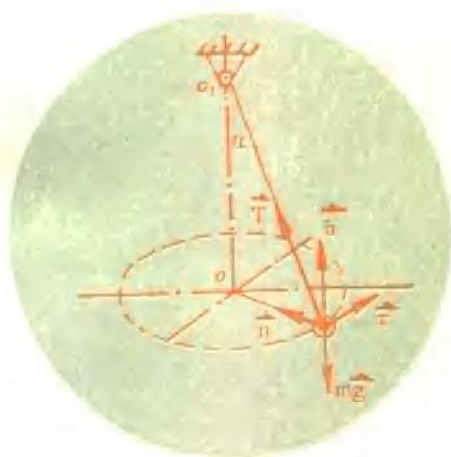




自学函授基础课教材

自学函授理论力学(下)

李树焕 杨来伍 戴泽墩 编



北京工业学院出版社

自学函授理论力学(下)

李树焕 杨来伍 戴泽墩 编



北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书系《高等工业学校基础课自学函授教材》之一。全书分上、下两册。上册包括静力学和运动学，下册为动力学。为便于自学，本书在各章前面都写有内容提要，明确指出了本章所要研究的问题和所需要的预备知识。在各节的后面附有思考与练习题。各章后面附有学习指导和综合性的习题，题后给出了答案。

自学函授理论力学(下)

李树焕 杨来伍 戴泽墩 编

*

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京市通县向阳印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 13.125印张 281千字

1986年8月 第一版 1986年8月 第一次印刷

印数：1—10,500册

统一书号：15434·39 定价：2.20 元

下 册 目 录

第三篇 动力学

引言	(1)
第十三章 质点动力学基本方程	(3)
§13-1 动力学基本定律	(3)
§13-2 质点的运动微分方程	(7)
§13-3 质点动力学的两类基本问题	(9)
本章学习指导	(27)
习题	(30)
第十四章 动量定理	(36)
§14-1 质点和质点系的动量	(37)
§14-2 力和力系的冲量	(42)
§14-3 质点和质点系动量定理	(46)
§14-4 稳定流流体对管道的附加动压力	(57)
§14-5 质心运动定理	(62)
*§14-6 变质量质点的运动微分方程	(71)
本章学习指导	(75)
习题	(78)
第十五章 动量矩定理	(82)
§15-1 质点和质点系的动量矩	(82)
§15-2 刚体的转动惯量·惯性主轴	(98)
§15-3 质点和质点系动量矩定理	(110)
§15-4 刚体绕定轴转动微分方程	(122)
§15-5 质点系对质心动量矩定理	(128)

§15-6 刚体的平面运动微分方程·····	(131)
*§15-7 刚体绕定点转动的欧拉动力学方程·····	(138)
本章学习指导 ·····	(142)
习题 ·····	(147)
第十六章 动能定理 ·····	(156)
§16-1 质点和质点系的动能·····	(157)
§16-2 力的功·····	(162)
§16-3 质点和质点系动能定理·····	(171)
§16-4 功率·功率方程·机械效率·····	(185)
§16-5 势力场·势能·机械能守恒定律·····	(190)
§16-6 基本定理的综合应用举例·····	(199)
本章学习指导 ·····	(206)
习题 ·····	(209)
第十七章 达朗伯原理 ·····	(222)
§17-1 惯性力及达朗伯原理·····	(222)
§17-2 刚体惯性力系的简化·····	(227)
§17-3 定轴转动刚体的轴承附加动反力·····	(241)
本章学习指导 ·····	(248)
习题 ·····	(250)
第十八章 虚位移原理 ·····	(258)
§18-1 约束·自由度和广义坐标·····	(258)
§18-2 虚位移的概念·····	(262)
§18-3 约束力和理想约束·····	(269)
§18-4 虚位移原理·····	(270)
§18-5 应用虚位移原理求约束反力·····	(277)
§18-6 以广义坐标表示质点系的平衡条件·····	(280)
本章学习指导 ·····	(287)

II

习题	(289)
第十九章 动力学普遍方程和拉格朗日方程	(296)
§19-1 定常约束和非定常约束	(296)
§19-2 动力学普遍方程	(300)
§19-3 拉格朗日方程	(304)
本章学习指导	(320)
习题	(323)
第二十章 碰撞	(330)
§20-1 碰撞问题的特征·碰撞力	(330)
§20-2 两球的正碰撞·恢复系数	(332)
§20-3 碰撞过程动能的损失	(339)
§20-4 碰撞过程质点系的动量定理和动量 矩定理	(342)
§20-5 撞击中心	(349)
本章学习指导	(351)
习题	(353)
第二十一章 单自由度系统的机械振动	(356)
§21-1 振动系统的力学模型	(356)
§21-2 质量——弹簧系统的自由振动	(358)
§21-3 单自由度保守系统在平衡位置附近 的微振动	(367)
§21-4 阻尼对自由振动的影响	(375)
§21-5 单自由度系统的受迫振动	(386)
§21-6 隔振的概念	(397)
本章学习指导	(403)
习题	(405)

第三篇 动力学

引 言

静力学研究了作用于物体的力系的简化和力系平衡的条件。运动学从几何的角度研究了描述物体机械运动的各种方法。要弄清物体在不平衡力系的作用下将如何运动，就必须进一步**研究作用于物体的力和物体机械运动之间的关系，从而建立物体机械运动的最一般规律**。这就是动力学所要研究的课题。

动力学的形成和发展是与社会生产力的发展密切联系的。随着现代工农业和科学技术的发展，近代工程技术仍在不断地给动力学提出各种形式的新课题。例如，高速旋转机械的动平衡、振动和稳定；结构在冲击力的作用下和各种振动条件下的动态响应；控制系统中的动态特性分析以及各种飞行器的运动轨道、飞行姿态等为动力学理论的应用和发展开辟了极为广阔的前景。

动力学研究的力学模型是**质点**和**质点系**。

在运动学中，我们曾将某些实物抽象为没有大小和质量，但在空间却占有其确定位置的几何点。在动力学中，由于要研究这种几何点的运动和所受外力之间的关系，所以必须考虑它的质量。**质点就是具有一定质量而无大小的几何点**。当忽略物体的大小并不影响所研究的结果时，即可将物体抽象为质点。例如当研究行星绕太阳运动的轨道时，就可

以视行星为质点。当研究任何平动物体的运动规律时，也都可将这种物体视为质点。

质点系(简称质系)是有限或无限个质点集合。凡是不能抽象为一个质点的物体都可视为质点系。这是力学中最普遍的力学模型。例如刚体、弹性体和流体都可抽象为质点系。一个物体上任意两点之间的距离如果始终保持不变，则可视该物体为**刚体**。

本书重点研究质点系特别是刚体的动力学问题。

第十三章 质点动力学基本方程

内容提要 本章先复习做为动力学基础的牛顿三定律，然后着重介绍应用质点运动微分方程解决质点动力学两类问题的方法。学习本章前，读者应着重掌握好运动学中关于点的加速度的表达法，特别是用直角坐标和弧长坐标的表达方法。此外，要求读者对二阶常系数微分方程的积分和一般解有一个初步的了解。

§13-1 动力学基本定律

牛顿(1642—1727)在总结前人，特别是伽里略和惠更斯等人研究成果的基础上，提出了做为动力学基础的牛顿运动三定律。

第一定律(惯性定律): 质点如果不受力的作用，则将保持其运动状态不变，即保持静止或匀速直线运动。

质点总是力图保持其原有运动状态是质点固有的属性，这一属性称为质点的**惯性**。因此，质点的静止或匀速直线运动又称为质点的**惯性运动**。

第一定律说明，质点作惯性运动的条件是质点不受力的作用。实际上，不受力的质点是不存在的。这里所指的不受力，应该理解为质点受一个平衡力系的作用。因此也可以说，质点作惯性运动的条件是质点受一个平衡力系的作用。这就是静力学中所得出的结论。

如果质点受到一个不平衡力系的作用，质点的惯性运动状态将发生改变，即产生加速度。加速度和所受力之间的定量关系将由第二定律给出。

第二定律(力与加速度之间的关系的定律)：质点的质量与其加速度矢的乘积，等于作用于质点上的力矢，即

$$ma = F \quad (13-1)$$

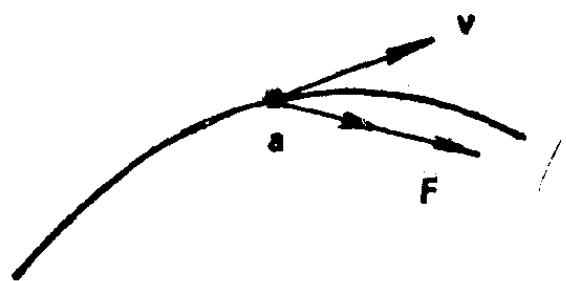


图13.1

式(13-1)是第二定律的数学表达式，它是质点动力学的基本方程，给出了质点的加速度、质量和所受力之间的定量关系(图13.1)。

实践证明，如果质点同时受到几个力的作用，则质点的加速度等于各个力单独作用时所产生的加速度的矢量和。这一结论称为**力的独立作用原理**。根据这一原理，第二定律又可写为

$$ma = \sum_{i=1}^n F_i \quad (13-2)$$

即质点的质量与加速度的乘积等于作用于质点上的各力的矢量和。

作用于质点上的各力为一汇交力系。由静力学知，该汇交力系的矢量和就是它们的合力的矢量。因此，式(13-2)说明，**质点的质量与其加速度的乘积等于作用于质点上各力的合力之矢**。这也就是说，从力改变质点的运动状态的效应来看，力系的合力与原力系是等效的。

第二定律还说明，质点“机械运动的改变”，即质点的加

速度，不仅决定于作用在质点上的力，而且还与其质量成反比。对于相同的力，质量大的质点加速度就小，反之，质量小的质点加速度就大。这就是说，质点的质量越大，其运动状态越不容易改变，即力图保持其原有运动状态的能力越大，或者说，它的惯性越大。因此，**质量是质点惯性的度量。**

设一质点的重量 P ，由物理学知，它在真空中自由降落的加速度的量值为 g (称为重力加速度)。由第二定律可得

$$mg = P$$

或

$$m = \frac{P}{g} \quad (13-3)$$

如果测得质点的重量和重力加速度 g 的量值，就可根据式(13-3)求得质点的质量。

根据国际计量委员会规定的标准，重力加速度的数值为 9.80665m/s^2 ，一般取 9.80m/s^2 。但是，实际上在不同的地区， g 的数值是有差别的。

最后还应指出，式(13-1)至(13-3)中，各物理量的单位都应按国际单位制(SI)，即质量的单位为 kg ，力的单位为 N ，加速度的单位为 m/s^2 。

第三定律(作用与反作用定律)：两物体间的作用力与反作用力总是大小相等，方向相反，沿着同一直线，且同时分别作用在这两个物体上。

第三定律是静力学中所提及过的定律。它在动力学中仍然是分析两个物体之间相互作用关系的依据。

牛顿运动三定律是观察大量的力学现象而总结出来的规律。这个规律以及在这个规律的基础上推演出来的诸定理被用来解释很多更加复杂的力学现象时，又证明了它的正确

性。但是必须指出，牛顿定律不可能适用于任意参考坐标系。因为根据力的定义，质点所受力的方向和大小与参考坐标系的选择无关，而由运动学知，质点的加速度则取决于参考坐标系的选取。显然，牛顿定律如果对某些参考坐标系是正确的，那么必然对另一些参考坐标系就不正确了。牛顿定律适用的参考坐标系称为**惯性参考坐标系**。牛顿定律不适用的参考坐标系称为**非惯性参考坐标系**。通常，把参考坐标系与地球固连，这时利用牛顿定律分析工程中常见的力学现象可以得到相当满意的结果。因此，本书中如无特别说明，均将与地球固连的坐标系作为惯性坐标系。

近代物理还证明，以牛顿运动三定律为基础的所谓经典力学应用于宏观物体和速度远低于光速的问题时，均可得到足够精确的结果，如果应用于微观物体或速度接近于光速的问题时，就完全不适用了。这时需应用量子力学或相对论力学的理论。

思考与练习

13-1 “质点的速度越大，则其惯性越大”。“质点的速度越大，则质点所受合力也越大”。这两种说法对吗？为什么？

13-2 “质点作匀速直线运动时有惯性，当质点作变速运动时就没有惯性了”。这种说法对吗？为什么？

13-3 质点在某时刻的速度方向和所受合力的方向是否一定相同？

13-4 “质点运动状态的改变就是指质点速度大小的改变”。这种说法对吗？

13-5 怎样判断一个参考坐标系是否惯性参考坐标系？

13-6 已知参考坐标系甲是惯性坐标系，试分析另一坐标系乙在什么情况下(相对于坐标系甲作什么运动)也一定是惯性坐标系。

§13-2 质点的运动微分方程

牛顿第二定律式(13-2)中，如果质点的加速度用其矢径的二阶导数表示，则有

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (13-4)$$

式(13-4)为包含矢径函数对于时间的二阶导数的方程，称为**质点的运动微分方程**。

在计算实际问题时，式(13-4)常被写成不同坐标的投影形式。

一、质点运动微分方程的直角坐标形式

将式(13-4)两端分别向惯性直角坐标 $Oxyz$ 各轴投影，得

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n X_i \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n Y_i \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n Z_i \end{aligned} \right\} \quad (13-5)$$

式中 x 、 y 、 z 分别为质点的三个直角坐标值； X_i 、 Y_i 、 Z_i 为 F_i 在三个坐标轴上的投影。

二、质点运动微分方程的自然轴形式

如已知质点 M 的运动轨迹，则在轨迹曲线上选定一点 O_1 作弧坐标 s 的原点，并规定其正方向。质点 M 的位置完全

由弧坐标函数 $s(t)$ 决定。由运动学知，质点的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{n}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为质点所在位置处沿弧坐标增加方向的切向单位矢量， $\mathbf{n}$ 为该处主法线方向的单位矢量， ρ 为质点所在位置处轨迹曲线的曲率半径。

因此，将式(13-4)两端分别向自然轴系（即 $\boldsymbol{\tau}$ ， $\mathbf{n}$ 和副法线的单位矢 $\mathbf{b}$ ）的三个轴投影，即可得

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{i\tau} \\ \frac{m}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n F_{in} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n F_{ib} \end{aligned} \right\} \quad (13-6)$$

式中 $F_{i\tau}$ ， F_{in} ， F_{ib} 分别为 F_i 在曲线的 $\boldsymbol{\tau}$ ， $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{b}$ 方向的投影。

在运用矢量式(13-4)时，有时还会根据不同的需要，将它向各种不同轴系进行投影，从而使得问题的求解变得更为方便。但是值得注意的是必须正确写出力和加速度在所选轴上的投影表达式。

思考与练习

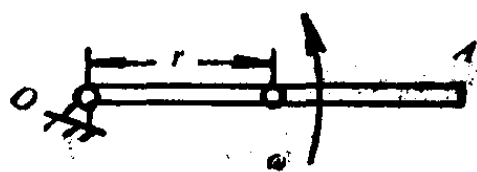


图13.2

13-7 如图13.2所示，管 OA 在水平面内绕铅垂轴 O 以匀角速度 ω 转动。有一质点在管内离 O 的距离为 r 处。有人认为小球的矢径 r 在 OA 方向的投

影为 r ，因此将式(13-4)的两端分别向 OA 方向投影得(不计摩擦力)

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r = 0$$

试判断以上投影式是否正确？为什么？

§13-3 质点动力学的两类基本问题

应用质点运动微分方程可以求解质点动力学的两类基本问题。

第一类问题是已知质点的运动，求作用在质点上的力。如果已知质点的运动方程，这时利用微分方程来求力，实际上归结于微分和解代数方程的运算。

第二类问题是已知作用于质点的力，求质点的运动。如要求的运动指的是质点的加速度，那么，这时也是属于解代数方程的简单问题；如果要求的运动指的是质点的运动方程，那么面临的的就是求微分方程的解。这时往往需要积分和定积分常数。积分常数通常是由质点运动的初始条件，即运动开始时质点的位置和速度来确定。在工程实际中，作用力有时比较简单，例如力为常数或只是时间、坐标、速度某一个变量的函数。对于这样的问题，往往可以得到一个满意的解析解。但是在很多情况下，作用于质点的力同时是时间、坐标、速度或它们的组合项的函数，那么，求解将会是很难的，甚至只能得到它们的某种程度的近似解。

下面举例说明两类基本问题的求解方法和步骤。

例13-1 图13.3(a)所示，一粗糙平面的倾角为 θ ，以一水平加速度 a_0 向右运动。如果一质点放于斜面上要保持相对静止，问质点和斜面之间的摩擦系数至少应为多少？

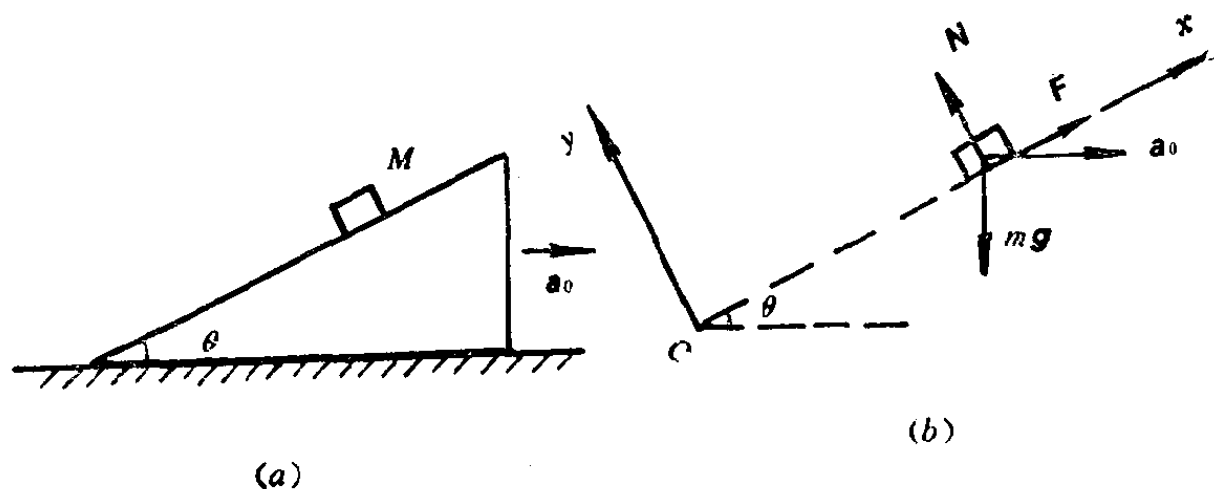


图13.3

解：题意分析 本题要求质点相对于斜面保持静止，即要求质点与斜面具有相同的速度和加速度，因此质点的加速度为已知。根据静力学知，质点和斜面无相对滑动的条件是 $F \leq fN$ ，即 $f \geq \frac{F}{N}$ ，其中 F 为摩擦力， N 为法向反力。因此，求摩擦系数 f 的最小值，即是求 F/N 的值。可见此题以质点为研究对象，属于动力学的第一类问题，即已知运动求力的问题。其解题步骤如下：

- (1) 取质点为研究对象，如图13.3(b)所示。
- (2) 质点的加速度 $a = a_0$ 为已知。
- (3) 质点受已知重力 mg ，未知摩擦力 F 和法向反力 N 。
- (4) 取坐标轴 x 和 y 如图所示，由质点运动微分方程在 x 、 y 两坐标轴上的投影式可得

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= F - mg \sin \theta \\ ma_y &= N - mg \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

其中 $a_x = a_0 \cos \theta$ ， $a_y = -a_0 \sin \theta$

- (5) 解方程得

$$\left. \begin{aligned} F &= m(a_0 \cos \theta + g \sin \theta) \\ N &= m(g \cos \theta - a_0 \sin \theta) \end{aligned} \right\}$$

由静力学知，要使质点相对于斜面不滑动，则必须满足

$$f \geq \frac{F}{N} = \frac{a_0 \cos \theta + g \sin \theta}{g \cos \theta - a_0 \sin \theta}$$

即摩擦系数 f 的最小值为

$$\frac{a_0 \cos \theta + g \sin \theta}{g \cos \theta - a_0 \sin \theta}$$

例13-2 飞机爬高时以匀加速度 a 与水平面成仰角为 β 的方向作直线运动，已知装在飞机内的单摆摆锤的质量为 m ，单摆与铅垂线的偏角 α 为常值。试求此时飞机的加速度大小和悬线中的张力。

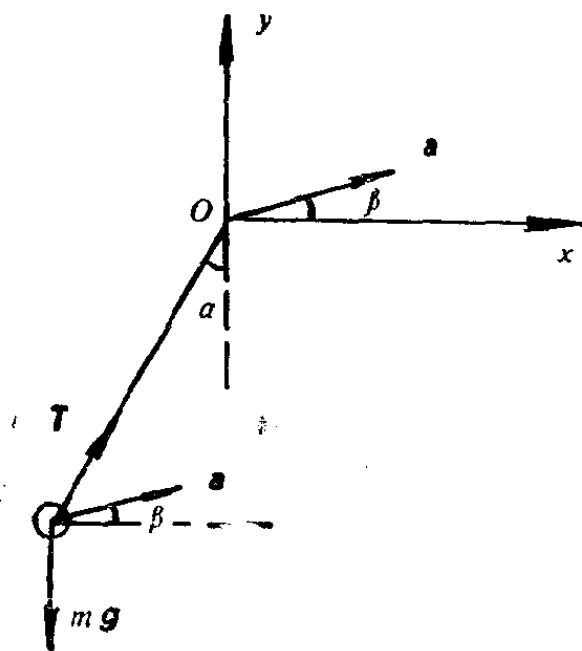


图13.4

解：题意分析 由于摆线与铅垂线的夹角 α 为常值，故摆锤的加速度与飞机相同，故其加速度 a 的方向为已知。摆锤受力有重力 mg 为已知，悬线拉力 T 大小为未知，方向已知。显然，摆锤的运动（加速度）和所受的力都只知其部分参量，而另一部分参量为未知。这是第一、二类问题的综合。但

其未知量为两个，同样可以利用运动微分方程的两个投影式求解。

(1) 取摆锤为研究对象。

(2) 摆锤加速度与飞机加速度相同，以 a 表示，方向如图。