运筹学基础

张　莹

清华大学出版社

运筹学基础

张 莹 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书包括运筹学中最基本、应用最广泛的七个部分：线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、决策分析。其中以线性规划、非线性规划为重点。全书七部分共详细介绍了 50 余种实用算法，配有近百个不同类型、不同解法的例题，还有结合各行各业的应用实例。各部分均有习题，附录中有常用算法的 FORTRAN 语言程序。

本书基本概念、基本原理清晰，内容丰富，实用性强，易于自学，适合作高等院校工科专业的《运筹学》、《运筹学基础》、《最优化技术基础》课程的教材，也可供各行各业的工程技术人员、管理人员、高等院校师生自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础/张莹编著．—北京：清华大学出版社，1994
ISBN 7-302-01669-0

Ⅰ．运…　Ⅱ．张…　Ⅲ．运筹学　Ⅳ．022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 13312 号

出 版 者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
责任编辑：王仁康
印 刷 者：北京市海淀区清华园印刷厂
发 行 者：新华书店总店科技发行所
开　　本：787×1092 1/16　印张：20.25　字数：475 千字
版　　次：**1995 年 4 月第 1 版　1995 年 4 月第 1 次印刷**
书　　号：ISBN 7-302-01669-0/F·101
印　　数：0001—5000
定　　价：11.70 元

前　　言

运筹学，即通常说的管理科学或最优化技术，它广泛应用于机械、电力、电子、计算机、自动化、纺织、化工、石油、冶金、矿山、汽车、建筑、水利、交通运输、邮电通信、环境保护、轻工、农业、林业、商业、国防、政府部门等许多方面，可以说是无所不在。它可以解决诸如最优计划、最优分配、最优设计、最优管理、最优决策等各行各业的最优化问题。要提高经济效益，要实现科学的管理与决策，不懂得运筹学是不行的。因此，无论学什么专业，也无论从事什么工作，学习一些运筹学基础知识，都是必要的。

近年来，一大批工科专业纷纷增设了运筹学类课程，社会上也出现了自学运筹学的热潮。本书正是为高等院校工科专业编写的运筹学教材，也适合于社会上各行各业的工程技术人员、管理人员自学参考。

运筹学主要包括确定型、概率型两大类模型。二者相比，前者为基本与重点，应用也更加广泛。本书的前六个部分是：线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析，基本包括了各种确定型模型，其中又以线性规划、非线性规划为重点，因为对工科专业和社会上最广大的读者而言，这两部分应用得最多。本书的第七部分是决策分析，这是运筹学中最典型、应用最普遍、最有发展前景的一个概率型模型。讲决策分析，旨在以点带面，使读者在全面学习确定型模型的同时，对概率型模型也有重点而深入的了解。本书的七个部分覆盖了运筹学的大部分内容，讲授全书约需 60 学时。

本书在阐述基本概念与原理时力求清晰、透彻，部分主要定理有证明，各种基本算法有推导过程。书中共详细介绍了 50 余种实用的基本算法，还有结合各行各业的应用实例及常用算法的 FORTRAN 语言程序，这些都能有效地解决实际的最优化问题。为了便于自学，作者对全书的顺序作了尽可能合理的安排。对学习运筹学所必需的线性代数、概率论的基本知识作了扼要的介绍与复习。对每个基本算法，都配了例题。全书共有近百个不同类型、不同解法的例题。参照例题的详细求解过程，读者可以比较容易地理解基本算法，并学会应用基本算法。在详细求解例题的过程中，作者特别注意总结规律性的东西，抽象出一般原则与方法，以便举一反三。书中还经常将同一个例题用多种不同的算法去求解，这不仅有助于学习各种算法，而且有助于比较各种算法，做到融会贯通。相信广大读者学习本书后，能较快掌握运筹学的基本知识，并应用到本行业的实际工作中。

运筹学属于技术基础课，作者在清华大学自动化系讲授该课已经 15 年了。其间，曾与范鸣玉副教授合作编著过《最优化技术基础》(1982 年由清华大学出版社出版)教材，后来作者又编著了《运筹学基础》讲义。本书是在该讲义的基础上补充、修改而成，力求为读者提供一本内容丰富、实用性强、易于自学、质量较高而学时较少的教材。

本书得以顺利出版，与很多人的支持密不可分，尤其是范鸣玉副教授，曾给作者以极大的帮助。在长期的教学过程中，作者从许多国内外学者的著作中汲取了营养，本书直接或间接地引用了他们的部分成果(详见书末参考文献)。在此一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请指教。

作　者

1994年8月于清华大学

绪　　论

运筹学作为一门学科诞生于 20 世纪 30 年代末期。被称为运筹学的活动通常认为是第二次世界大战早期由军事部门开始的。当时，英国为了研究“如何最好地运用空军及最新发明的雷达保卫国家”，成立了一个由各方面专家组成的交叉学科小组，这就是最早的运筹学小组，它的任务是进行“运用研究”(Operational Research)。后来，美国从事这方面研究的科学家又称之为“Operations Research”，该名字广泛使用至今。

第二次世界大战期间，英国和美国的军队中都有运筹学小组，它们研究诸如护航舰队保护商船队的编队问题；当船队遭受德国潜艇攻击时，如何使船队损失最小的问题；反潜深水炸弹的合理起爆深度问题；稀有资源在军队中的分配问题等等。研究了船只受到敌机攻击时应采取的策略后，它们提出了大船应急转向，小船应缓慢转向的躲避方法，该研究成果使船只的中弹率由 47%降低到 29%；研究了反潜深水炸弹的合理起爆深度后，德国潜艇的被摧毁数增加到原来的 400%。当时的英国空中战斗、太平洋岛屿战斗、大西洋北部战斗等一系列战斗的胜利，被公认为与运筹学密切相关。运筹学在军事上的显著成功，引起了人们广泛的关注。第二次世界大战结束后，运筹学很快深入到工业、商业、政府部门等，并得到了迅速发展。

运筹学发展到今天，内容已相当丰富，分支也很多，可以根据所解决问题的主要特征将其分为两大类：确定型模型和概率型模型。确定型模型主要包括：线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络；概率型模型主要包括：决策论、对策论、排队论、存贮论等。上述分类只是一种习惯的分法，并不十分严格，部分内容有交叉。

现在，运筹学已广泛应用于各个领域，诸如市场预测与销售、生产计划与调度、库存管理、设备更新与可靠性、工程的优化设计、资源分配、运输问题、企业管理、人事管理、城市管理、计算机与信息系统、决策咨询、财政与会计等等。

1957 年，我国在建筑业和纺织业中首先应用运筹学。从 1958 年开始在交通运输、工业、农业、水利建设、邮电等方面陆续得到推广应用。比如，粮食部门为解决粮食的合理调运问题，提出了“图上作业法”，我国的运筹学工作者从理论上证明了它的科学性；在解决邮递员合理投递路线时，管梅谷提出了国外称之为“中国邮路问题”的解法。从 60 年代起，运筹学在钢铁和石油部门开始得到了比较全面、深入的应用。从 1965 年起统筹法在建筑业、大型设备维修计划等方面的应用取得可喜的进展。从 1970 年起在全国大部分省、市和部门推广优选法。70 年代中期，最优化方法在工程设计界受到广泛的重视，并在许多方面取得成果。排队论开始应用于矿山、港口、电讯及计算机设计等方面。图论用于线路布置、计算机设计、化学物品的存放等。70 年代后期，存贮论应用于汽车工业等方面并获得成功。近年来，运筹学已趋向研究和解决规模更大、更复杂的问题，并与系统工程紧密结合。

应用运筹学解决问题时，一般有以下特点：第一个特点是从全局的观点看问题，追求总体效果最优。例如，第二次世界大战结束后，随着工业的迅猛发展，许多企业转变为多种

经营，组织机构迅速扩大，内部分工更加复杂，致使上层领导很快对整个企业失去控制，不得不进行分区管理。对整个企业进一步划分的结果，使每一部门只关心自己的利益，不考虑企业的其它部门。这样就使潜在的总效能的发挥受到很大的限制。因此，企业组织了包括各方面专家在内的运筹学小组，在承认企业内按职能划分部门的必要性的基础上，帮助上层领导使企业的总效能达到最优。第二个特点是通过建立与求解模型，使问题在量化的基础上得到合理的决策。这里所说的模型有三种基本形式：形象模型、模拟模型、符号或数学模型。目前应用最多的是数学模型。在建立与求解模型的过程中，总要用到一些数学方法和技巧，要进行定量分析。如果模型能较好地表示实际问题，则模型的解将是问题的较好解。第三个特点是多学科交叉。因为要解决的实际问题来自各行各业各个不同的领域，故建立与求解模型时，不可避免地要涉及到各方面的科学技术知识和方法。尤其是那些大而复杂的系统，往往是政治、经济、技术、社会、心理、生态等多种因素交织在一起，再加上决策者的参与，多学科交叉的特点十分明显。第四个特点是与计算机密切相关。历史表明：没有计算机的发展，就没有运筹学的发展。例如，线性规划的单纯形法是1947年由美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)发明的，这是一项非常了不起的发明。但是直到50年代中后期，许多大学、企业以及政府机构中有了高速的、存储量大的计算机，单纯形法才真正得以应用。计算机的出现和发展使许多运筹学方法得以实现和发展，如果没有计算机，运筹学只是一种理论科学，不会象现在这样成为广泛应用、不断发展的重要领域。在应用运筹学解决问题时，一般都要借助于计算机计算，手算是不现实的。

运筹学是一门新兴学科，它内容丰富、应用广泛、发展迅速。本书作为工科专业的运筹学教材，重点讲授各种确定型模型和概率型模型中的决策论。

目　　录

第三部分　目标规划

第四部分　非线性规划

第五部分　动态规划

第六部分　图与网络分析

第七部分　决策分析

第一部分

线　性　规　划

线性规划是运筹学的重要分支，也是运筹学最基本的部分。线性规划的数学理论是成熟的、丰富的，其解法统一而简单(即著名的单纯形法)，求出的解是精确的全局最优解。线性规划的应用极其广泛。本部分重点介绍线性规划的基本概念、基本原理、线性规划问题的数学模型和求解方法。

第一章　线性规划的基本性质

1.1　线性规划的数学模型

一、线性规划问题的特点

为了说明什么是线性规划问题，我们先来看两个例子。

例1　某工厂生产甲、乙两种产品。这两种产品都需要在 A、B、C 三种不同设备上加工。每吨甲、乙产品在不同设备上加工所需的台时、它们销售后所能获得的利润值以及这三种加工设备在计划期内能提供的有限台时数均列于表 1.1.1。试问：如何安排生产计划，即甲、乙两种产品各生产多少吨，可使该厂所得利润最大？

表 1.1.1

设　　备	每吨产品的加工台时		总有限台时
	甲	乙	
A	3	4	36
B	5	4	40
C	9	8	76
利润(元/吨)	32	30	求 max

这是一个简单的生产计划问题，可用数学式子描述它。设计划期内甲、乙两种产品的产量分别为 x_1 吨、x_2 吨，则有

目标函数：
$$\max\ z = 32x_1 + 30x_2$$
约束条件：
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leqslant 36 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leqslant 40 \\ 9x_1 + 8x_2 &\leqslant 76 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$
以上就是这个生产计划最优化问题的数学模型。

例2　某公司经销一种产品。它下设三个生产点，每日的产量分别为：$A_1 = 5$ 吨，$A_2 = 7$ 吨，$A_3 = 8$ 吨。该公司把这些产品分别运往四个销售点，各销售点每日销量为：$B_1 = 3$ 吨，$B_2 = 4$ 吨，$B_3 = 5$ 吨，$B_4 = 8$ 吨。已知每吨产品从各生产点到各销售点的运价如表1.1.2 所示。问：该公司应如何调运产品，可在满足各销售点需要量的前提下，使总运费最少？

这是一个产销平衡的运输问题。设从生产点 i 到销售点 j 的调运数量为 x_{ij}吨，则

目标函数：
$$\begin{aligned}\min\ z = {} & 4x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 10x_{14} + x_{21} + 9x_{22} \\ & + 2x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 5x_{34}\end{aligned}$$

约束条件：

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=5\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=7\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=8\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31}=3\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32}=4\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33}=5\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}=8\\
&x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

上述两个数学模型具有共同的特征：目标函数是未知量的线性函数，约束条件是未知量的线性等式或线性不等式。这种以未知量的线性函数为特征的一类最优化问题即是线性规划问题。

表 1.1.2

运价(元/吨) 销售量(吨) / 生产量(吨)	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=5$	$B_4=8$
$A_1=5$	4	11	3	10
$A_2=7$	1	9	2	8
$A_3=8$	7	4	10	5

二、数学模型的标准型

实际问题的线性规划模型是多种多样的，在众多的样式中，我们规定一种叫标准型。下面先介绍标准型，再说明任一模型如何化为标准型。

在数学模型的标准型中，有 n 个变量，m 个约束条件，约束条件为等式约束，变量非负，求解目标函数的最小值。标准型有以下几种常见形式。

1. 繁写形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\
&x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{aligned}
$$

令
$$
P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=[P_1,P_2,\cdots,P_n]
$$

$$
b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}\qquad C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}
$$

其中，P_j 为约束条件的系数列向量；

A 为约束条件的 $m\times n$ 系数矩阵，$m>0,n>0$，一般 $n>m$；

b 为限定向量，在标准型中假设 $b\geqslant 0$，否则等式两端同乘以“-1”；

C 为价值向量；

X 为决策变量向量，在标准型中 $X\geqslant 0$。

通常 A,b,C 为已知，X 为未知。

需要注意的是，标准型中目标函数的含义为：令 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$，线性规划问题是求 $\min\ z$，即求 $\min(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$。

2. 缩写形式

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

3. 向量形式

$$\min z=CX$$
$$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b$$
$$X\geqslant 0$$

4. 矩阵形式

$$\begin{cases}\min\ z=CX\\ AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases} \tag{1.1.1}$$

三、任一模型如何化为标准型？

1. 若原模型要求目标函数实现最大化，如何将其化为最小化问题？

这种情况下可将原模型的目标函数式 CX 中的各项反号，得到 $(-CX)$，先求 $(-CX)$ 的最小值，然后再反号，即等于原模型的目标函数式的最大值。即有

$$\max\ (CX)=-[\min\ (-CX)]$$

我们用图 1.1.1 加以示意。

2. 若原模型中约束条件为不等式，如何化为等式？

若原约束不等式左端≥右端，则化为：

左端－剩余变量＝右端 （剩余变量≥0）

若原约束不等式左端≤右端，则化为：

左端＋松弛变量＝右端 （松弛变量≥0）

有时也将上述剩余变量和松弛变量统称为附加变量。我们采用引入附加变量即增加维数的方法，使原模型中的约束不等式变为等式。在上述变化过程中，约束条件进行的是恒等变换，故目标函数并不发生改变，即在目标函数中，附加变量的系数为零。

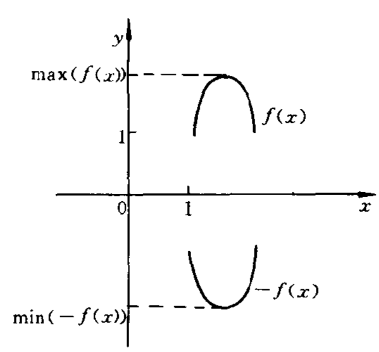

图 1.1.1

3. 若原模型中变量 x_k 是自由变量，如何化为非负变量？

令
$$x_k=x_k'-x_k''$$
其中 $x_k'\geqslant 0, x_k''\geqslant 0$。这里，用 $(x_k'-x_k'')$ 代替 x_k，也是通过增加维数，将原模型化为标准型。

4. 若原模型中变量 x_j 有上下界，如何化为非负变量？

若 $x_j\geqslant u_j$，即 $x_j-u_j\geqslant 0$，令 $x_j'=x_j-u_j$，有 $x_j'\geqslant 0$，用 $(x_j'+u_j)$ 代替 x_j 即可。

若 $x_j\leqslant t_j$，即 $t_j-x_j\geqslant 0$，令 $x_j''=t_j-x_j$，有 $x_j''\geqslant 0$，用 (t_j-x_j'') 代替 x_j 即可。

1.2 图　解　法

图解法简单直观，平面上作图适于求解二维问题。在用图解法求解线性规划问题时，不必把数学模型化为标准型。

一、图解法步骤

下面用一实例说明图解法步骤，其目标函数与约束条件如下：

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \tag{1.2.1}$$
$$4x_1 \leqslant 16 \tag{1.2.2}$$
$$x_1 \geqslant 0 \tag{1.2.3}$$
$$x_2 \geqslant 0 \tag{1.2.4}$$

1. 由全部约束条件作图求出可行域

首先考虑约束条件(1.2.1)，若取等号，得 $x_1+2x_2=8$，作此直线，它将整个平面划分为两个部分，满足约束条件(1.2.1)的点全部在该直线及其左下部的平面内；而该直线及其左下部的平面内的任一点也都满足约束条件(1.2.1)。同理可得约束条件(1.2.2)、(1.2.3)、(1.2.4)相应的各个部分平面。全部约束条件相应的各个部分平面的交集即为线性规划问题的可行域，如图 1.2.1 中阴影部分所示。

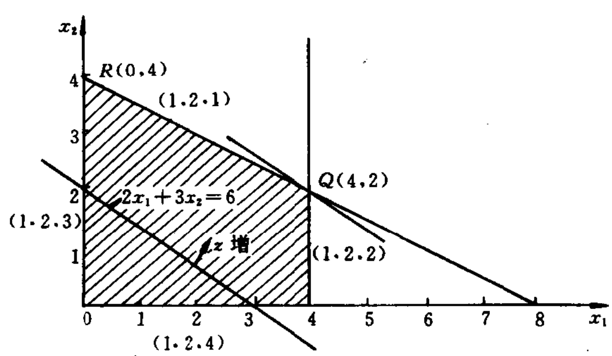

图 1.2.1

2. 作出一条目标函数的等值线

设 $2x_1+3x_2=6$，作该直线，其上任一点的目标函数值都等于 6，它是一条目标函数等值线。在坐标平面内，目标函数 $z=2x_1+3x_2$ 的图形是与 $2x_1+3x_2=6$ 平行的一族直线。因为本例题是求 $\max\ z$，故作出一条目标函数等值线后，还要确定：在可行域内，这条等值线向哪个方向平移可使 z 值增大，如图 1.2.1 所示。

3. 平移目标函数等值线，作图求解最优点，再算出最优值

本例中，顶点 $Q(4,2)$ 是最优点，即 $x_1=4$，$x_2=2$。将最优点代入 z 式，得目标函数最优值为 14。

二、从图解法看线性规划问题解的几种情况

1. 有唯一最优解

这是一般情况，如上例所示。

2. 有无穷多组最优解

若将上例的目标函数改为 $\max\ z=2x_1+4x_2$，则目标函数等值线恰与约束条件(1.2.1)构成的边界平行，即同时在两个顶点 Q、R 上得到最优，则这两个顶点之间的可行域边界上的各点均为最优点，它们对应同一个最优值。

3. 无可行解

若将上例再增加一个约束条件：$x_2\geqslant 5$，则可行域变为空集，该线性规划问题无可行解。一般来说，出现无可行解的情况，即表明数学模型中存在矛盾的约束条件。

4. 无有限最优解(无界解)

如果全部约束条件构成的可行域是无界的，则有可能出现无有限最优解的情况。例如：

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

$$x_1 - 2x_2 \leqslant 4 \tag{1.2.5}$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 2 \tag{1.2.6}$$

$$x_1 \geqslant 0 \tag{1.2.7}$$

$$x_2 \geqslant 0 \tag{1.2.8}$$

该例用图解法求解结果见图 1.2.2。图中的阴影部分即为可行域，其可行域无界，目标函

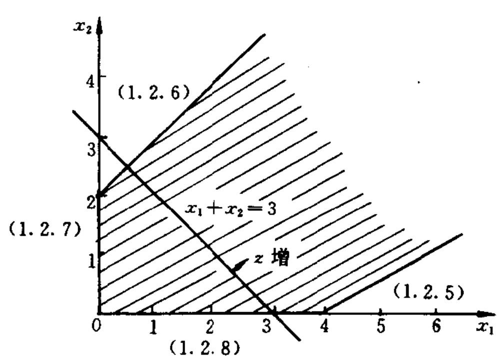

图 1.2.2