

高等学校教材

工程数学

线性代数

同济大学数学教研室编



高等教育出版社

高等学校教材

工程数学

线性代数

同济大学数学教研室 编

高等教育出版社

出版前言

本书是由同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978年第1版)第十三章线性代数改编而成的。改编者系同济大学骆承钦同志,他参照了1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《工程数学教学大纲》,对原教材作了较多的修改与补充,以期更适合高等工业院校作为教材使用,也可作为工程技术人员自学用书。本书修订稿仍由陆子芬教授任主审,参加一起审稿的还有盛骤、孙玉麟等同志。

本书内容为 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等,书末还附有习题答案。

责任编辑 丁鹤龄

高等学校教材

工程数学

线性代数

同济大学数学教研室 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张4.875 字数110 000

1982年3月第1版 1989年8月第15次印刷

印数 1 573 410-1 678 420

ISBN 7-04-001262-6/O·412

定价 1.20 元

编者的话

同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978年第1版)年前决定修订再版,其中的第十三章线性代数决定单独成书,以便应用。为此,由同济大学骆承钦同志把《高等数学》第十三章改编成本书。在改编时,对原教材作了较多的修改与补充,以期能较为符合1980年制订的教学大纲的要求。

本书介绍线性代数的一些基本知识,可作为高等工业院校工程数学《线性代数》课程的试用教材或教学参考书。本书前五章教学时数约34学时,第六章较多地带有理科的色彩,供对数学要求较高的专业选用。各章配有少量习题,书末附有习题答案。

参加本书审稿的有上海海运学院陆子芬教授(主审)、浙江大学盛骤、孙玉麟等同志。他们认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢。

编者

一九八一年十一月

目 录

编者的话

第一章 n 阶行列式	1
§ 1 全排列及其逆序数	1
§ 2 n 阶行列式的定义	3
§ 3 对换	6
§ 4 行列式的性质	8
§ 5 行列式按行(列)展开	13
§ 6 克莱姆法则	19
习题一	22
第二章 矩阵及其运算	25
§ 1 线性变换与矩阵	25
§ 2 矩阵的运算	27
§ 3 逆阵	35
§ 4 矩阵分块法	39
习题二	43
第三章 向量组的线性相关性与矩阵的秩	46
§ 1 引例	46
§ 2 n 维向量	49
§ 3 线性相关与线性无关	50
§ 4 向量组的秩	57
§ 5 矩阵的秩	60
§ 6 矩阵的初等变换	65
§ 7 初等方阵	67
§ 8 向量空间	71
习题三	75
第四章 线性方程组	78
§ 1 齐次线性方程组	78

§ 2 非齐次线性方程组	82
§ 3 利用矩阵的初等行变换解线性方程组	85
习题四	89
第五章 相似矩阵及二次型	91
§ 1 预备知识: 向量的内积	91
§ 2 方阵的特征值与特征向量	97
§ 3 相似矩阵	101
§ 4 实对称矩阵的相似矩阵	103
§ 5 二次型及其标准形	109
§ 6 用配方法化二次型成标准形	115
§ 7 正定二次型	116
习题五	119
第六章 线性空间与线性变换	121
§ 1 线性空间的定义与性质	121
§ 2 维数、基与坐标	125
§ 3 基变换与坐标变换	128
§ 4 线性变换	131
§ 5 线性变换的矩阵表示式	135
习题六	140
习题答案	143

第一章 n 阶行列式

在初等数学中讨论过二阶、三阶行列式,并且利用它们来解二元、三元线性方程组.为了研究 n 元线性方程组,需要把行列式推广到 n 阶,即讨论 n 阶行列式的问题.为此,下面先介绍全排列等知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

§1 全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例 用 1、2、3 三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这个问题相当于说,把三个数字分别放在百位、十位与个位上,有几种不同的放法?

显然,百位上可以从 1、2、3 三个数字中任选一个,所以有 3 种放法;十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有 2 种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有 1 种放法.因此,共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种放法.

这六个不同的三位数是:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

在数学中,把考察的对象,例如上例中的数字 1、2、3 叫做元素.上述问题就是:把 3 个不同的元素排成一列,有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素,也可以提出类似的问题:把 n 个不同的元素排成一列,有几种不同的排法?

把 n 个不同的元素排成一列, 叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数, 通常用 P_n 表示. 由引例的结果可知 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

为了得出计算 P_n 的公式, 可以仿照引例进行讨论:

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上, 有 n 种取法;

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上, 有 $n-1$ 种取法;

这样继续下去, 直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上, 只有 1 种取法. 于是

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

对于 n 个不同的元素, 我们规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数, 可规定由小到大为标准次序), 于是在这 n 个元素的任一排列中, 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时, 就说有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列, 逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面我们来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性, 不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数, 并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列, 考虑元素 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$, 如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个, 就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i . 全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i$$

即是这个排列的逆序数。

例 1 求排列 32514 的逆序数。

解 在排列 32514 中,

3 排在首位, 逆序数总为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个 (3), 故逆序数为 1;

5 是最大数, 逆序数总为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个 (3、2、5), 故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个 (5), 故逆序数为 1;

于是排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

§ 2 n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义, 我们先研究三阶行列式的结构。

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1)$$

容易看出:

(i) (1) 式右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同的行、不同的列。因此, (1) 式右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 。这里第一个下标 (称行标) 排成标准排列 123, 而第二个下标 (称列标) 排成 $p_1p_2p_3$, 它是 1、2、3 三个数的某个排列。这样的排列共有 6 种, 对应 (1) 式右端共含 6 项。

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123, 231, 312;

带负号的三项列标排列是: 132, 213, 321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$, 其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 t 为排列 $p_1 p_2 p_3$ 的逆序数, \sum 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 取和.

仿此,我们可以把行列式推广到一般情形.]

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$, 得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (2)$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 1, 2, \cdots , n 的一个排列, t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(2)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\Delta(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

用此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的。当 $n=1$ 时， $|a| = a$ ，注意不要与绝对值记号相混淆。

例 2 证明对角行列式（其中对角线上的元素是 λ_i ，未写出的数都是 0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

证 第一式是显然的，下面只证第二式。

若记 $\lambda_i = a_{i, n-t+1}$ ，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & & \\ & & a_{2, n-1} & \\ & & & \ddots \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} \\ = (-1)^t a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{证毕}$$

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角行列式，它的值与对角行列式一样。

例 3 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & 0 \\ & \dots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j > i$ 时, $a_{ij} = 0$, 故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip} , 其下标应有 $p_i \leq i$, 即 $p_1 \leq 1, p_2 \leq 2, \dots, p_n \leq n$.

在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中, 能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12 \cdots n$, 所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t = (-1)^0 = 1$, 所以

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

§ 3 对 换

为了研究 n 阶行列式的性质, 我们先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中, 将任意两个元素对调, 其余的元素不动, 这种作出新排列的手续叫做对换. 将相邻两个元素对调, 叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$, 对换 a 与 b 排列变为 $a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$. 显然, $a_1, \dots, a_i; b_1, \dots, b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变; 而 a, b 两元素的逆序数改变为: 当 $a < b$ 时, 经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变; 当 $a > b$ 时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$, 把它作 m 次相邻对换, 调成 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$, 再调成 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$, 作了 $m+1$ 次相

邻对换。总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 调成排列 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$ ，所以这两个排列的奇偶性相反。

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数。

证 由定理知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立。 证毕

利用定理 1，我们来讨论行列式定义的另一种表示法。

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列， t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数，对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

这时，行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换，设新的行标排列 $1 \cdots j \cdots i \cdots n$ 的逆序数为 r ，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1 ，则 $(-1)^{t_1} = -(-1)^t$ 。故 $(-1)^t = (-1)^{r+t_1}$ ，于是

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = (-1)^{r+t_1} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性。经一次对换是如此，经多次对换当然还是如此。于是，经过若干次对换，使：

列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ (逆序数为 t) 变为自然排列 (逆序数为 0)；

行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1 q_2 \cdots q_n$ ，其逆序数为 s ，则有

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

又，若 $p_i = j$ ，则 $q_j = i$ (即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$)。可见排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 由排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 所唯一确定。

由此可得

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

证 按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

记
$$D_1 = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

按上面讨论知: 对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$, 总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等; 反之, 对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$, 也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1 q_1} a_{2 q_2} \cdots a_{n q_n}$ 与之对应并相等, 于是 D 与 D_1 中的项可以一一 应并相等, 从而 $D = D_1$.

§ 4 行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D = \Delta(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \cdots, n$), 按定义

$$D' = \sum (-1)^t b_{1 p_1} b_{2 p_2} \cdots b_{n p_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

而由定理 2, 有

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

故

$$D' = D.$$

证毕

由此性质可知, 行列式中的行与列具有同等的地位, 行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立, 反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

证 设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D = \Delta(a_{ij})$ 交换 i, j 两行得到的, 即当 $k \neq i, j$ 时, $b_{kp} = a_{kp}$; 当 $k = i, j$ 时, $b_{ip} = a_{jp}$, $b_{jp} = a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列, t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数.

设排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1 , 则 $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$, 故

$$D_1 = -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D. \quad \text{证毕}$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行, 以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同, 则此行列式为零.

证 把这两行互换, 有 $D = -D$, 故 $D = 0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式. (第 i 行乘以 k , 记作 $r_i \times k$)

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面. (第 i 行提出公因子 k , 记作 $r_i \div k$)

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和(例如第 i 列的元素都是两数之和):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去, 行列式不变. 即(例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上, 并记作 $c_i + kc_j$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (i \neq j).$$

以上诸性质请读者证明之。利用这些性质可简化行列式的计算。

例 4 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_4 + 5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_4 - 8r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 + \frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

例 5 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6。今把第 2、3、4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第一行：