的形状提供了一种描述和数学模型。诸如海岸线、山脉、云彩这样的形状按传统的欧几里德几何难以描述。但是,随着大小的变化,它们常具一种特别的简单不变性。这种统计的自相似性是自然界中分形的基本特性。它也许可用一个分形维数表征。表示这个维数的数和我们对维数的直观概念一致,但不必一定是一个整数。在 1.1 节中,计算机产生的图形通过强调自相似的重要以及引入分形维数的概念而被用于为分形(相对于欧几里德的)形状建造视觉直观。这些分形构造也揭示了分形和自然形状之间的密切联系。1.2 节简要总结了自然科学中分形的用法。1.3 节用分形布朗运动作为原型提供了一个更形象的数学描述。并将回顾自相似性和自联系性之间的差别。最后,1.4 节将讨论独立分割、傅里叶滤波、中点置换、连接随机加法和 Weierstrass-Mandelbrot 随机函数。这些均作为随机分形的特定生成算法。许多数学细节和对估算分形维数的各种方法与难点的讨论将留待结论性的 1.6 节。

1.1 分形的形象概述:海岸线、山脉和云彩

分形的要素如图 1.1 所示。这是从环行的飞行器上连续看到的分形行星。在选择合适的着陆地点时,如图 1.1 左上角所示的部分最初景象被放大 4 倍以形成中上部图像。类似地,每个后续的图像表示对前幅图像海岸线的被选部分(如白框所指示)的放大。最后一直放大到如中下图所示的 10^7 多倍。这么高的放大倍数可以和在左下部分重复出现的最初图像比较。尽管这两幅在比例上相差 10^7 多倍的图像不相同,但它们似乎有如此多的相同特性以致于难于相信它们是相同放大率下同一幅风景图的不同部分。目标的被放大部分与整体的或相互相似或相同的特性称之为自相似性。这正是分形的特征,也正是它将分形和更传统的欧几里德形状分开。(欧几里德形状从总体上讲在放大后会更平滑)。

图 1.2 表示了另一幅计算机产生的构造。其三个基本分形形状,即前景风景、坑洼分布,布朗运动是在一个背景上升起的球上的概括。这些均且有这个自相似特性。这些形状的每一个放大集均体现了整体。这些计算机产生的分形几何原语强烈地唤起真实世界。这一事实是对自然中其重要性的一个宝贵线索。

根据伽里略的说法(1623)

哲学被写进这本宏大的书里(我意指宇宙)。它以可被我们连续观察的形式存在,但是除非你先学会理解所写的语言,否则它就不可被理解。它被以数学的语言写成。其特征是三角形、圆形和其他几何图形。没有这些几何不可能理解其中的任何一句话。没有这些,你只能在黑暗中徘徊。

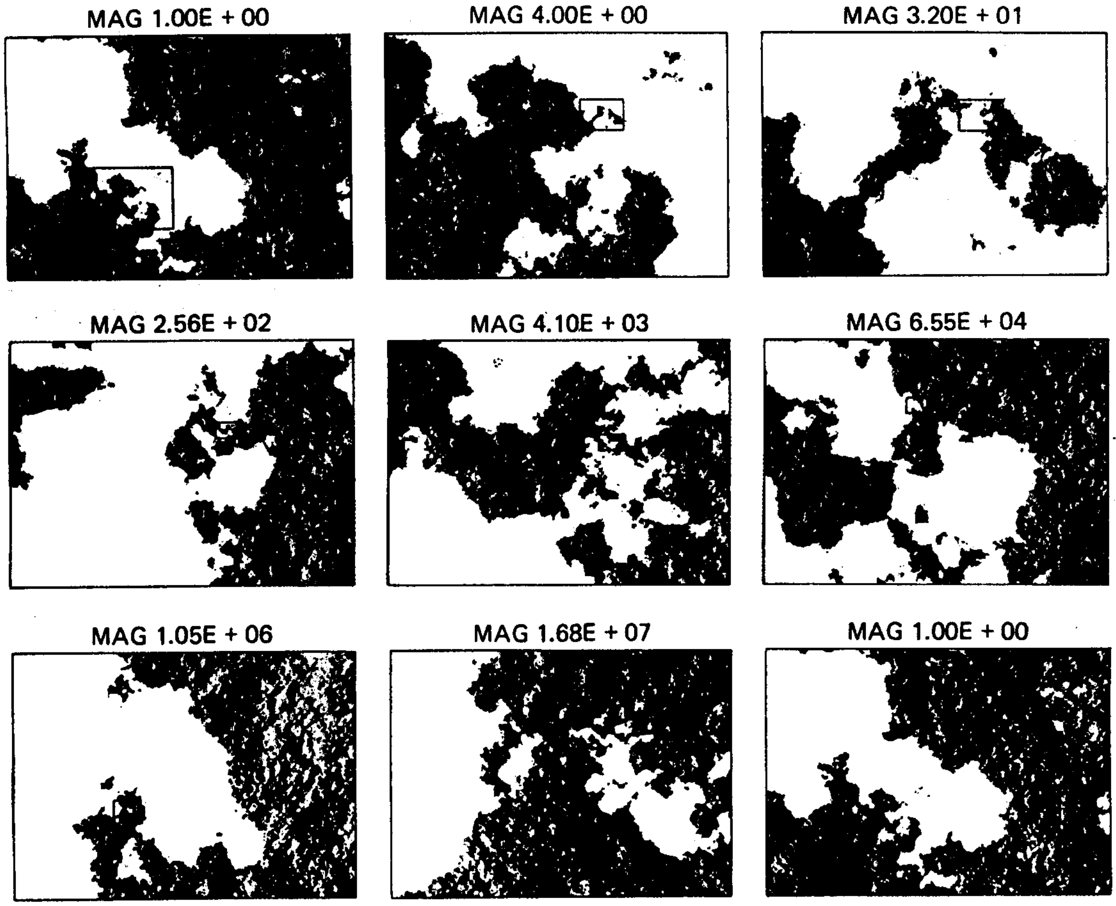

图 1.1 一个统计的自相似分形风景 $D=2.2$ 的海岸线全景序列每个相邻的下一幅图片是对前一幅的被框住部分的放大，当表面被放大时，一个部分与一个大些的部分相似但不完全相同。整个放大倍数为 16 兆。

在这个引述中，伽里略举出了现代西方科学的基本原则。首先，要理解或仿真自然，你必须熟悉其语言。其次，自然的语言是数学，而几何是描述、操纵和仿真形状的特定语言。相对而言，显而易见，“云彩不是球，山脉不是锥，海岸线不是圆，树皮不光滑，光也不是以直线传播”(Mandelbrot[68])幸运的是，现在有一个新方言，一个新的数学分支，这对于现实世界(分形几何)的不规则形状是合适的。这正如 Benoit Mandebrot 所孕育和建造的。