高等学校工程专科教材

高等数学

下册

主编 盛祥耀 副主编 潘鹊屏

高等教育出版社

高等学校工程专科教材

高等数学

下册

主编 盛祥耀 副主编 潘鹄屏

编者 汪瑶同 钱翼文 王庚生 潘鹄屏

黄奕佗 邢文斗 章 平

高等教育出版社

目　录

第八章　向量代数　空间解析几何

空间解析几何是用代数的方法研究空间图形的一门数学学科，它在其它学科特别是工程技术上的应用比较广泛。此外，我们在讨论多元函数微积分时，空间解析几何也能给多元函数提供直观的几何解释。因此在学多元函数的微积分之前，先介绍空间解析几何的知识。

向量代数在后继课程和工程技术中有着广泛的应用。本章首先介绍二、三阶行列式并建立空间直角坐标系，然后引进向量及其代数运算，最后以向量为工具来研究空间解析几何。

第一节　二阶及三阶行列式 空间直角坐标系

一　二阶及三阶行列式

1．二阶行列式

我们从解二元一次方程组入手。设二元一次方程组为

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

以b_2乘第一个方程，b_1乘第二个方程，然后由第一个方程减去第二个方程，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$$

同法消去x，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

当$a_1b_2-a_2b_1\neq0$时，方程组的解为

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

为了便于记忆，我们把$a_1b_2-a_2b_1$记作

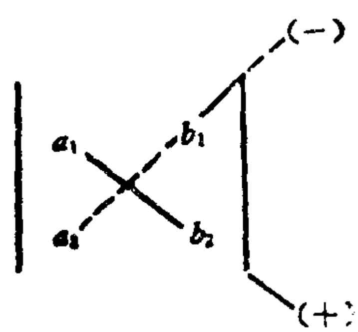
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

这就叫二阶行列式a_1、b_1、a_2、b_2叫做行列式的元素，行 列式中横排叫做行，纵排叫做列，二阶行列式含有两行两列。

二阶行列式的值是两项的代数和。这两项可以按下图所示来记忆：一项是实线上的两个元素的乘积，取正号；另一项是虚线上的两个元素的乘积，取负号。



例如，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-(-2)\times3=8,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 13 \end{vmatrix}=2\times13-0\times(-1)=26,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

利用行列式，二元一次方程组的解可以表示成：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

分母中的行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$是由方程组（1）中$x$、$y$的系数按原来次序排列成的，称为方程组的系数行列式，记为D。

行列式$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$是把系数行列式中$x$的系数$a_1$、$a_2$换成方程组（1）右端的常数项$c_1$、$c_2$而成的行列式，记为$D_x$。

行列式$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$是把系数行列式中$y$的系数$b_1$、$b_2$换成常数项$c_1$、$c_2$而成的行列式，记为$D_y$。

所以，二元一次方程组（1）的解又可表示为：

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}\text{（其中}D\neq 0\text{）。} \tag{8.1.1}$$

例1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ 5x-4y-6=0. \end{cases}$$

解 原方程组即为

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x-4y=6. \end{cases}$$

因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-23$，$D_x=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=-46$，$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-23$，所以

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-46}{-23}=2,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-23}{-23}=1.$$

2．三阶行列式

同样，从解三元一次方程组中引入三阶行列式。

设三元一次方程组为

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

用消元法可得到

$$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3)x$$
$$=d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3.$$

为了便于记忆，我们把上式中x的系数记作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

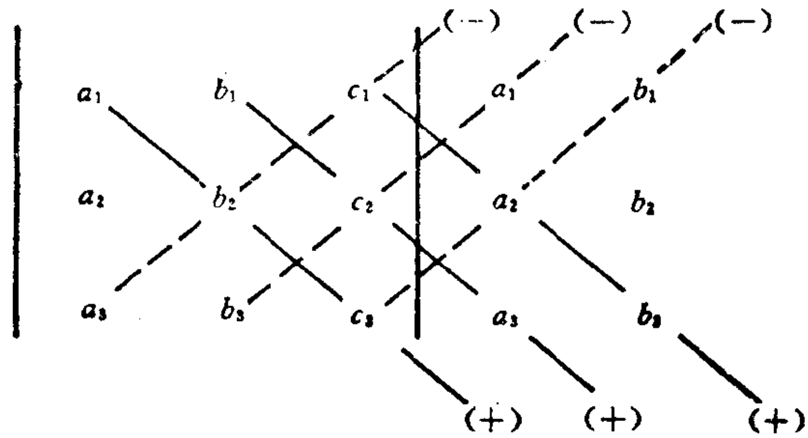
即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2$$
$$-a_2b_1c_3.$$

这就是三阶行列式。其中a_i，b_i，c_i($i=1$，2，3)称为行列式的元素，横排称为行，纵排称为列。

三阶行列式的计算可依下表进行：实线上三个元素的连乘积取正号，虚线上三个元素的连乘积取负号。

即



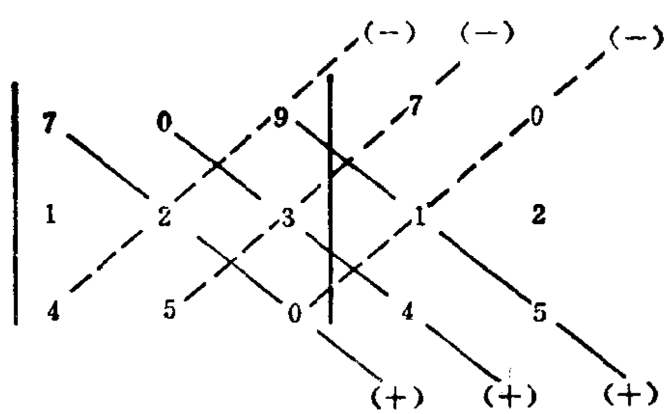
这样，三元一次方程组的解，可用三阶行列式表 示，当$D \neq 0$时，

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}. \tag{8.1.2}$$

其中 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 称为方程组的系数行列式，D_x、D_y和D_z是系数行列式中x、y和z的系数依次分别换成方程组（2）右端的常数项而成的行列式。

例2 计算行列式$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$的值。

解



$=7\times2\times0+0\times3\times4+9\times1\times5-4\times2\times9-5\times3\times7-0\times1\times0$

$=-132.$

例3 解方程 $\begin{vmatrix} 2+x & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ x+5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=0.$

解

$$\begin{vmatrix} 2+x & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ x+5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=(2+x)\cdot5\cdot2+(-3)\cdot3\cdot(x+5)$$

$$+1\cdot1\cdot(-4)-(x+5)\cdot5\cdot1-(-4)\cdot3$$

$$\cdot(2+x)-2\cdot1\cdot(-3)$$

$$=8x-24.$$

所以原方程为

$$8x-24=0,$$

解之，得

$$x=3.$$

根据行列式定义，三阶行列式也可以用二阶行列式表示．其具体表达式如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1$$

$$-c_3a_2b_1$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3$$

$$-a_3b_2)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

因此，三阶行列式可以借助于上面的结果进行计算．例如，例2中的行列式可按如下方法计算：

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 9\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7\cdot(-15) + 9\cdot(-3) = -132.$$

这与前面计算的结果是相同的.

二　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间定点O作三条互相垂直的数轴，它们都以O为原点，并且通常取相同的长度单位．这三条数轴分别称为x轴、y轴、z轴．各轴正向之间的顺序通常按下述法则确定：以右手握住z轴，让右手的四指从x轴的正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向y轴的正向，这时大姆指所指的方向就是z轴的正向．这个法则叫做右手法则(图8-1)．这样就组成了空间直角坐标系．O称为坐标原点，每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面，简称为坐标面．x轴与y轴所确定的坐

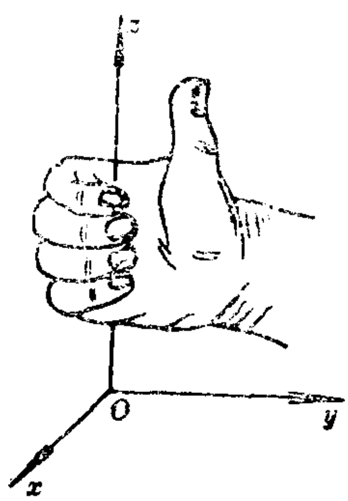


图　8-1

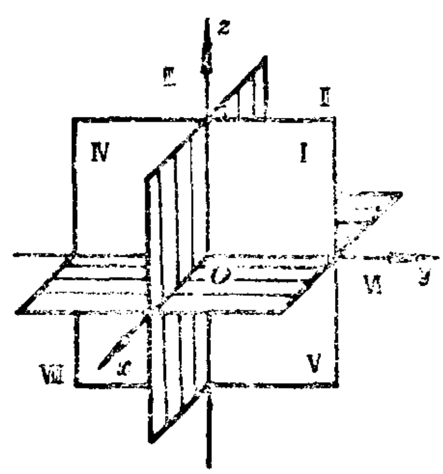


图　8-2

标面称为xy坐标面．类似地有yz坐标面、zx坐标面．这些坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限(图8-2)．x、y、z轴的正半轴的卦限称为第Ⅰ卦限，从第Ⅰ卦限开始，从Oz轴的正向向

下看，按逆时针方向，先后出现的卦限依次称为第II、III、IV卦限；第I、II、III、IV卦限下面的空间部分依次称为第V、VI、VII、VIII卦限。

设M为空间的一点，若过点M分别作垂直于三坐标轴的平面，与三坐标轴分别相交于P、Q、R三点，且这三点在x轴、y轴、z轴上的坐标依次为x、y、z，则点M唯一地确定了一组有序数组x、y和z。反之，设给定一组有序数组x、y和z，且它们分别在x轴、y轴和z轴上依次对应于P、Q和R点，若过P、Q和R点分别作平面垂直于所在坐标轴，则这三张平面确定了唯一的交点M。这样，空间的点就与一组有序数组x、y、z之间建立了一一对应关系（图8-3）。有序数组x、y、z就称为点M的坐标，记为$M(x, y, z)$，它们分别称为x坐标、y坐标和z坐标。

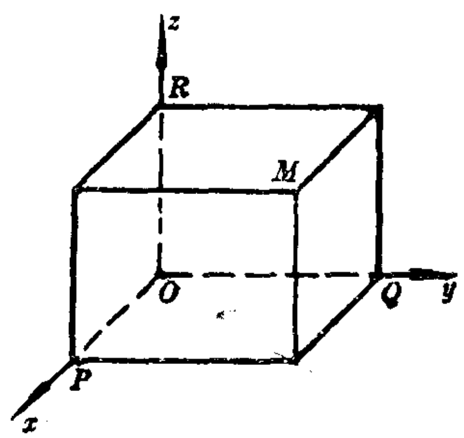


图 8-3

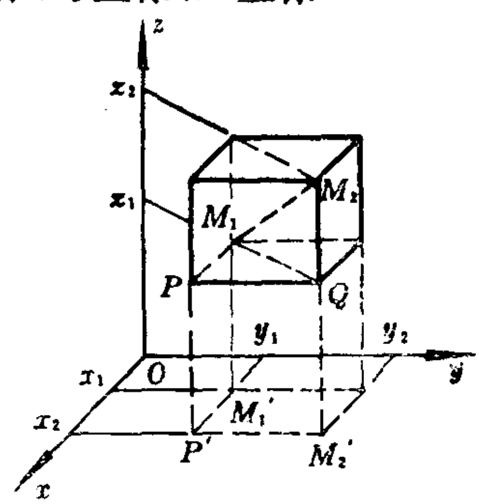


图 8-4

显然，原点O的坐标为(0, 0, 0)，坐标轴上的点至少有两个坐标为0，坐标面上的点至少有一个坐标为0。例如，在x轴上的点，均有$y=z=0$；在xy坐标面上的点，均有$z=0$。

2．两点间的距离公式

设空间两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求它们之间的距离$d=|M_1M_2|$。过点M_1、M_2各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图8-4所示的长方体。易知

$$d^2=|M_1M_2|^2$$

$$= |M_1Q|^2 + |QM_2|^2 \quad (\triangle M_1QM_2\text{是直角三角形})$$
$$= |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 (\triangle M_1PQ\text{是直角三角形})$$
$$= |M'_1P'|^2 + |P'M'_2|^2 + |QM_2|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

所以

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8.1.3)$$

特别地，点$M(x, y, z)$与原点$O(0, 0, 0)$的距离

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.1.4)$$

例4 已知$A(-3, 2, 1)$, $B(0, 2, 5)$. 求$\triangle AOB$的周长.

解 由公式(8.1.3)可得

$$|AB| = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-2)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

由公式(8.1.4)可得

$$|AO| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$
$$|BO| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

所以，$\triangle AOB$的周长

$$l = |AB| + |AO| + |BO| = 5 + \sqrt{14} + \sqrt{29} \approx 14.$$

习 题 8-1

计算1—4题行列式的值.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 4a-5b & 2b \\ -6a & -3b \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

利用行列式解5—8题中的方程组.

5. $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y - 10 = 0, \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + z = 1, \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x - y - z = 1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$

9. 在空间直角坐标系中，作出点$A(3, 1, 2)$和点$B(2, -1, 3)$，并写出它们关于：(1)各坐标面，(2)各坐标轴，(3)原点的对称点的坐标.

10. 一立方体的一个面放置在xy坐标面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在x轴和y轴上，已知立方体的边长为a，求各顶点的坐标.

11. 求点$M(4, -3, 5)$到(1)坐标原点，(2)各坐标轴，(3)各坐标面的距离.

12. 试证以$A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

13. 在z轴上求与点$A(-4, 1, 7)$和$B(3, 5, -2)$等距离的点.

14. 在xy坐标面上找一点，使它的x坐标为1，且与点$(1, -2, 2)$和点$(2, -1, -4)$等距离.

15. 在yz坐标面上求与三已知点$A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$和$C(0, 5, 1)$等距离的点.

第二节　向量及其坐标表示法

一　向量的概念

在物理学中，我们已经遇到过既有大小又有方向的量，如力、位移、速度、加速度等. 这类量称为向量，或称为矢量.

我们常用有向线段来表示向量. 以A为起点、B为终点的有向线段所表示的向量，记为$\overrightarrow{AB}$(图3-5). 也可用一个拉丁字母上面加一个箭头或用一个黑体字母来表示向量，如向量$\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$或$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$等等.

向量$\boldsymbol{a}$的大小称为该向量的模，记作$|\boldsymbol{a}|$；模等于1的向量称为单位向量，与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量记为$\boldsymbol{a}^0$；模等于0的向量称为零向量，记为0，其方向不定.

我们规定，两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不论起点是否一致，如果其方向相同、模相等，则称它们是相等的. 记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即经平行移动后，

两向量完全相重合．允许平行移动的向量称为自由向量，本书所讨论的向量均为自由向量．

在物理学中，如果有两个力F_1、F_2作用在同一质点上，则它们的合力F可按平行四边形或三角形法则求得．同样的方法也可用于研究速度的合成．由此启发我们考虑如何定义向量的加法．

定义1 设有两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的对角线所表示的向量(图8-6)，称为两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这就是向量加法的平行四边形法则．

图 8-5

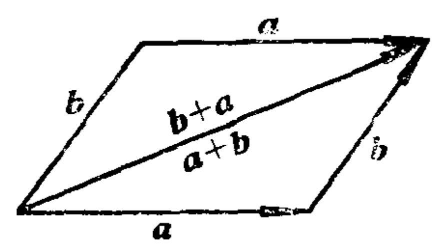


图 8-6

由图8-6可以看出，若以向量$\boldsymbol{a}$的终点作为向量$\boldsymbol{b}$的起点，则由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量也是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量．这是向量加法的三角形法则．这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形．

从图8-6、8-7可以看出：向量的加法满足交换律和结合律．即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

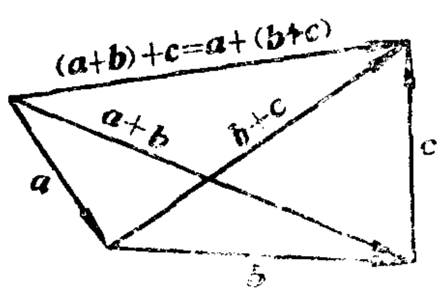


图 8-7

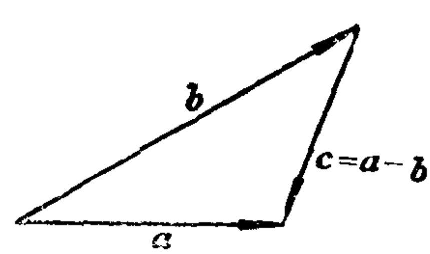


图 8-8

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

根据向量加法的三角形法则，若向量b加向量c等于向量a，则称向量c为a与b之差，记为$c=a-b$(图8-8)。

下面，我们给出数量与向量乘积的定义.

定义2 设a是一个非零向量，λ是一个非零实数，则a与λ的乘积λa仍是一个向量，记作λa，且

（1） $|\lambda a|=|\lambda||a|$；

（2） λa的方向$\begin{cases}\text{与}a\text{同向，当}\lambda>0,\\ \text{与}a\text{反向，当}\lambda<0.\end{cases}$

如果$\lambda=0$或$a=0$，规定$\lambda a=0$。

容易验证，数乘向量满足结合律与分配律，即

$$\mu(\lambda a)=(\mu\lambda)a,$$

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,$$

$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a.$$

其中，λ、μ都是数量.

设a是非零向量，由数乘向量的定义可知，向量$\dfrac{a}{|a|}$的模等于1，且与a同方向，所以有

$$a^0=\frac{a}{|a|},$$

因此任一非零向量a都可表示为

$$a=|a|a^0.$$

二 向量的坐标表示法

向量的运算仅靠几何方法研究有些不便。为此需将向量的运算代数化。下面先介绍向量的坐标表示法。

在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量分别记为i、j、k，称为基本单位向量。