图论及其应用

楼世博　金晓龙　李鸿祥　编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书主要讲述图论的基本知识及其应用。着重讲清图论的基本概念、基本方法、基本理论以及图论在信息传输、交通运输、电网络、电子计算机存储和程序设计等方面的应用。全书共分八章，分别讨论无向图、有向图、平面图、网络流、对集、连通性、电网络的拓扑分析、在计算机科学中及其它方面的应用等。书末附录Ⅰ是阅读本书时所需要的预备知识；附录Ⅱ中收入了12个用 ALGOL-60 语言编制的图论程序。

本书可供非图论专业的理工各科大学高年级学生、研究生、教师、工程技术人员及科研人员作为教科书或参考书。

图 论 及 其 应 用

楼世博 金晓龙 李鸿祥 编著

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32　　1982年7月第一版

印张：15 12/32 页数：246　1982年7月河北第一次印刷

字数 406 千字　　印数：1—11,700 册

统一书号：15045·总2591—有5250

定价：1.95 元

前　　言

图论是研究由线连接的点集的理论。点集中的点称为顶点，连接某些点对的线称为边。一些由顶点及边构成的图称为线图。在线图中，顶点的位置的分布和边的长短曲直都可以任意描画，这并不改变实际问题的性质。我们关心的是它有多少个顶点，在哪些顶点间有边相连，以及整个线图所具有的某些特性。

线图可以用来表示和研究一个系统的结构及它的有关性质。例如，若顶点表示火车站，边表示火车站间的铁路线，我们便可通过相应的线图来研究铁路网络中货物的运输问题。又如，若用顶点表示电网络中的节点，用边表示节点间的电气元件，我们就能利用相应的线图对电网络进行拓扑分析。

图论起源很早。1736年，欧拉就发表了第一篇有关图论的论文。他首次引入线图概念，解决了哥尼斯堡城（现在是苏联的加里宁格勒）七桥问题。问题是这样：十八世纪的德国有个哥尼斯堡城，

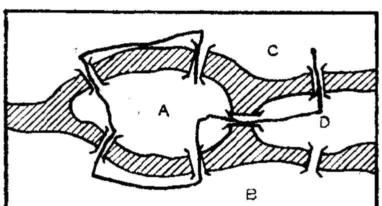


图 1

在流贯全城的普雷格尔河两岸和河中两个岛之间架设了七座桥，它们把河的两岸和两个岛连接起来，如图 1 所示。当时流行着一个难题，就是能否有这样一种走法，它通过每座桥一次且仅一次。

求解这个问题时，两岸和岛的大小、形状以及桥的长短曲直都

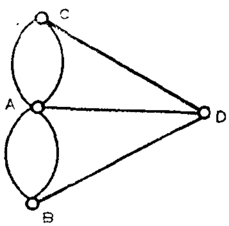


图 2

无关紧要，重要的是每块陆地间有几座桥。我们可以把两岸和两个岛都看成顶点，将连接这些顶点的桥当作边，于是图1可以改画成图 2 所示的线图，其中四个顶点分别表示四块陆地 A、B、C、D，图中的边表示桥。欧拉指出：一个线图中存在通过每边一次且仅一次的路（即一笔画）的充要条件是必须同时满足下列两个条件：

（1）从图中任意一点出发，通过某些边一定能到达其它任意一点，亦即线图是连通的；

（2）与图中每一顶点（可能有两点例外）相连的边必须是偶数条。

由于图 2 所示线图中，与四个顶点相连的边都是奇数条，因而不可能存在通过每边一次且仅一次的走法。

在十九世纪和二十世纪的前半期，图论中主要研究一些游戏问题，诸如迷宫问题、博奕问题和棋盘上马的行走路线等等。一些古老的难题吸引了很多学者。其中最著名的难题是四色问题、哈密顿问题和乌拉姆问题。四色问题已于1976年由计算机程序解决，后二者至今仍悬而未决。

1847年基尔霍夫用图论来分析电网络，给出了驱点阻抗和转移导纳的拓扑公式。这是把图论应用于工程技术领域的第一篇论文。

近年来，由于电子计算机的应用，刺激了图论的飞速发展。自二十世纪六十年代以来，图论成为数学中发展最快的分支之一。应用图论来解决运筹学、化学、生物学、网络理论、信息论、控制论、博奕论和计算机科学等学科的问题，已显示出极大的优越性。图论在各种科学分支、工程技术领域及社会科学中有着广泛的应用。它作为组合数学的一个分支，受到了各方面的普遍重视。

1978年 3 月，上海市数学会举办图论学习班，我们承担了讲课任务，编写了图论讲义。1979年我们对讲义进行了较大的修改，并

自同年9月起，在上海铁道学院的研究生课程中又试用了一遍，结合教学实践，再次作了一些修改，最后写成本书。

由于图论的内容非常丰富，所以要在一本书内包括所有内容几乎是不可能的。本书避开一些繁复的定理的证明和古老的难题，着重讲清图论中的基本概念、基本方法、基本理论以及图论在网络流和电网络等方面的应用。全书共分八章，第一章无向图和第二章有向图介绍了图论的基本概念和基本理论；第三章专门讨论平面图；第四章的网络流对理论和实际都很有用，同时也与第五章的对集和第六章的连通性理论有关；第七章和第八章介绍图论在电网络、计算机科学以及其它方面的应用。

为了帮助读者更好地理解基本概念和基本理论，我们把两次讲授本课时总结出的概念、公式及定理的联系框图添写在本书有关章节的后面。例如第一章第三节后面的边链、回路、通路、E图和M图等之间的相互关系框图，同章第九节后面的线图、树、连枝集和三类矩阵之间的联系框图。在第三章、第五章及第六章中也有类似的框图、附表。每一章后面都附了一定数量的习题．它们对理解书中内容和熟悉书中所介绍的方法是有帮助的。考虑到应用方面的需要，在书末附录Ⅱ中还汇集了我们之中的部分同志参加编制的一组图论问题的计算机算法，可供应用和参考。

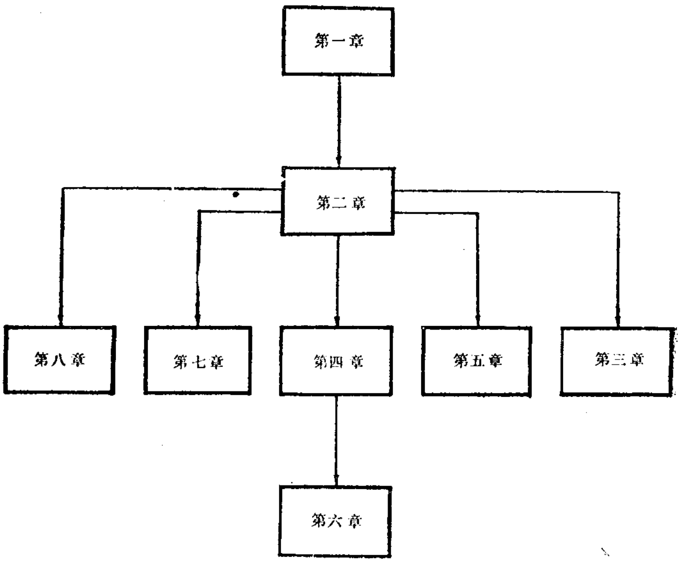
本书以非图论专业的理工各科大学高年级学生、研究生、教师和科技工作者为对象。学习本书时需要有初等的集合论、行列式和矩阵论的基本知识。不熟悉这些内容的读者可参阅书末附录Ⅰ。由于目前图论术语在国内外都没有统一，所以在书末列出了中英对照的图论名词索引。书中有些定理或定理的证明标上了星号*，初学的读者可以略去不读，这并不影响后续内容的学习。相应的习题也可不做。

限于水平，书中可能存在欠妥和错误之处，恳请读者批评指正。

楼世博　金晓龙　李鸿祥

1979年12月于上海

阅读次序框图



目　　录

第一章　无　向　图

§1.1　线图及其子图

图1.1.1中所画的是某地区的铁路交通图，图1.1.2是该地区的铁路示意图。显然，对于只想了解铁路线路情况，只关心自某一站到另一站需经过哪些站的人（例如领导者及旅客)来说，图1.1.2比图1.1.1要更为清楚、有效。若前者是某地区的通信线路或输电线路图，则后者同样具有清楚、有效的优点。

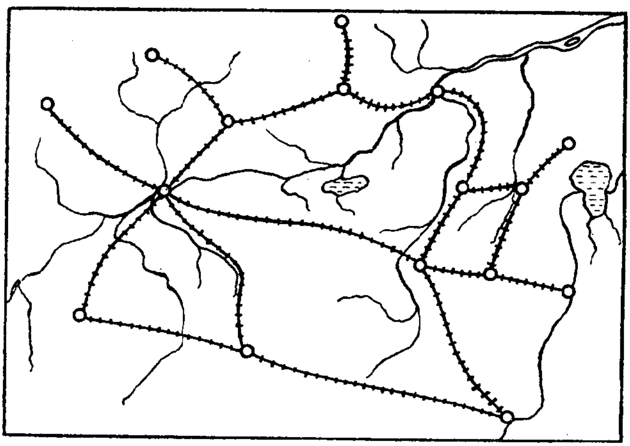


图 1-1-1

图1.1.2与图1.1.1有很大的差异：后者不仅略去了对了解铁路交通毫无关系的河流、湖泊等，而且改变了铁路线的长、短、曲、直及线路上各站间的相对位置。但它们有一个明显的共同之处，这

就是各站间的连通关系没有变：图1.1.1中原来两站有铁路连通的，图1.1.2中也有铁路相通；原来两站不直接连通的，后一图中也不直接连通。反之亦然。

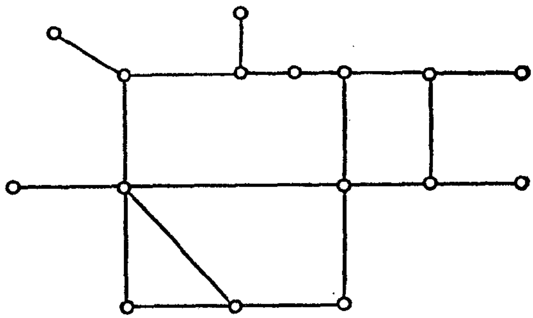


图 1-1-2

一般地，如果一物体本来连着的部分，不因某变换而分开，本来不连着的部分，也不因该变换而连通起来，这样的具有保持连通性的变换我们称为**拓扑变换**。在拓扑变换下不变的性质称为**拓扑性质**。图1.1.2就是从图1.1.1经过拓扑变换而得到的。

在研究一个客体的拓扑性质时，我们常用一些点（称为**顶点**）分别表示它的各部分，两部分连通时，则用代表这两部分的顶点间的一条（直的或曲的）连接线（称为**边**）来表示。这样的由顶点和边组成的图形称为**线图**。图 1.1.2 就是一个线图。**图论**就是研究线图的理论。

下面我们将给出线图的比较严密的定义。

1. 线图

设V是顶点集，E是边集，如果对每个$e\in E$，有V中一个顶点对(v,v')和它对应，则称由V及E组成的集为一个**线图**，记为$G=(V,E)$。顶点v及v'称为边e的**端点**，并说v及v'与e彼此**关联**。

如果顶点v和v'相同，则相应的边e称为**自回路**。如果V中某个

顶点和E中任何边均不关联，则该点称为**孤立点**。如果顶点对（v, v'）是有序的，即边(v,v')与(v',v)是E中不同的元素，则此线图称为**有向图**。否则，称为**无向图**。如果V及E均为有限集，则称$G=(V,E)$为**有限图**。本书只讨论有限图；以后凡提到线图，均指有限图。

一线图G常用几何形式表示。对于无向图，一般用小圆圈表示顶点，用二顶点间的任何形式的联线表示该顶点对所对应的边；对于有向图，顶点仍用小圆圈表示，而边(v,v')则用自v指向v'的有向弧或有向线段来表示。顶点一般用非负整数或字母v加非负整数足码标号，例如点 0 、点 1 、点v_1、点v_2等；边用英文小写字母或e加非负整数足码表示，例如边a、边b、边e_0、边e_1等。当线图包含某条边时，也就包含了与该边关联的两顶点。

例1.1.1 设有线图$G=(V,E)$，其中$V=\{1,2,3,4,5,6\}$，$E=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，其几何表示如图1.1.3。边g是自回路，顶点 5 是孤立点。这是一个无向图。如果在这线图的各边上添加用箭头表示的方向，则得一有向图，如图1.1.4所示。

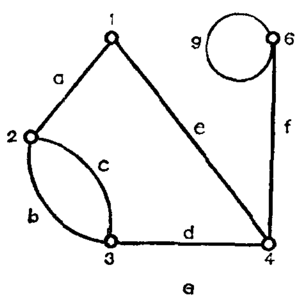


图 1-1-3

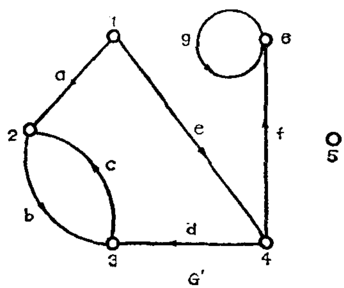


图 1-1-4

当提到图中的边时，例如边a，可以说边a，也可以说边$(1,2)$；对于无向图，又可以说边$(2,1)$。如图中有并联边，例如b和c，则只能说边b或边c。

我们注意，在图论中研究线图时，只注意考察线图中的顶点与

边的连接关系及整个线图所具有的性质。至于各顶点间的相对位置及边的长短曲直都是无关紧要的。这就是前面所说的拓扑性质。因此，图 1.1.3 中的无向图G也可有如图 1.1.5 中所示的几何表示。

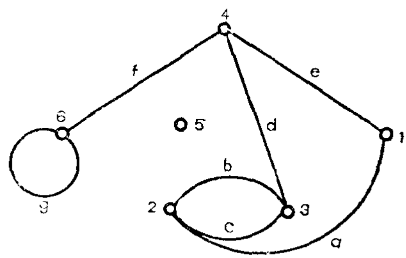


图 1-1-5

从线图定义及其几何表示，我们看到，任一边都和一对顶点相关联，但在某两个顶点间却可能没有边或有几条边。例如图 1.1.3 中的线图G的顶点 3 与 1 之间没有边，但顶点 3 与 2 之间有两条边。如果某线图的任意两个顶点间至多有一条边，则该线图称为**简单图**；否则就称为**复图**。如某线图G的顶点集V被分为两个子集X和Y，且$X \cup Y = V$，$X \cap Y = \phi$，并只允许X中的顶点与Y中的顶点间有边相联，则称线图G为**二分图**，X和Y称为V的**二分划**，记为$G=(X,Y;E)$。如果某线图中每两顶点间恰有一条边，则称该线图为**完全图**。显然，完全图的性质由它的顶点数完全决定。通常用K_n表示具有n个顶点的完全图，用$K_{n,m}$表示二分划中分别有n和m个顶点的完全二分图。K_5和$K_{3,3}$的几何表示分别画在图1.1.6和图1.1.7中。

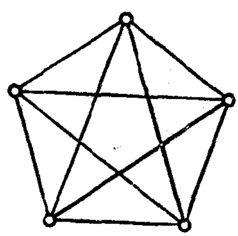


图 1-1-6

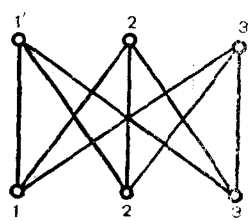


图 1-1-7

以后，为叙述简洁起见，我们把某线图G的几何表示就说成是线图G。

2. 子图及子图间的几种运算

设$G_1=(V_1,E_1)$和$G=(V,E)$为两个线图，如果$V_1\subseteq V$且$E_1\subseteq E$，则称G_1为G的**子图**；如G_1不包含G的所有顶点和边，则称G_1为G的**真子图**。

如果G_1和G_2是线图G的没有孤立点的两个子图，则它们的顶点被边所完全确定。子图G_1和G_2之间可定义如下几种运算。

(1) 两图的**并**$G_1\cup G_2$，表示由G_1及G_2中所有边组成的线图；如果G_1和G_2无公共边，则称$G_1\cup G_2$为G_1和G_2的**直和**，简记为$G_1\dot{+}G_2$。我们约定，以后凡提到直和运算时，参加运算的诸子图之间都没有公共边，两子图的直和就是它们的边不重并。

(2) 两图的**交**$G_1\cap G_2$，表示由G_1及G_2中的公共边所组成的线图。

(3) 两图的**差**G_1-G_2（或G_2-G_1），表示$G_1(G_2)$去掉$G_2(G_1)$中也有的边所组成的子图。注意，从G_1中去掉一边e时，若出现孤立点，则把孤立点也去掉；否则其端点将仍保留在$G_1-\{e\}$中。

(4) 两图的**环和**$G_1\oplus G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)=(G_1-G_2)\cup(G_2-G_1)$，其中等号表示全同，即$G_1\oplus G_2$表示由$G_1\cup G_2$中去掉它们共有的边后所得的线图。如果$G_1$和$G_2$没有公共边，则$G_1\oplus G_2=G_1\dot{+}G_2$。

(5) 子图G_1的**补图**$\overline{G}_1=G-G_1$，表示G中去掉G_1中的边所得的G的子图。显然G_1与$\overline{G_1}$无公共边，即$\overline{G_1}\dot{+}G_1=G$。

设在线图$G=(V,E)$中，$S\subseteq E$且非空，以S为边集、以与S中的诸边相关联的顶点全体（记为V'）为顶点集的子图(V',S)称为G的**由S导出的子图**，记为$G[S]$。导出子图$G[E-S]$记为$G-S$；当$S=\{e\}$时，则把$G-\{e\}$简记为$G-e$。

类似地，设$K\subseteq V$且非空，以K为顶点集、以二端点均在K中的边的全体（记为E'）为边集的子集(K,E')称为G的**由K导出的子图**，记为$G[K]$。导出子图$G[V-K]$记为$G-K$，当$K=\{v\}$时，

则把$G-\{v\}$简记为$G-v$。

例1.1.2 设G_1和G_2分别如图1.1.8中(a)和(b)所示，则$G_1\cup G_2$、$G_1\cap G_2$、G_1-G_2、及G_2-G_1分别如图1.1.8中(c)、(d)、(e)、(f)及(g)所示。

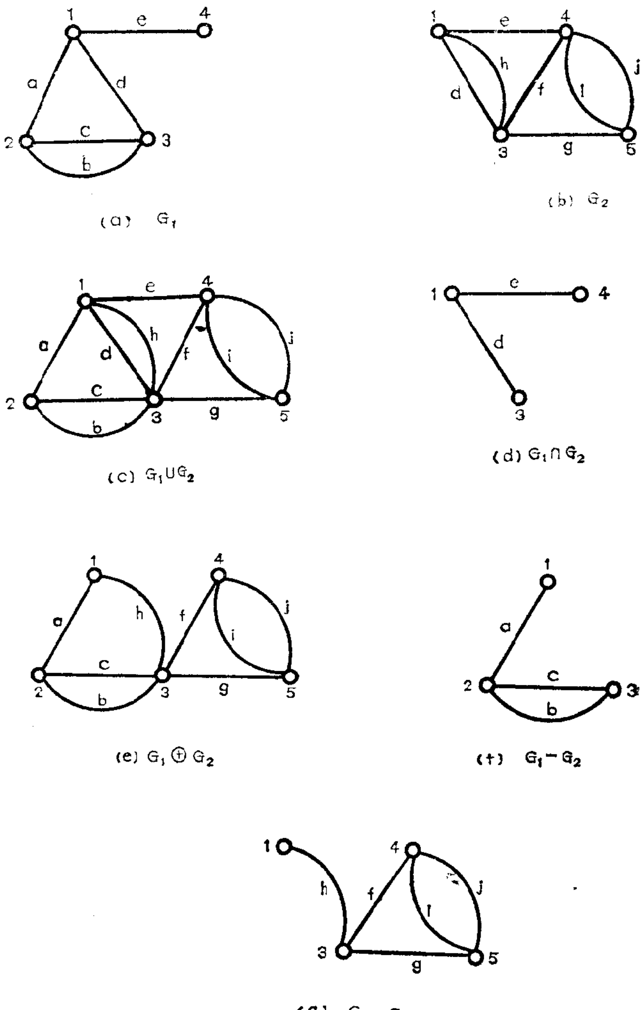
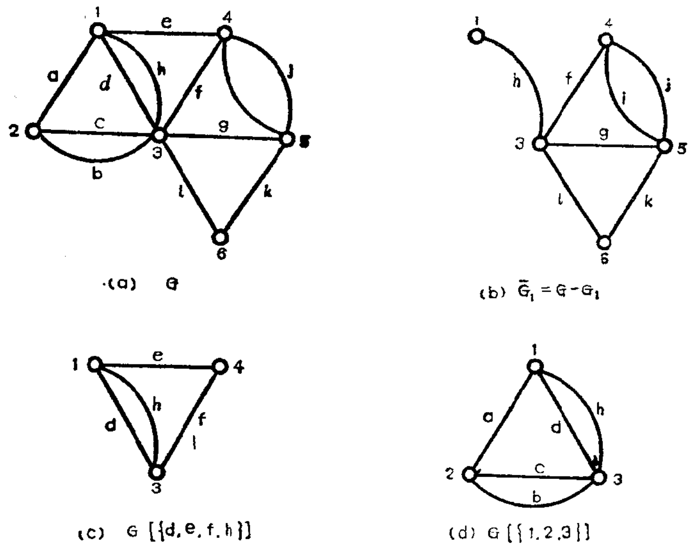


图 1-1-8

如果线图G如图1.1.9(a)所示，G_1如图1.1.8(a)所示，则G_1的补$\overline{G_1}=G-G_1$如图1.1.9(b)所示；导出子图G〔$\{d,e,f,h\}$〕和G〔$\{1,2,3\}$〕分别如图(c)和(d)所示。



(a) G　(b) $\overline{G}_1=G-G_1$

(c) G〔$\{d,e,f,h\}$〕　(d) G〔$\{1,2,3\}$〕

图 1-1-9

当$V=\phi$，$E=\phi$时，线图(ϕ,ϕ)称为**空图**，记为ϕ。若用$|S|$表示集合S中的元素的个数，则对空图来说，有$|V|=0$，$|E|=0$，即空图既不含有顶点，也不含有边。显然，空图是任一非空线图的子图。

定理1.1.1　设线图G非空且没有孤立点，则G的所有子图在环和运算下构成可换群。

***证**　设G的所有子图的集合为

$$S=\{G_0,\ G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_n\},\ (G_0=\phi) \tag{1.1.1}$$

对于环和运算，S显然是封闭的，即对任何i、j($0\leqslant i$，$j\leqslant n$)，有