高等学校教材

空间解析几何引论

KONG JIAN JIE XI JI HE YEN LUN

（第二版）

南开大学《空间解析几何引论》编写组编

高等学校教材

空间解析几何引论

第二版

南开大学《空间解析几何引论》编写组编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书第一版编写人员为吴大任、陈鹀、姚家超、李秉贞、涂华生，第二版编订人员为吴大任、陈鹀、李秉贞、骆家舜、萧永震. 第二版共八章：第一章矢量及其线性运算，第二章仿射坐标系下的直线和平面，第三章矢量的数积、矢积和直角坐标系下的直线和平面，第四章常见的曲面，第五章坐标变换与线性变换，第六章仿射与直角坐标系下的二阶曲面，第七章欧氏几何与仿射几何，第八章射影几何简介.

本书以欧氏几何和仿射几何为主要内容，简略地介绍射影几何中一些要点；部分集中、部分分散地介绍必需的线代数、矩阵和线性变换群的知识；各章末都附有长短不一的“结束语”，指出该章重点及其与书中其他部分的关系，个别“结束语”还含有一些补充的内容，以扩大读者视野. 本书在充分运用代数工具的同时，力求突出几何形象；并在变换群的观点下区分图形的度量性质、仿射性质以及射影性质. 本书可作为综合性大学和师范院校数学专业的教材或教学参考书使用.

高等学校教材

空间解析几何引论

第 二 版

南开大学《空间解析几何引论》编写组 编

*

高等教育出版社出版

高等教育出版社照排中心照排

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.5 字数 350 000

1978年 5 月第1版 1989 年 5 月第2版 1989 年 5 月第1次印刷

印数 0001 — 4 610

ISBN7-04-002108-0/O·750

定价 3.35 元

第二版说明

新版对第一版作了全面修订，指导思想未变．修订之所以必要，主要是因为第一版成书仓促，有欠完善，也有讹误，同时，十年来中学数学水平已有提高，新版除删去两个附录外，其中第一、五、六三章和第八章中关于交比的§5都基本上改写了．经过修订，希望系统性和若干命题的论证有所改善，错误有所减少．

目前本课程虽有参考性教学大纲，但各校学时和内容安排很不一致；一般学时偏少，内容取舍煞费周章．使用本书作为教材时，希望精打细算，慎重抉择，使学生既能打好较牢固基础，又能较全面掌握课程要领．各章节所附习题多少不一，性质各异，更希教学双方，按照一般要求和个人情况，有区别地指定作业和选做．

数学名词正由全国自然科学名词审定委员会组织审议，尚未确定公布．本书采用名词力求是现有名词中最简明的，有时也把其他名词附注于后，俟统一名词公布后再作订正．

本书第一版编写人员为吴大任、陈鹀、姚家超、李秉贞、涂䓍生，第二版编订人员为吴大任、陈鹀、李秉贞、骆家舜、萧永震．

不少读者对第一版提出过有益的批评和建议，我们深表谢意．新版缺点错误必仍不少，前后规格不一的现象也未必都消除，望读者继续指教．

编　者

1988年7月

第一版　编者的话 (有删节和修改)

解析几何是以线代数为主要研究工具的几何学. 本书主要是为综合大学和师范院校数学专业一年级开设的基础课解析几何编写的.

和一切自然科学一样, 数学这门科学的产生来源于人类的实践, 首先是生产实践以及和生产实践直接或间接结合的科学实验, 而人类的实践又不断促进数学的发展. 但是, 就各门科学的内部来说, 则各有其特殊的矛盾, 正是这种特殊的矛盾决定它的独特内容和发展形式, 以及它对认识世界和改造世界的作用. 数学中两大研究对象"形"与"数"的矛盾统一是数学发展的内在因素: 从几何的角度看, 代数和几何结合产生了代数几何, 分析和几何结合产生了微分几何; 而代数几何和微分几何又转过来为代数与分析 (以及其它学科) 提供几何背景、解释和研究课题, 促进它们的发展; 并使数学在实践中的应用更加广泛和深入.

在这个意义下, 解析几何和线代数是不可分割的 (因此, 把它们结合起来作为统一的课程, 是值得鼓励的尝试), 把它们分开, 只是为了研究的某种便利. 但是, 在它们的相互关系中, 这两门学科的地位也有区别: 由于线代数是解析几何的主要工具, 没有这个工具就没有解析几何; 线代数则不然, 无论它的形成和发展受到几何多大影响, 但在表现形式上, 却可以独立于几何而存在. 当然, 在学习线代数时, 如果时刻考虑到它的各种几何背景和解释, 对于代数的理解, 对于几何的学习, 都是十分有益的.

在编写这本教材时, 面临的一个问题就是如何处理线代数理论和几何的关系问题. 解析几何一般是数学专业一年级第一学期开始的课程, 不能假定一般学生已经掌握足够的线代数基本理论. 而由于现有的教学计划是参考性的, 也不能假定代数课的设置和它的进程能及时为本课程提供必要的代数工具. 因此, 不得不把

本课程所需用的代数工具列入书的内容，作为它的不可少的组成部分．但是，本课程研究的主要对象，毕竟是几何，不能系统地论述代数理论，也不应先代数后几何，离开几何来介绍代数理论，造成喧宾夺主的现象．我们的作法是，把必要线代数内容分散，并尽量结合几何来介绍，以免过分转移学生对几何的注意力，也希望这样会有助于学生接受代数理论．但限于水平，也由于某些客观原因（例如无论几何或代数都还要保持一定的系统性），这种结合远未达到我们的理想．例如，有些介绍线代数的段落，几何背景尚不充分，在一定程度上有和几何脱节现象．但我们仍希望读者凭着已有的几何知识，尽可能留意所介绍的代数内容的几何意义，并把这一精神贯串于整个课程的学习中．还有个别代数定理，不能在书中给出证明，只能说明其内容，使读者能够理解和运用．

在解析几何中，为了利用代数工具，就需要建立一定的坐标系，而建立哪种类型的坐标系以及选用怎样一个具体的坐标系，是和所探讨的是图形哪一类的性质密切相关的．适当地选择坐标系可以大为简化对图形性质的研究，但是图形性质又是不依赖于坐标系的客观存在．因此，可以说，我们要研究的正是那些和坐标系的选择无关的性质；或者说，建立坐标系正是为了摆脱图形对坐标系的依赖，这在代数上就表现为在某个线性变换群下的不变量和不变关系．

与此类似，我们引进几何变换群的概念，并考察经过某些几何变换图形性质的变化，正是为了研究图形在某个变换群下不变的那部分性质．我们注意到，一个（代数上的）线性变换群在几何上既可以代表某种类型的坐标变换的集合，又可以代表某个几何变换群．因此，图形性质和坐标变换的关系同它和几何变换的关系就在代数上获得统一的表现，而上面所说的代数不变量和不变关系也就获得新的几何意义．

这种同一个代数概念（或结论）可以有多种几何解释的例子是很多的．在第五章证明了仿射坐标变换在代数上的表现是满秩线

性变换之后，紧接着就从代数角度来论述满秩线性变换理论，而不等待满秩线性变换的其它几何解释(在本书中，例如满秩齐次线性变换的几何解释就至少可以举出六种)，这就是原因之一．不妨再举一个例，齐次坐标可以代表点，也可以代表平面(在平面几何中，则可以代表点，也可以代表直线)，这就使得射影空间(平面)的对偶原则在代数上显得是完全必然的客观存在：从同一个代数命题就可以得到两个对偶的几何命题．

我们强调几何和代数的互相转化，决不应当忽视这种转化是有条件的．例如，一个代数曲面可以用一个多项式方程代表，但在实空间，一个多项式方程却不一定总代表某个曲面．又如，为了便于运用代数工具，就把通常的平行和垂直这两种几何概念略加扩充，规定零矢既平行又垂直于任何矢量．类似的情况，在二阶曲面理论中，处理关于在奇点的切面以及共轭直径面，奇向等问题时也遇到了．用代数或分析工具处理几何问题时，为了达到"形"和"数"的相对统一，这是经常采用的办法．

在编写本教材时，面临的另一个问题是，如何处理几何本身内容的问题．目前数学专业教学计划仍是参考性的，但可以预计，若干年内综合大学数学专业开设的几何必修课，除解析几何外，至多还有微分几何．因此，对于主要基础课之一的解析几何的要求，必须持慎重态度．我们认为，目前特别应当注意的是，它的内容不能过分贫乏，例如不能局限于欧氏几何，必须开始扩大学生的视野，把他们逐步引到较广阔的几何学天地中去．这对于他们学习现代数学和其它现代科学，是非常必要的．至于师范院校，由于主要是面对中学教学的需要，扩大数学专业学生的几何视野的必要性就更为明显．我们把仿射几何作为本书组成部分，还简略地介绍射影几何中的一些要点，就是从这样的理解出发的．这些内容，离现代几何还有很大距离，但如果连它们也被摒于数学专业整个教学内容之外，对于我们培养现代数学工作者的事业是不利的．

变换群是几何学中的一个核心概念.通过变换群和图形几何性质的关系，人们较易抓住各类几何性质的本质和它们的内在联系，抓住许多种几何学之间的内在联系，较能用高一些的观点来理解和处理欧氏几何的问题.在本书中虽然直到第七章才正式出现几何变换和几何变换群这样的概念，但在全书编写中，我们始终力图从这个角度来安排几何和代数内容.例如，我们随时指出，哪些论证在一般仿射坐标系下和在直角坐标系都适用，哪些应当(或利于)在直角坐标系下进行；又如我们把第二章和第三章分开，也就是把四种矢量的代数运算按其几何意义分开，同时把有关点、直线和平面的关系，一部分在一般仿射坐标系下论证，另一部分在直角坐标系下论证.这种作法，其本意都是为了把仿射性质和度量性质分开，为后面论述仿射几何同欧氏几何的区别和联系作准备.由于几何图形的度量性质和仿射性质的基础，不外乎长度、角度、平行以及结合关系等初等几何中的概念，从此入手来扩大读者的几何视野，是比较自然的.

在解析几何教材中，处理仿射几何(仿射坐标系)和度量几何(直角坐标系)的关系，本来有两种方法.一种是先欧氏后仿射，这是较早的办法，好处是从特殊到一般，容易接受，缺点是仿射部分难以避免重复，也不利于破除读者对欧氏几何的成见.另一种是先仿射后欧氏，好处是逻辑体系完整，没有重复，缺点是一开始就和中学几何脱节，不易接受.我们采取了两方内容交替安排的作法.在第二至第四章，虽然引进了一般仿射坐标系，但不妨指出：若部分读者对于在仿射坐标系还感到不习惯，也可以把所用坐标系暂时看成直角坐标系.这样，也许可使这部分读者逐步摆脱直角坐标系的束缚，又照顾了他们对仿射坐标系尚未适应的情况，还避免了重复.

编　者

1978年2月

目　录

第一章　矢量及其线性运算

§1 矢 量 概 念

矢量，简称矢，亦称向量．在数学和物理中矢量的应用很广，在解析几何里应用更为直接．用矢量的方法特别便于研究空间里涉及直线和平面的各种问题．

人们在长期实践中，在积累了大量感性材料的基础上，建立了数量的概念，例如长度、质量、面积、密度、体积、流量等，在规定的单位下，这些量都可以用一个数[1]来表示．但是力、速度、加速度等，它们和上面所列举的例不同，它们不仅有**长度**(或大小)而且有**方向**[2]，就象两个速度不仅有快慢之分，还有方向的差异．这类量一般不能用一个数来表示，它们既有数量特性又有方向特性，这样的量在几何上通常叫做**矢量**．为了和矢量相区别，普通的数量有时称为**纯量**或**标量**或简称为**数**．由此可知

矢量是既有长度又有方向的量，长度用正数或零表示，长度也简称为**长**．

在作图时，我们用加箭头的一个线段表示矢量．例如图 1 就表示由**始点** A 到**终点** B 的矢量 $\overrightarrow{AB}$，线段 $\overline{AB}$ 的长或 A, B 两点间的距离 $|AB|$ 表示矢量的长．

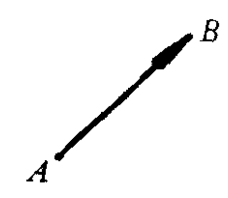

图 1

零矢　长度为零的矢量，也就是始点

① 本书所谓“数”或“数量”是指实数，否则另行声明．

② 方向一词习惯上有两种用法：一种，例如把东向和西向作为同向，称为东西向，一种把东向和西向作为相反的两个方向，本书采用后一方法．

终点重合的矢量，叫做零矢. 零矢方向不确定，可按需要取任意方向.

矢量相等和自由矢量 已给两个矢量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$，如果经过**平行移动**[①]把 A' 移到 A，则 B' 和 B 重合，我们就说 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$. 换句话说，**相等矢量**就是长度相等方向相同的矢量. 以后我们常用黑体拉丁字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}$ 等表示矢量，不一定标出其端点. 特殊地，零矢用 $\mathbf{0}$ 表示.

具有上述相等概念的矢量，即始点可以自由选取，因而位置不固定的矢量叫做**自由矢量**. 本书的矢量一般是自由矢量. (例外的有第二章里介绍的点的“径矢”，其始点总在原点.)

相反矢量 两个长度相等，方向相反的矢量叫做相反矢量或互为反矢. 例如 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 互为反矢，记作 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. 用 $-\boldsymbol{a}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的反矢. 于是我们有 $-\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a})$，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

幺矢 空间任意一个具有单位长的矢量叫做幺矢.

共线矢 (或平行矢量) 平行于同一直线的矢量[②] (不论长度和方向正或反)统称为共线矢或平行矢量.

共面矢 平行于同一平面的矢量叫做共面矢[③].

显然共线一定共面，而两矢总共面. 空间三矢一般不共面，若以同一点为始点它们一般构成一个三棱形.

习　题

1. 如果把空间一切等长 R 的矢量的始点放在同一点，则它们的终点构成什么图形?

2. 在下列各图形的棱 (或边)上作矢量，问每个图形的诸棱上，哪些矢

---

① 在移动过程中，一直保持和原来位置平行. 这叫做矢量的平行移动或平移.

② 将矢量始点放在一条直线上，若终点也在此直线上，则称矢量与直线平行或共线.

③ 将矢量始点放在一个平面上，若终点也在此平面上，则称矢量与平面平行.