贯通数学和物理　兼顾高考与竞赛

更高更妙的

高中物理解题思想与方法

——数学透视

方法篇

◎ 李志雄　林庆新　编著

GENGGAO GENGMIAO DE
GAOZHONG WULI JIETI SIXIANG YU FANGFA
SHUXUE TOUSHI

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

方法篇

更高更妙的高中物理解题思想与方法

——数学透视

李志雄　林庆新　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

写在前面的话:从数学透视物理,用物理强化数学

一、数学与物理的关系

数学被誉为科学的皇后,书写宇宙的语言,而物理学是数学应用最充分最成熟的学科,物理和数学具有内在的密切关系.

物理学先驱伽利略说:“自然界是一部打开着的书,这本书是用数学语言写的,没有它们,人们只能在黑暗的迷雾里劳而无功地游荡.”

而数学大师庞加莱则说:“数学离开物理就会走入歧途,物理学不仅迫使人们面临大量的数学问题,而且能影响我们朝着梦想不到的方向前进.”

这里提出本书的第一组“公式”:

从理论特征看,物理=哲学+数学;

从研究方法看,物理=实验+数学.

而在高中学习中,中学生朋友对于数学和物理的密切关系更是有切身体会.但当前中学教学实施中,未能对数理结合给予足够重视.在高中物理教学中有时会出现所需数学知识不足的情况,数学课上教师的讲解则多是抽象的计算、推导、证明,应用题很少.学生的数学应用能力、数理结合的能力,这些几乎决定了物理成绩的能力大半要看“自我造化”了.

近年来,高考物理对数学应用能力的要求居高不下,物理竞赛中更是需要选手使出“浑身解数”(2019年高考数学卷中还出现了生活或物理背景的试题).综上,对中学生来说,进行数理结合的专题学习和训练是十分必要和迫切的,本书也正是为此编写的.

二、本书特点和说明

1.本书侧重从数学应用的视角来分析透视物理问题,引导和启发中学生充分应用所学的数学知识来学好物理,培养在物理分析基础上的数学建模能力,从而事半功倍地提高物理解题和研究分析实际问题的能力.同时在物理应用中强化对数学知识的掌握和灵活应用.

2.本书分方法篇和专题篇两部分:方法篇按应用的数学方法不同分章节,在写法上注重和数学接轨,如在微积分初步等专题的叙述中尽量贴近中学生的数学习惯,为了引导大家从思维上贯通高中数学和物理,在例题和练习中还会出现数学习题,让大家体会“做着普通的数学习题就不小心把物理难题给解了”的感觉.专题篇从与数学思想方法相关的角度透视力学和电磁学,融会贯通地把握高中物理的主干内容,凸现学科核心素养.

本书阐述的数学方法不求全面,所选专题注意以下方面:

(1)尽量兼顾三个方面的需求:通过数学铺垫帮助同学们跨入高中物理的殿堂、提高高考复习备考的效率、物理竞赛辅导和训练需要.

(2)围绕物理教学中难点和专题的突破,内容具有原创性,能启发思维、增加学习兴趣,激励钻研

精神.

3. 所选例题和习题大部分来自历年高考试题(多数是压轴题)和物理竞赛题,书中多给出更透彻的分析,更简捷的新解法. 要注意的是有些重要结论是通过例题后的“总结与讨论”来总结的. 另由于一道物理题可能涉及多种数学方法,本书中会出现少量一题二用的情况.

三、总结与致谢

最后,应当指出的是,物理毕竟不是数学,也不能夸大数学对物理的作用,应用数学时要注意关系式成立的条件,不能生搬硬套.

对物理成绩不佳的同学:如果数学学得好,那么本书正是为你而写;而即使你的数学成绩中等,稍加用心也能领会书中的许多巧妙解法,这是一套“疯狂物理”,假使成绩不好,“疯狂一把”也许会有逆袭的机会.

对备战高考的同学:本书的物理内容以力学和电磁学等高中物理主干部分为主,大部分习题难度定位于高考与竞赛初赛之间. “取法乎上,仅得其中”,故欲得其上,当取法乎上上.

对于竞赛选手(或预备参加自招考生):本书适合用于训练提高数学素养和竞赛入门.

由于作者掌握的材料有限,肯定有不少数理结合的精彩问题本书没有涉及,欢迎读者通过电子邮箱提供新素材(一些专题已在收集资料,预计再版时加入). 作者深感水平不足,本书可能存在错误或不妥之处,敬请同仁和读者给予指出和纠正(联系邮箱 liketosend@163. com).

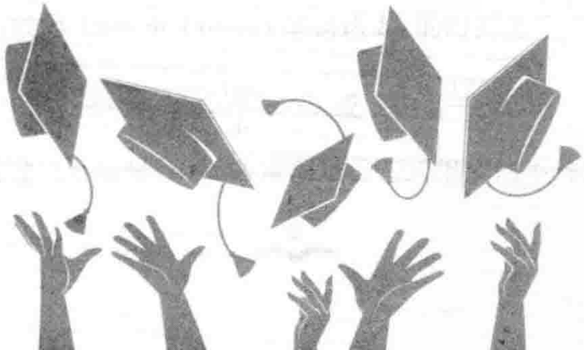
致谢:著名开源软件《寿星天文历》作者许剑伟老师参与讨论了书中的一些问题. 本书“微积分初步”一章中引用了莆田一中陈国文老师讲座中的材料. 陈文铸老师对本书的写作提出许多有益建议.

热切期望通过本书与读者分享数理融合所具有的内在科学美!

目 录

方法篇

方法篇



绪论　竞赛园地中的数理之花

物理竞赛题给人一般的印象也许是艰深枯燥的，但“无限风光在险峰”，崇尚智慧、勇攀高峰的选手，则可觅见竞赛高地中开放着数理结合的瑰丽奇葩，闪现着科学皇后的迷人风采．

下面仅从中撷取几朵小花，作为激活大家数学脑细胞的热身．

例 1　（第 25 届预赛）如图 0-1，在一条笔直的公路上依次设置三盏交通信号灯 L_1、L_2 和 L_3，L_2 与 L_1 相距 80m，L_3 与 L_1 相距 120m．每盏信号灯显示绿色的时间间隔都是 20s，显示红色的时间间隔都是 40s．L_1 与 L_3 同时显示绿色，L_2 则在 L_1 显示红色经历了 10s 时开始显示绿色．规定车辆通过三盏信号灯经历的时间不得超过 150s．

若有一辆匀速向前行驶的汽车通过 L_1 的时刻正好是 L_1 刚开始显示绿色的时刻，则此汽车能不停顿地通过三盏信号灯的最大速率是________m/s．若一辆匀速向前行驶的自行车通过 L_1 的时刻是 L_1 显示绿色经历了 10s 的时刻，则此自行车能不停顿地通过三盏信号灯的最小速率是________m/s．

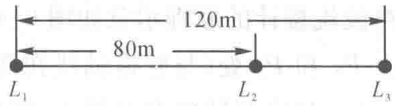


图 0-1

分析与解答　此题是第 25 届全国中学生物理竞赛预赛中的一道填空题，也许来源于生活中的一个问题：汽车如何可以不刹车连过几个红绿灯．因是填空题，发布的答案卷中只有答案，有不少同学甚至教师都不甚明白解答过程．下面借助大家以为简单的数轴显示出的威力给出一种漂亮的解答．

分析汽车通过 L_1 后开始计时的三盏信号灯显示红绿灯的时间点，用粗线表示显示红灯时间，细线表示显示绿灯时间，注意到总时间不超过 150s，画出三盏信号灯的红绿灯交替显示的时间轴，如图 0-2．

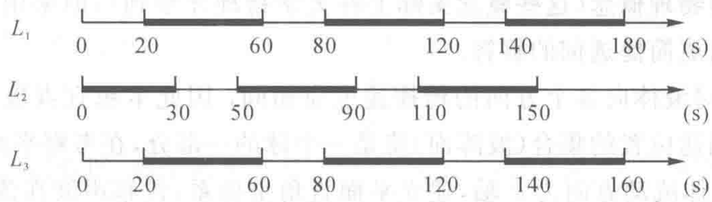


图 0-2

由图 0-2 中 L_2 信号灯变化的时间点可看出，汽车要不停顿地通过 L_2，到达 L_2 的时间必须在第 30s 至 50s 或第 90s 至 110s，设汽车行驶的速度为 v，汽车到达 L_2 的时间为 $\frac{L_1L_2}{v}=\frac{80}{v}$，则有

$$30\leqslant\frac{80}{v}\leqslant 50 \text{ 或 } 90\leqslant\frac{80}{v}\leqslant 110, \tag{①}$$

同上，由图 0-2 中 L_3 信号灯变化的时间点可看出，汽车要不停顿地通过 L_3，到达 L_3 的时间必须在第 0s 至 20s，或第 60s 至 80s，或第 120s 至 140s，汽车到达 L_3 的时间为 $\frac{L_1L_3}{v}=\frac{120}{v}$，则有

$$\frac{120}{v}\leqslant 20 \text{ 或 } 60\leqslant\frac{120}{v}\leqslant 80 \text{ 或 } 120\leqslant\frac{120}{v}\leqslant 140, \tag{②}$$

综上，汽车要不停顿地通过三盏信号灯，则必须满足①②式组成的不等式组：

$$\begin{cases}30\leqslant\frac{80}{v}\leqslant 50\text{ 或 }90\leqslant\frac{80}{v}\leqslant 110,\\ \frac{120}{v}\leqslant 20\text{ 或 }60\leqslant\frac{120}{v}\leqslant 80\text{ 或 }120\leqslant\frac{120}{v}\leqslant 140,\end{cases}\quad ③$$

化简得
$$\begin{cases}\frac{8}{5}\leqslant v\leqslant\frac{8}{3}\text{ 或 }\frac{8}{11}\leqslant v\leqslant\frac{8}{9},\\ v\geqslant 6\text{ 或 }\frac{3}{2}\leqslant v\leqslant 2\text{ 或 }\frac{6}{7}\leqslant v\leqslant 1,\end{cases}\quad ④$$

将不等式组④中 v 的范围在数轴上表示如下：

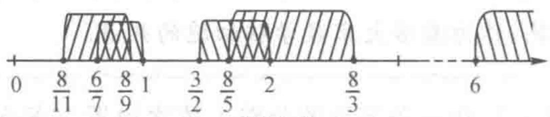


图 0-3

观察数轴上共有部分，得 $\frac{6}{7}\leqslant v\leqslant\frac{8}{9}$ 或 $\frac{8}{5}\leqslant v\leqslant 2$，故汽车最大速率为 2m/s.

采用类似方法分析第二问，可得 $\frac{12}{13}\leqslant v\leqslant 1$ 或 $2\leqslant v\leqslant\frac{12}{5}$，故自行车最小速率为 $\frac{12}{13}$ m/s.

讨论与总结 从数学集合的观点来看不等式组③，是先求几个集合的并集，再算其交集，数学教师看到后可能会感叹，这是考查集合应用的好题啊，怎么出现在物理竞赛试卷上！

例 2 （第 27 届预赛）超声波流量计是利用液体流速对超声波传播速度的影响来测量液体流速，再通过流速来确定流量的仪器. 一种超声波流量计的原理示意如图 0-4 所示. 在充满流动液体（管道横截面上各点流速相同）的管道两侧外表面上 P_1 和 P_2 处（与管道轴线在同一平面内），各置一个超声波脉冲发射器 T_1、T_2 和接收器 R_1、R_2，位于 P_1 处的超声波脉冲发射器 T_1 向被测液体发射超声脉冲，当位于 P_2 处的接收器 R_2 接收到超声脉冲时，发射器 T_2 立即向被测液体发射超声脉冲. 如果已知超声脉冲从 P_1 传播到 P_2 所经历的时间 t_1 和超声脉冲从 P_2 传播到 P_1 所经历的时间 t_2，又已知 P_1、P_2 两点的距离 l 以及 l 沿管道轴线的投影 b，管道中液体的流速 u 便可求得，试求 u.

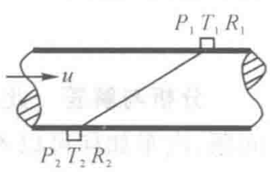


图 0-4

分析与解答 此题是第 27 届全国中学生物理竞赛预赛最后一题，有压轴的意味，提供的参考解答涉及绝对速度、相对速度等物理概念（这些概念实际上在大学物理才学到），但采用合适的数学方法可不涉及速度的矢量叠加，给出更简捷透彻的解答.

易确认的是声波相对液体向各个方向的传播速度应相同，因此本题宜直接选流动的液体作参照物（系），则声波在液体内到达位置的集合（波阵面）将是一个球的一部分，在考察平面内则为圆的一部分. 如图 0-5，以 P_1 为原点，液体流动方向为 x 轴，建立平面直角坐标系，设超声波在流体中的传播速度为 v，管道直径（高度）为 h，若以脉冲发射器 T_1 开始发射超声波的时刻为时间零点，t 时刻圆方程为

$$x^2+y^2=(vt)^2\ (-h\leqslant y\leqslant 0),\quad ①$$

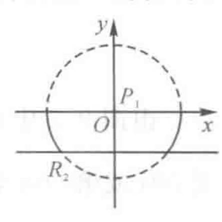


图 0-5

接收器 R_2 相对流体流速为 $-u$，t 时刻 R_2 坐标的参数方程为

$$\begin{cases}x=-b-ut,\\ y=-h,\end{cases}\quad ②$$

其中
$$h^2=l^2-b^2,\quad ③$$

当 $t=t_1$ 时，R_2 接收到超声波，即 R_2 落在圆上，把②式中 x、y 代入①式得

$$(-b-ut_1)^2+(-h)^2=(vt_1)^2,\quad ④$$

同样，脉冲发射器 T_2 发射的超声波到达的质点集合也为圆，若以脉冲发射器 T_2 开始发射超声波的

时刻为时间零点，圆心位置为$(-b,-h)$，t时刻圆方程为

$$(x+b)^2+(y+h)^2=(vt)^2 \quad (-h\leqslant y\leqslant 0), \tag{⑤}$$

t时刻接收器R_1坐标的参数方程为

$$\begin{cases} x=-ut, \\ y=0, \end{cases} \tag{⑥}$$

当$t=t_2$时，R_1接收到超声波，即R_1落在圆上，把⑥式中x、y代入⑤式得

$$(b-ut_2)^2+h^2=(vt_2)^2, \tag{⑦}$$

④⑦式两边分别相比即可消去未知数v，得

$$\frac{(-b-ut_1)^2+h^2}{(b-ut_2)^2+h^2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}, \tag{⑧}$$

展开⑧式，运算中注意到③式，不难算得

$$u=\frac{l^2}{2b}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right). \tag{⑨}$$

例3 （第35届预赛）田径场上某同学将一铅球以初速度v_0抛出，该铅球抛出点的高度为H. 铅球在田径场上的落点与铅球抛出点的最大水平距离为________，对应的抛射角为________，重力加速度为g.

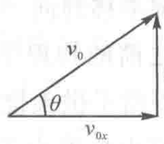


图 0-6

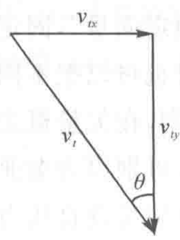


图 0-7

分析与解答　注意到铅球以任何角度抛出，落地时的末速度大小$v_t=\sqrt{v_0^2+2gH}$是确定的，如图0-6和图0-7，设初速度v_0和末速度v_t在水平、竖直方向上分速度大小分别为v_{0x}、v_{0y}和v_{tx}、v_{ty}，则铅球在空中运动时间为

$$t=\frac{v_{0y}+v_{ty}}{g}, \tag{①}$$

落点与铅球抛出点水平距离为 $$x=v_{0x}t, \tag{②}$$

由①②式得 $$x=\frac{v_{0y}v_{0x}+v_{0x}v_{ty}}{g}, \tag{③}$$

注意到$v_{0x}=v_{tx}$，将③式变形，利用柯西不等式$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，

$$x=\frac{v_{0y}v_{tx}+v_{0x}v_{ty}}{g}\leqslant\frac{\sqrt{(v_{0y}^2+v_{0x}^2)(v_{tx}^2+v_{ty}^2)}}{g}=\frac{v_0v_t}{g},$$

即落点与铅球抛出点的最大水平距离$x_m=\dfrac{v_0v_t}{g}=\dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gH}$.

根据柯西不等式取极值时的条件，抛得最远时有

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=\frac{v_{tx}}{v_{ty}},$$

则图0-6和图0-7中两个速度矢量三角形相似，设此时抛射角为θ，有

$$\tan\theta=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=\frac{v_0}{v_t},$$

$$\theta=\arctan\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gH}}.$$

第一章　矢量与向量

第一节　矢量与向量的来源及引入

一、矢量与向量的来源和简史

“矢量”译自英语“vector”，矢就是箭（成语“有的放矢”），矢量如一根箭一样有头部和尾部，翻译得很贴切．数学中有一套关于矢量的理论，不过数学中叫“向量”，同学们将在数学必修4的课程中开始学习向量．

不过，高中数学中的向量和物理中的矢量还是略有区别的，数学中的“向量”都是指“自由向量”，对于自由向量，即使起点不一样，只要大小相等，方向相同，就是同一个向量．而物理学中的矢量有些是自由向量，如物理学中的“位移”．有些是“固定向量”，固定向量除了大小、方向，还有作用点，如“力”．（如果不考虑力产生的转动效应，在受力分析时也可以把不同的力都平移到同一个作用点．）

力和速度合成的平行四边形法则，在矢量概念出现之前的物理学研究中就已有揭示，亚里士多德已经提出运动合成的平行四边形法则（可别以为老亚都是搞错了供人批判的），伽利略和牛顿都清楚地叙述了两力合成的平行四边形法则，但他们都没有从力或速度中抽象出矢量数学概念，把平行四边形法则看作两个向量的加法．

矢量这个术语作为现代数学、物理学中一个重要概念，首先是由英国数学家哈密顿在1845年创造使用的．但向量理论不是一蹴而就的，是在丰富的物理原型基础上及与数学其他分支理论对比选择的过程中，经过许多著名数学家、物理学家的应用和改进，逐渐发展起来的，经历了一个创立演变、发展完善的过程．

一方面，运用矢量的运算规则来描述物理规律更加简洁、普遍、准确，向量成为研究物理问题的有力工具；另一方面，正是向量工具在物理学中广泛成功的应用促进了向量理论的迅速发展和完善，现代意义上的向量概念其内涵已比物理中的矢量概念丰富、深刻得多，渗透到数学的各个领域，在物理学、力学、天文学、生物力学、信息技术等众多领域也已得到广泛应用．

在当今信息时代和高科技时代，矢量已是一个时髦的名词，计算机中有矢量图，飞机有矢量发动机，甚至某新产品推介中也会听到“矢量”的概念．能冠以矢量的名词是因为有一个基本属性：沿着空间（这个空间可能是多维的）某一个方向，有大小．而在物理学中矢量早就是一个基本概念，数学家、物理学家们似乎很超前，这正体现着他们描述研究问题高明而简洁的处理方法和光辉的思想．

二、矢量概念的引入

向量或矢量的起点是概念教学，对概念的理解水平很大程度上影响着初学者对后继内容的学习．下面设计了一个教学对话来导入．

三、位移概念与矢量的引入

如图1-1-1，某次演习中战车基地设在一大片平整旷野中，车队接到一号命令“向东前进1km”，执行完一号命令后，又接到二号命令“往北前进1km”．执行完两个命令共用了100s．

师：“在以往数学行程问题中，提出的问题往往是，车队共行进了多少米，平均速度是多少？”

生（计算后，回答）：“答案是共行进了2km，平均速度为20m/s．”

师："这 2km 路程只是后勤部门所关心的，可能涉及油量是否足够等小问题. 但战场指挥官更关心的是战车的位置，并在地图上标示，可能关系到是否在某火力点的打击范围内等关键问题，应当如何报告战车现在位置呢？"

生(画图并计算)："在基地北偏东 45 度，离基地约 1414m 处."

师(总结)："要报告战车的位置必须指明方向，离基地的距离，是一个需要指明方向和大小的量，这样的量就是矢量，这个表示位置变化的矢量叫位移.

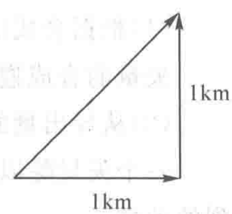


图 1-1-1

报告给后勤部门只需要一个数量 2km，这样的量叫标量，你们第一次回答的是"路程"，20m/s 在物理中叫平均速率. 注意，和路程对应的是平均速率，以后不能再叫平均速度了，那物理中的平均速度应该是多少呢？"

生(思考后猜测)："应该是 14.14m/s."

师："对，和位移对应的才是平均速度."

师："在这个物理情景中，对于位移这个新概念，我们还应注意到以下问题：

(1)我们刚才在计算位移的时候，要画出示意图，一个命令用一条带箭号的线段表示，即有大小和方向的有向线段，因此，像位移这样的矢量可以用有向线段表示.

(2)车队中每辆战车的位移都一样，鉴于我军令出必行的优良传统，我们可以把位移形象地理解为一个'命令'，每辆战车在同一命令下位移都是一样的. 因此，位移在物理学中只表示质点位置的变化，与质点实际的运动起点和路线无关.

(3)还有，在这个例子中，要让战车到达指定位置，实际上只要下一个命令，就可以达到前面两个命令的效果，这个命令可以怎么下呢？"

生："向北偏东 45 度，前进 1414m."

师："这里面蕴含着两个矢量叠加的运算法则."

板书：

路程 1：1km，

路程 2：1km，

总路程：2km.

位移 1：向东前进 1km，

位移 2：向西前进 1km，

位移 3：向北偏东 45 度，前进 1414m.

师："回顾刚才的计算过程，我们还注意到，计算总路程时，只要两个数量直接相加."

位移 3 的效果等于位移 1 和位移 2 的叠加，叠加结果的计算过程必须通过几何关系表达. 下一节我们将抽象出两个矢量的加法运算.

阅读材料：物理量类型的区分

1. 矢量与标量

1.1 区分

矢量也称向量，它既有大小，又有方向，可以用有箭头的线段来表示. 箭头的指向代表矢量的方向，线段的长度则按规定的比例尺画出，代表矢量的大小. 有些物理量是由大小和方向才能完全确定，这些物理量之间的运算并不遵循一般的代数法则，在相加减时它们遵从几何运算法则，即平行四边形法则，这些物理量称为物理矢量. 例如位移、力、速度、加速度、电场强度等等. 许多物理定律可用矢量表示成简洁的形式，这样做往往使这些定律表达大大简化.

用一个数和一个单位就能完全确定，因而只有数值大小，没有方向的量称为标量. 作为标量的物理量

有质量、长度、时间等. 所有标量都可以用普通的代数法则来运算.

矢量与标量的区别虽然定义已经说得很明白,但在实际教学中发现,不少学生在判断一个新物理量是矢量还是标量时仍会感到困难. 可注意再从下面几点进行区分:

(1)根据合成法则判断

矢量的合成遵循平行四边形法则,标量的合成只是代数和.

(2)从导出量的来源判断

一个矢量除以或乘以一个标量得到的量必是矢量. 如速度除以时间得到的加速度,质量乘以速度得到的动量.

1.2 注意点

(1)说两个矢量相等,必须是大小相等,方向相同.

(2)联系:为了研究的需要,有时只关心矢量的大小,不计方向,可从不计方向的矢量产生出标量,如由速度产生出的速率.

(3)对于矢量的运算,应注意灵活运用几何知识.

2. 绝对量与相对量

2.1 区分

按物理量的描述程度区分,绝对量是指相对任何参照系(物)都确定不变的量. 如时间、长度、质量、密度. 相对量是指大小、方向与选取的参照系有关的量,如速度、加速度、动量、动能等.

2.2 注意点

(1)对于相对量一定要清楚是相对哪一个参照系,尽管有时默认是相对地面而不特别说明.

(2)比较两个相对量的大小必须相对于同一参照系(物).

(3)在运用有关动量的定理定律解题时,必须选定同一参照物,才能给出动量的正确表达式.

2.3 教学建议

(1)对速度等相对量,可以举如二战中德国飞行员曾用手抓住子弹、鸟能撞坏飞机等例子,以加深印象.

(2)作为拓宽知识面和为后续相对论初步作预备,可向学生介绍,实际上时间、质量也会因参照系的不同而不同,这最早是由爱因斯坦揭示的,怪不得他的理论会叫相对论. 在相对论中只有真空中的光速是绝对的. 现在高中新教材中已经出现相对论初步知识,从深入理解相对量与绝对量的区分入手,有助于突破牛顿力学的思维束缚,了解相对论的时空观.

(3)在牛顿第二定律适用的范围内,原则上惯性参照物是可以任意选择的,因此,解题中应注意灵活选择参照物.

3. 状态量(瞬时量)与过程量

3.1 区分

按描述对象的功能可分为状态量与过程量. 状态量是描述研究对象在某时刻或处于某位置的物理量,直接描述物体和物质(包括场)的状态的物理量,如即时速度、动能、动量、即时功率、气体的压强、瞬时电动势等,电磁学中描述电磁场的电场强度、电势、磁感应强度等也是状态量;过程量是描述过程的物理量,总是与一定时间、空间间隔相联系,如位移、功、冲量、热量等.

要真正透彻理解瞬时速度等瞬时量,必须了解极限等数学思想.

3.2 联系

一些状态量的时间累积或空间累积就构成过程量,如力的时间累积构成冲量,力的空间累积构成功.

3.3 教学建议

要注意物理公式中一些状态量间的瞬时对应关系. 如 $F=ma$ 中的合力与加速度,$P=Fv$ 中的即时功率与即时速度.

3.4 典型例题

例 1 判断正误:

(A)动能越大的物体,做功越多.

(B)温度越高的物体含热量越多.

(C)内能越大的物体含热量越多.

解:以上说法均错.

例 2 一质量为 1kg 小球从高空自由下落,求下落第 2 秒末重力做功的即时功率.

略解:第 2 秒末瞬时速度 $v=gt$,重力 $G=mg$, 即时功率 $P=Gv=mg^2t=192.08\text{W}$.

例 3 如图 1-1-2,甲、乙两物体质量相等,用细线系在一起,其中物体甲又用细线系在天花板上,自然下垂,现把细线 OA 突然烧断. 问:在细线 OA 烧断的瞬间,甲物体的瞬时加速度大小是多少? 乙物体的瞬时加速度大小是多少?

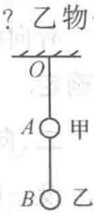


图 1-1-2

分析与解答 要计算物体的瞬时加速度,必须分析物体在此"瞬时"受到的合外力.

设物体质量为 m,将 AB 间的细线想象成"弹簧",自然下垂时,此"弹簧"的弹力大小为 mg,在 OA 突然烧断的瞬间,此"弹簧"未及收缩,伸长长度不变,故弹力大小不变,仍为 mg. 受力分析易知,甲物体受到的合外力为重力加弹力,大小为 $2mg$,乙物体受到的合外力大小为 0,所以甲物体的瞬时加速度大小为 $2g$, 乙物体的瞬时加速度大小为 0.

4. 宏观量与微观量

4.1 区分

按物理量描述物质世界的空间尺度可分为宏观量与微观量,在热学中要注意区分这两种量. 宏观量也叫统计量,是指大量微观粒子所表现出来的宏观性质的物理量,如气体压强、温度等. 好像社会科学中"民族的凝聚力",是指某个民族集体表现出来的特征,不是单个人的行为特征. 微观量是描述微观粒子(分子或原子)个体特征的量,如分子质量、分子运动速率等.

4.2 注意点

不能说一个分子的温度、压强或内能.

5. 基本物理量与导出物理量

物理量按国际单位制还可分为基本物理量与导出物理量:基本物理量是经过科学的规定而确定的反映物质本质属性或状态的定量概念. 基本物理量不是用其他物理量来定义的,它的数目应该是能融洽一致地、明确地描述物理学中所有各量所必需的最小数目. 目前,国际单位制中采用的基本物理量有七个,即长度、质量、时间、电流、热力学温度、发光强度和物质的量. 它们的计量单位分别是米、千克、秒、安培、开尔文、坎德拉和摩尔. 导出物理量是以基本物理量为基础,按照某种定义或根据有关公式推导出来的物理量. 因此,一切导出量都可以用基本物理量的组合方式来表达. 如在力学中,所有的物理量都可以用长度、质量和时间这三个基本量导出. 在电学中,再加上电流这一基本量,就可以导出所有的电学物理量.

本节练习

1. 在本节引入的例子中,如果战车执行两个命令后,位于基地偏西方向 1000m 处,已知其中一个命令是"向南前进 1000m",则另一个命令是什么?

第二节　向量的数学概念及基本运算

一、有向线段

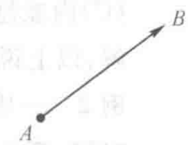


图 1-2-1

如图 1-2-1，在线段 AB 的两个端点中，我们规定一个顺序，A 为起点，B 为终点，我们就说线段 AB 具有射线 AB 的方向，具有方向的线段叫作有向线段，通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向，以 A 为起点，B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$，注意写法：起点要写在终点的前面.

已知$\overrightarrow{AB}$，线段 AB 的长度也叫作有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度（或叫作模），$\overrightarrow{AB}$的长度记作$|\overrightarrow{AB}|$.

有向线段包含三个要素：起点、方向、长度. 知道了有向线段的起点，它的终点被它的方向和长度所唯一确定.

二、向量

设一质点，由点 A 移动到点 A'，它的移动方向是“北偏东 45°”，移动大小是“3 个单位”. 在物理中，这种表明了位置变化的方向和大小的量叫位移；在数学中，可用有向线段$\overrightarrow{AA'}$来表示，$\overrightarrow{AA'}$的方向表示位移的方向.

位移在物理学中只表示质点位置的变化，与质点实际的运动起点和路线无关，我们可以把位移形象地理解为一个“口令”，例如，部队首长向他的全体战士发出口令“向东走 5 步”，就是一个位移，这个位移与每个战士的开始所在位置无关，换句话说，每个战士在同一口令下位移都是一样的. 因此，矢量是可以平移的，即大小相等方向平行的矢量是相同的矢量.

像位移这样既有大小又有方向的量在数学中叫作向量，一个向量可用一条有向线段来表示，如果$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$（下面也用加粗的小写字母表示向量），那么$\overrightarrow{AB}$的长也就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，又叫作 a 的长（或模），记作$|\boldsymbol{a}|$.

长度等于零的向量，叫作零向量，记作 $\mathbf{0}$，零向量的方向不确定.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向且等长，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 就相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

三、向量的加法

1. 两个向量的加法

如图 1-2-2，如果一个质点由点 A 位移到点 B（用$\overrightarrow{AB}$表示），又由点 B 位移到点 C（用$\overrightarrow{BC}$表示），那么显然存在一个从点 A 到点 C 的位移（用$\overrightarrow{AC}$表示）与上面连续两次位移的结果相同，这时，我们就说，质点从 A 到 C 的位移是质点由 A 到 B 再由 B 到 C 两次位移的和.

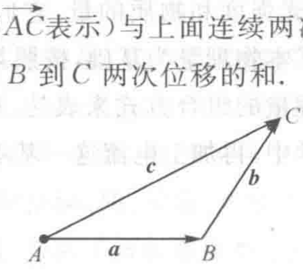


图 1-2-2

由此,我们引出向量的加法法则(以下暂用小写加粗字母表示向量):已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,在平面上任取一点 A 作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,作向量$\overrightarrow{AC}$,则向量$\overrightarrow{AC}$叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

上述两个向量和的作图法叫作求和的三角形法则.

向量的加法满足交换律,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

证明 如图 1-2-3,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则有$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

再作$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则四边形 $ABCD$ 是平行四边形,于是向量$\overrightarrow{DC}$与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向且等长,即$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$.

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

从以上证明过程中,我们可以得到求作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的另一种方法:

作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$为邻边作▱$ABCD$,则对角线上的向量$\overrightarrow{AC}$就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这个法则叫作平行四边形法则.

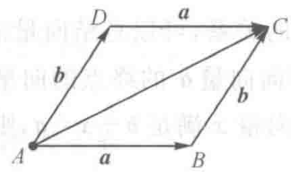


图 1-2-3

应用 对于上节的位移问题,我们抽象为这样的数学问题:向量 $\boldsymbol{a}$="向东行 1000m",向量 $\boldsymbol{b}$="向北行 1000m",求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

解答 如图 1-2-4,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$AB=BC=1000\text{m}$,应用三角形法则,

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1000^2+1000^2}=1000\sqrt{2}\,\text{m}.$$

两个法则实质上是相同的,应用时注意不同的要点:三角形法则要首尾相连,平行四边形法则要同一起点.

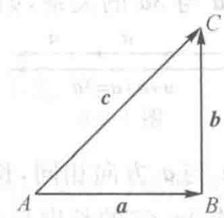


图 1-2-4

2. 多个向量的加法

对于三个或三个以上向量的求和法则,可根据两个向量的求和法则推广如下:

已知向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,在平面上任取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}_1$,然后以 A_1 为起点,作$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$,再以 A_2 为起点作$\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3$,依次下去,我们可得到由 n 条有向线段构成的一条折线,以第一条有向线段的起点为起点,第 n 条有向线段的终点为终点的有向线段所表示的向量就是这 n 个向量之和,如图 1-2-5.

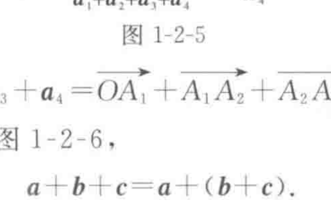


图 1-2-5

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}.$$

多个向量的加法还满足结合律,如图 1-2-6,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$