陆启韶 主编

现代数学基础

北京航空航天大学出版社

现代数学基础

陆启韶　周　梦　赵杰民
郭定辉　陈迪荣　编　著
陆启韶　主　编

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是一本入门性的现代数学教材，简要介绍与科学技术密切相关的一些重要现代数学分支的基本概念、方法和应用，为进一步深入学习和应用现代数学知识打下基础。它主要包括近世代数与拓扑、非线性泛函分析、微分流形及其应用、偏微分方程的现代理论和小波分析等五个方面的内容。

本书取材广泛，深入浅出，实用性强，可作为理工科大学研究生（尤其是工科博士生）的现代数学教材，也可供高年级大学生、教师及科学技术人员自学和参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础/陆启韶等编. -北京：北京航空航天大学出版社，1997.11

ISBN 7-81012-720-9

Ⅰ. 现… Ⅱ. 陆… Ⅲ. 高等数学-研究生-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 17242 号

●书　　名：现代数学基础
●编 著 者：陆启韶　主编
●责任编辑：郭维烈
●责任校对：李宝田
●出 版 者：北京航空航天大学出版社
●地　　址：北京学院路 37 号(100083)62015720(发行科电话)
●印 刷 者：北京朝阳科普印刷厂印装
●经　　售：全国各地书店
●开　　本：850×1168　1/32
●印　　张：11.5
●字　　数：307　千字
●印　　数：3 000　册
●版　　次：1997 年 11 月第一版
●印　　次：1997 年 11 月第一次印刷
●书　　号：ISBN 7-81012-720-9/O・037
●定　　价：13.50 元

序 言

数学科学是科学技术中一门重要的基础性学科。在长期的发展过程中,它不仅形成了自身完美严密的理论体系,而且成为一切科学技术必需的研究手段和工具。今天,无论是基础数学、应用数学,还是计算数学,都取得了空前的巨大进展。随着计算机和高新科学技术的进步,现代数学在科技领域和国民经济中正在发挥着越来越重要的作用。

研究生教育是高等教育的一个重要层次。为了提高研究生的培养质量,增强科学研究能力和创新性,适应现代科学技术发展的需要,必须进一步深化课程改革,优化知识结构。在博士生课程设置上,更要加强和拓宽基础,追踪前沿,重视不同学科的相互渗透和交叉。针对当前我国一般理工科博士生的现状,设立一门介绍现代数学知识的基础课,以提高博士生的现代数学素质,加强他们运用数学去分析和解决问题的能力,这显然是十分必要的。因此,我校研究生院对全校博士生提出了现代数学方面的基本要求,并为他们开设了《现代数学基础》公共学位课。本书是在该课的讲稿基础上,经过全面修订后编写的一本现代数学概论性教材。它可作为理工科大学研究生(尤其是工科博士生)的教学用书,也可供高年级大学生、教师和科学技术人员自学或参考之用。

本书初步地介绍与现代科学技术密切相关的一些主要的现代数学分支的基本概念、方法和应用。我们根据现代数学的发展现状、现代科学技术的需要以及理工科专业设置的特点,选择了五个方面的内容:近世代数与拓扑、非线性泛函分析、微分流形及其应用、偏微分方程的现代理论和小波分析。它们不但在现代数学中占

有重要地位，而且在不同的科学技术领域中都有广泛的应用。

本书是按照理工科大学研究生的数学基础和学习特点进行编写的，力求深浅度适合，重点突出。我们注重了基本概念的引进、实质和内在的联系，尽量避免繁琐论证，并运用较多实例加以说明。本书各章的内容相对独立，便于读者选学，并分别配有习题和主要参考文献。书末还附有中英文对照的名词索引。

本书的各章依次分别由周梦、赵杰民、陆启韶、郭定辉和陈迪荣执笔，在共同互审的基础上，最后由陆启韶整理定稿。本书的编写得到我校研究生院和教材科的关心和支持，北京理工大学史荣昌教授细心审阅原稿并提出宝贵建议，在此谨致衷心的谢意。由于作者的水平所限，本书在内容选取、编排和叙述等方面难免存在错漏不足之处，敬请读者和同行批评指正。

主编　陆启韶

1997 年 5 月于北京航空航天大学

目　　录

第一章　近世代数与拓扑

§ 1.1　代数基本概念……………………………………………（1）
　1.1.1　逻辑与集合………………………………………（1）
　1.1.2　映射、积与关系 …………………………………（5）
　1.1.3　超穷数、势 ………………………………………（9）
　1.1.4　代数运算、同态与同构 …………………………（11）
§ 1.2　群……………………………………………………（13）
　1.2.1　半群、群、子群与同态…………………………（14）
　1.2.2　变换群、置换群、循环群………………………（17）
　1.2.3　陪集、不变子群与商群 …………………………（21）
　1.2.4　对称群、交错群、正多边形群…………………（24）
§ 1.3　环、域与代数 …………………………………………（26）
　1.3.1　环、子环、除环与域……………………………（27）
　1.3.2　理想、同态、剩余类环…………………………（29）
　1.3.3　交换环、代数、张量积…………………………（33）
§ 1.4　模与范畴……………………………………………（35）
　1.4.1　模、同态与正合序列 ……………………………（36）
　1.4.2　自由模与向量空间………………………………（38）
　1.4.3　范畴与态射………………………………………（39）
　1.4.4　函子………………………………………………（41）
§ 1.5　拓扑空间……………………………………………（42）
　1.5.1　拓扑空间、拓扑基 ………………………………（43）

1.5.2 连续映射与同胚……………………………………(47)
1.5.3 子空间、积空间 ……………………………………(51)
§1.6 拓扑空间基本性质……………………………………(54)
1.6.1 拓扑空间的连通性……………………………………(54)
1.6.2 拓扑空间的分离性公理……………………………………(56)
1.6.3 拓扑空间的紧致性……………………………………(59)
习题 ……………………………………(62)
参考文献 ……………………………………(64)

第二章 非线性泛函分析初步

§2.1 非线性算子……………………………………(65)
2.1.1 连续性、有界性和全连续性 ……………………………………(65)
2.1.2 微分……………………………………(75)
2.1.3 积分……………………………………(84)
2.1.4 高阶微分……………………………………(88)
2.1.5 隐函数定理……………………………………(92)
2.1.6 反函数定理……………………………………(99)
§2.2 拓扑度理论 ……………………………………(100)
2.2.1 布劳威尔度 ……………………………………(100)
2.2.2 列雷-绍德尔度……………………………………(116)
2.2.3 不动点定理 ……………………………………(120)
§2.3 泛函微分方程 ……………………………………(122)
2.3.1 基本理论 ……………………………………(122)
2.3.2 周期解 ……………………………………(125)
2.3.3 稳定性 ……………………………………(130)
习题……………………………………(135)
参考文献……………………………………(138)

第三章　微分流形及其应用

§3.1　微分流形与可微映射 …………………………………… (140)
3.1.1　微分流形 …………………………………………… (140)
3.1.2　可微映射 …………………………………………… (147)
3.1.3　切向量和切空间 …………………………………… (153)
3.1.4　映射的微分、余切空间 …………………………… (161)
3.1.5　黎曼流形 …………………………………………… (168)
§3.2　微分形式 ………………………………………………… (171)
3.2.1　格拉斯曼代数 ……………………………………… (171)
3.2.2　微分形式 …………………………………………… (174)
3.2.3　外微分 ……………………………………………… (178)
3.2.4　庞卡莱引理及逆命题 ……………………………… (183)
3.2.5　对偶映射 …………………………………………… (185)
§3.3　流形上的积分 …………………………………………… (186)
3.3.1　体形式与可定向流形 ……………………………… (186)
3.3.2　流形上的积分 ……………………………………… (191)
3.3.3　斯托克斯定理 ……………………………………… (194)
§3.4　临界点理论概述 ………………………………………… (198)
3.4.1　临界点、萨特定理 ………………………………… (198)
3.4.2　莫尔斯理论 ………………………………………… (200)
3.4.3　横截性理论 ………………………………………… (205)
习题 …………………………………………………………… (209)
参考文献 ……………………………………………………… (211)

第四章　偏微分方程的现代理论

§4.1　广义函数论 ……………………………………………… (213)
4.1.1　广义函数空间 ……………………………………… (214)

4.1.2 广义函数的卷积与傅里叶变换理论 …………（216）
4.1.3 线性偏微分方程的基本解 …………………（223）
§4.2 索伯列夫空间论 …………………………（226）
4.2.1 索伯列夫空间 ……………………………（226）
4.2.2 嵌入定理 …………………………………（235）
§4.3 二阶线性椭圆型方程 ……………………（240）
4.3.1 二阶线性椭圆型方程的狄利克莱问题 ………（240）
4.3.2 广义解及其正则性 …………………………（259）
§4.4 半群理论及其应用 ………………………（267）
4.4.1 C_0 半群理论 ……………………………（267）
4.4.2 发展方程的初值问题 ………………………（275）
习题……………………………………………（278）
参考文献………………………………………（279）

第五章 小波分析及应用

§5.1 从频率分析到尺度分析 …………………（280）
5.1.1 时频局部化与窗口傅里叶变换 ……………（280）
5.1.2 连续小波变换 ……………………………（283）
5.1.3 奇异信号在小波变换下的特征 ……………（285）
§5.2 正交小波 ………………………………（287）
5.2.1 多尺度分析与正交小波基 …………………（287）
5.2.2 快速小波算法 ……………………………（299）
5.2.3 小波与函数空间 …………………………（308）
5.2.4 向量小波基 ………………………………（310）
§5.3 双正交小波基 …………………………（314）
§5.4 小波包与最优算法 ………………………（317）
5.4.1 小波包与算法 ……………………………（317）
5.4.2 信息花费函数与最优基选择 ………………（324）

5.4.3 快速近似主因子分析 …………………………… (328)
5.4.4 局部正(余)弦基 …………………………………… (332)
§5.5 小波与快速数值算法 ………………………………… (340)
习题……………………………………………………………… (346)
参考文献………………………………………………………… (347)

附:中英文名词索引 …………………………………………… (348)

第一章　近世代数与拓扑

本章扼要论述现代数学的基础性分支——近世代数与点集拓扑的基本内容。它们不仅在数学的其它分支中已成为必不可少的基本工具，而且在计算机科学、数字通信、近代物理、系统工程等领域也有广泛而重要的应用，是现代科学技术的基础之一。近年来其本身亦获得了迅猛的发展，模论、同调论以至范畴论的语言、方法已广泛渗入到经典理论之中。由于这一原因，我们在论述基本内容的同时，尽量反映数学中比较现代的思想观点：现代数学最基本的着眼点不在于元素，而在于结构及结构之间的联系；许多重要而深刻的概念，本质上是某种泛映射性质。本章对于群、环、域、拓扑空间等基本的经典内容的论述采用了现代的方式；一些在现代数学中已广泛使用的概念和方法，如同态序列、模、范畴等在其中得到了体现。此外为了给出抽象化的具体背景，本章中较详尽地论述了许多具体的代数结构以及大量实际应用中的代数构造、拓扑构造的例子。

§1.1　代数基本概念

1.1.1　逻辑与集合

现代数学的重要发展趋势是公理化和结构化。公理化就是遵循严格的逻辑演绎规则，从最少的不加证明的公理出发推演出整个体系。结构化就是认为数学研究的对象本质上是结构及结构间的联系。我们先对需用的基本逻辑规则和逻辑术语作一简述。

任何一个叙述或论断称为一个命题。我们约定命题只取“真”值或“假”值中的一个。即任一命题或者是真命题，或者是假命题，而不能是又真又假的命题。命题包含条件和结论两个部分，其一般形式为“若 A，则 B”。任何一个命题有与其相联系的逆命题、否命题、逆否命题。如果原命题为“若 A，则 B”，逆命题就是“若 B，则 A”，否命题是“若非 A，则非 B”，逆否命题是“若非 B，则非 A”。

例 1.1 古希腊哲学家柏拉图曾给人下过一个定义：两足行走、没有羽毛的动物。这实际上是给出了一个命题：“若一动物是两足行走且没有羽毛的，则它是人。”与这一原命题相联系的逆命题、否命题、逆否命题分别为：

逆命题：若一动物是人，则它是两足行走且没有羽毛的。

否命题：若一动物不是两足行走且没有羽毛的，则这动物不是人。

逆否命题：若一动物不是人，则它必不是两足行走且没有羽毛的。

如果一个命题 P 真时，另一个命题 Q 必真，我们称 P 蕴涵 Q。记为 $P\Rightarrow Q$。有时也称为“P 推出 Q”。如果 P 与 Q 互相蕴涵，我们称 P 与 Q 等价，记为 $P\Leftrightarrow Q$。有时把它读作“P 当且仅当 Q”。等价的命题必同时为真或同时为假。原命题与逆否命题是等价的。逆命题与否命题是等价的。常用的“反证法”就是通过证明逆否命题来使原命题获得证明。

下面简述关于集合的基本内容。

集合是数学中最基本的概念。我们以 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，以 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素。$a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A。$a\notin A$ 表示元素 a 不属于 A。人们一度认为集合的概念是不须定义的，只要描述性地说明任何一些对象（元素）均可组成集合就可以了。然而很快发现这会引起一些困难的悖论。

例 1.2（理发师悖论） 在一个小岛上有唯一的一位理发师。

他宣称：我为岛上所有不为自己理发的人理发，而不给那些为自己理发的人理发。现在要问，按他的规则，他本人的头发该由谁来理？他实际上把岛上居民分成了两类，A 类是为自己理发的那部分居民，B 类则由不属于 A 类的人组成。在他的理发规则下，他不能为自己理发，也不能不为自己理发。即他不能属于 A 类，也不能不属于 A 类。这虽然是一个以文字游戏形式表现的悖论，但已包含了集合论悖论的基本要素。

例 1.3 考虑集合 $M=\{A \mid A$ 是集合且 A 不是 A 的元素$\}$。这样的 M 不是空集。但 M 是不是 M 的元素？如果是，那么根据 M 中元素的定义，M 不是 M 的元素！如果不是，那么 M 适合 M 中元素的定义，又得 M 是 M 的元素！总之，这是一个悖论：$M \in M$ 同时又 $M \notin M$！

在处理有限对象时，诸如此类的矛盾并不表现出来，然而一进入无穷世界，这种矛盾就不可避免。现代数学与古典数学相区别的一个主要特征就是处理的对象的无穷性（无论是无穷大还是无穷小），因而对集合论进行严格处理是必要的。

现代集合论已经非常严密和精确地公理化了。在集合论的公理化形式下，类、成员、相等是不加定义的原始术语。所有公理均由这些原始术语和一阶谓词推演来叙述。集合概念被叙述为：一个类 A 称为一个集合当且仅当存在另一个类 B，使得 A 是 B 的成员。用符号表述就是：类 A 是一个集合$\Leftrightarrow \exists$ 类 B：$A \in B$。不是集合的类称为本性类。例 1.3 中的 M 是一个本性类而不是一个集合。

以下复习一些关于集合运算的内容。这些内容基本上是大家熟悉的。在集合论公理体系中，存在着充分多的公理，保证这些运算在集合上能够施行。

A 称为 B 的子集合，若对 A 中每一个元素 x，皆有 x 属于 B。用符号表述为："$A \subseteq B$"$\Leftrightarrow$"$\forall\ x \in A \Rightarrow x \in B$"（读作：$A$ 含于 B 当且仅当对每个 x 属于 A 必有 x 属于 B）。

集合 A 与集合 B 称为相等，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。记为："$A=B$"$\Leftrightarrow$"$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$"。（读作：$A$ 等于 B 当且仅当 A 含于 B 且 B 含于 A）。

不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。$\varnothing \Leftrightarrow \forall\ x: x \notin \varnothing$（读作：空集当且仅当对任何一个 x 有：x 不属于它）。空集$\varnothing$是任何一个集合 A 的子集。当 $A \subseteq B$ 且 $A \neq \varnothing$、$A \neq B$ 时称 A 是 B 的真子集。

由集合 A 的所有子集合作为元素构成的集合称为 A 的幂集合，记为 2^A。若 A 含有限个元素，设为 n 个，则 A 的幂集合 2^A 含 2^n 个元素。在讨论以集合为元素的集合时，我们有时为了表明这点而称这种集合为**集簇**。

例 1.4 $A=\{1,2,3\}$。则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$。

例 1.5 $A=\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$是全体自然数组成的集合，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\cdots,\{1,2\},\{1,3\}\cdots,\{2,3\},\{2,4\},\cdots,\{1,2,3\},\{1,2,4\},\cdots,\cdots\}$。即在 A 中随意取出任意多个数组成的集合都是 2^A 的一个元素。

一些集合 $A_i, i \in I$ 的并和交分别是指

$$\bigcup_{i \in I} A_i=\{x \mid \exists\ i \in I: x \in A_i\}$$

（读作：x 属于 A_i 的并当且仅当存在 i 属于 I 使 x 属于 A_i）。

$$\bigcap_{i \in I} A_i=\{x \mid \forall\ i \in I: x \in A_i\}$$

（读作：x 属于 A_i 的交当且仅当对每个 i 属于 I 有 x 属于 A_i）。

其中指标集 I 可以是有限的，也可以是无限的。

集合 A 与 B 的差集记作 $A-B$，它由属于 A 但不属于 B 的元素组成：$A-B=\{x \mid x \in A, x \notin B\}$。当所讨论的所有集合均含在某个固定集合 U 中时，记 $U-A$ 为 A'，称之为 A 的补集。

对集合的交、并、补运算，不难验证以下算律：

$$A\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i) \tag{1.1}$$

$$A\cup(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i) \tag{1.2}$$

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)'=\bigcap_{i\in I}A_i',(\bigcap_{i\in I}A_i)'=\bigcup_{i\in I}A'_i \tag{1.3}$$

$$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A \tag{1.4}$$

1.1.2 映射、积与关系

集合之间的联系是通过映射来实现的。映射概念在数学中是基本的。我们简述映射的基本内容，并通过映射概念定义积与关系。

定义 1.1 设 A，B 是两个给定的集合。如果我们通过某种对应法则 f 使 A 中的每一个元素 a 对应于 B 中某个唯一的元素 b，则称 f 为一个从 A 到 B 的**映射**。记为 $f: A\to B$。b 称为 a 在 f 下的**像**，记为 $b=f(a)$。

两个映射 f_1，f_2 称为相等的，如果它们都是 A 到 B 的映射，且对每个 $a\in A$ 有 $f_1(a)=f_2(a)$。一个映射 f 称为**单射**，如果$\forall\ a$，$a'\in A$，$a\neq a'\Rightarrow f(a)\neq f(a')$。一个映射 f 称为**满射**，如果$\forall\ b\in B$，皆存在 $a\in A$ 使 $b=f(a)$。若 f 既是单射又是满射，则称 f 为一个**一一对应**。

对映射 f：$A\to B$，集合 $f_{Im}=\{b\in B\mid\exists\ a\in A;f(a)=b\}$ 称为 f 的**像集**。$f^{-1}(B)=\{a\in A\mid f(a)\in B\}$ 称为 f 的**原像集**。

例 1.6 设 A，B 都是含 5 个点的集合，下图给出 A 到 B 的对应法则 f_1，f_2，f_3，f_4，判断它们是否映射、单射、满射、一一对应。

解 f_1，f_2 不是映射。f_3 是映射但既不是单射也不是满射。f_4 是单射又是满射，从而是一一对应。

若 f：$A\to B$ 为映射，且 $S\subseteq A$，那么把 S 中的元素按法则 f 对应到 B 中元素，就得到一个 $S\to B$ 的映射 f_1，当然 f_1 在 S 上的作

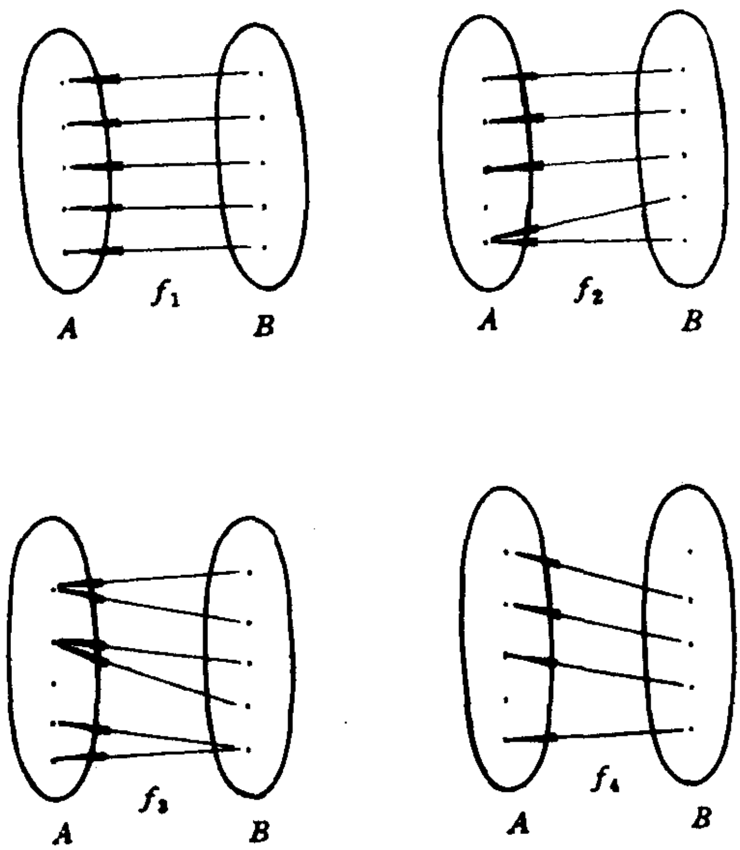

图 1.1

用与 f 是一样的。我们称 f_1 为 f 在 S 上的限制，记为 $f|S:S\to B$。若 f 是 $A\to A$ 的映射且 $f(a)=a,\forall\ a\in A$，则称 f 为恒等映射，记为 $1_A:A\to A$。当 $S\subseteq A$ 时，$1_A|S:S\to A$ 称为 S 到 A 的包含映射。

若 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 为映射，则由法则 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 给出的 A 到 C 的映射称为 f 与 g 的合成映射，记为 $gf:A\to C$，$gf(a)=g(f(a)),\forall\ a\in A$。

定义 1.2 由映射构成的一个图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

如果适合 $gf=h$，即 A 通过 f 映到 B 再通过 g 映到 C 的效果与 A

通过 h 映到 C 的效果是一样的，就称此图为一个交换的映射图。

类似地，若图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h\downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

适合 $gf=kh$，也称为一个交换的映射图。

定理 1.1 设 $f:A\to B$ 为一个映射，且 $A\neq\varnothing$，则

(1) f 为单射$\Leftrightarrow$存在映射 $g:B\to A$，使 $gf=1_A$。

(2) f 为满射$\Leftrightarrow$存在映射 $h:B\to A$，使 $fh=1_B$。

(3) f 为一一对应$\Leftrightarrow$存在映射 $f^{-1}:B\to A$，使 $ff^{-1}=f^{-1}f=1$。

证 首先易知，gf 为单射$\Rightarrow f$ 为单射，gf 为满射$\Rightarrow g$ 为满射，从而(1)，(2)，(3)的“$\Leftarrow$”部分立刻得证。现若 f 为单射，则对每个 $b\in f(A)$ 均有唯一的 $a\in A$ 使 $f(a)=b$。取定一个 $a_0\in A$，作

$$g:B\to A,g(b)=\begin{cases}a & 若\ b\in f(A)且\ f(a)=b\\ a_0 & 若\ b\notin f(A),\end{cases}$$

可验证 $gf=1_A$。若 f 为满射，则对每个 $b\in f(A)$，$f^{-1}(b)\neq\varnothing$。取一个 $a_b\in f^{-1}(b)$，作

$$h:B\to A,h(b)=a_b$$

可验证 $fh=1_B$。当 f 为一一对应时，f^{-1}的作法更是显然的了。证毕。

定义 1.3 设$\{A_i\mid i\in I\}$是一族集合，I 是它的(非空)下标集合。则集合

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f\mid f\ 是\ I\ 到\ \bigcup_{i\in I}A_i\ 的映射使对每个\ i\ 有\ f(i)\in A_i\}$$

称为集合族$\{A_i\mid i\in I\}$的笛卡儿积。$\Pi_k:\prod_{i\in I}A_i\to A_k,f\to f(k)$ 称为此笛卡儿积在它的第 k 分量上的射影。

例 1.7 当指标集 I 是有限集$\{1,2,\cdots,n\}$时，我们把笛卡儿