

解析空中三角测量基础

钱曾波编

测绘出版社

内 容 简 介

本书较全面地系统地阐述了解析空中三角测量的基本理论。

全书共分七章及若干附录。第一章、第二章介绍单张象片和立体象对的数学关系；第三章至第六章是在上两章内容的基础上分别介绍了单航线解析空中三角测量、航线法区域网平差、独立模型法区域网平差及光束法区域网平差的基本理论；最后在第七章还介绍了高差仪记录资料的处理及其在电算加密中的应用。

为便于在职人员自学进修，在附录中介绍了向量代数和矩阵运算的基础知识，以及线性方程组的常用解法等数学内容。附录中还有解析空中三角测量的精度和一些国外先进象点坐标量测仪器等内容的介绍。

本书可供从事航测工作的技术人员、院校的航测专业师生和有关科研人员参考。

解析空中三角测量基础

钱曾波 编

测绘出版社出版

山西新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16·印张 $22\frac{1}{8}$ ·字数520千字

1980年10月第一版·1980年10月第一次印刷

印数1—5,100册·定价2.30元

统一书号：15039·新143

前 言

随着我国电子计算机工业的发展，各测绘部门在航测室内加密作业中，相继采用了解析空中三角测量方法（即通常所说的电算加密方法）来取代空中三角测量的仪器法。为了配合进一步推广电算加密方法，提高电算加密作业人员对电算加密理论的了解，以便更好地使用加密方法和不断地改进加密作业方法，我们曾在1975年编写了《解析空中三角测量》（初稿）作为教材，并举办了电算学习班。在教学实践的基础上，根据有关单位的意见，对“初稿”又作了进一步修改，改名为“解析空中三角测量基础”，以供参考。

目前，生产作业单位所采用的电算加密程序很多，各有其特点。应该说，具体计算方案是千变万化的，所以，本书没有逐个地具体地介绍这些电算加密程序所采用的计算方案，而是着重系统地阐述解析空中三角测量的基本理论。我们认为，重视理论方面的学习是十分必要的，只有在掌握解析空中三角测量的基本理论的基础上，才有可能比较深刻地去理解和分析所遇到的具体的计算方案，才有可能更好地从本部门的实际情况出发，自行设计和不断改进电算加密的计算方案。

本书在编写过程中，力求深入浅出，通俗易懂，便于自学进修。为了便于电算作业人员在职进修，特在附录中介绍了向量代数和矩阵运算的基础知识，以及法方程组的常用解法等有关数学内容。这些都是学习解析空中三角测量基本理论所必需的。此外，在附录中还介绍了解析空中三角测量的精度以及国外一些先进的象点坐标量测仪器，可供参考。

在本书“初稿”的编写和以后的修改过程中，郑肇葆、张祖勋、孙伯年、唐光弟和杨金保等同志给予了协助，张明槽同志参加本书插图的描绘工作。在此，对在编写过程中给予大力支持和协助的同志们表示感谢。

由于编者的水平有限，错误和不妥之处在所难免，欢迎读者给予指正。

编 者

目 录

第一章 航摄像片的基本数学关系	(1)
§ 1—1 常用的坐标系统.....	(1)
〔一〕 象平面坐标系.....	(1)
〔二〕 象空间坐标系.....	(1)
〔三〕 摄影测量坐标系.....	(2)
〔四〕 大地坐标系.....	(2)
§ 1—2 航摄像片的内、外方位元素.....	(3)
〔一〕 内方位元素.....	(3)
〔二〕 外方位元素.....	(3)
§ 1—3 象点坐标中的系统误差及其改正.....	(6)
〔一〕 航摄像片的变形.....	(7)
〔二〕 航摄仪物镜的畸变差.....	(10)
〔三〕 大气折光差.....	(12)
〔四〕 地球曲率的影响.....	(15)
§ 1—4 空间直角坐标系的旋转变换.....	(18)
〔一〕 空间直角坐标系旋转变换的基本关系.....	(18)
〔二〕 方向余弦之间的基本关系.....	(20)
〔三〕 构成旋转矩阵的几种方法.....	(21)
〔四〕 空间直角坐标系旋转变换的一次项近似关系式.....	(33)
〔五〕 大地坐标系与地面辅助坐标系之间的旋转变换.....	(37)
§ 1—5 共线条件.....	(38)
〔一〕 共线条件方程的一般形式.....	(38)
〔二〕 共线条件方程的线性化.....	(42)
§ 1—6 空间后方交会.....	(50)
〔一〕 基本原理.....	(50)
〔二〕 空间后方交会的计算过程.....	(51)
〔三〕 空间后方交会的精度估算.....	(54)
第二章 立体象对的基本数学关系	(61)
§ 2—1 利用立体象对确定地面点空间坐标的基本公式——前方交会公式	(63)
〔一〕 前方交会公式的一般形式.....	(63)
〔二〕 利用一对水平象片确定地面点空间坐标的公式.....	(65)
〔三〕 利用标准式象对确定地面点空间坐标的公式.....	(65)
§ 2—2 象对的相对方位元素和绝对方位元素.....	(67)
〔一〕 象对的相对方位元素.....	(68)

〔二〕 象对(模型)的绝对方位元素·····	(70)
§ 2—3 相对方位元素的计算·····	(71)
〔一〕 共面条件·····	(71)
〔二〕 连续象对系统相对方位元素的计算·····	(74)
〔三〕 单独象对系统相对方位元素的计算·····	(81)
§ 2—4 立体模型的绝对定向(大地定向)——空间相似变换·····	(85)
〔一〕 基本原理·····	(85)
〔二〕 以重心作为摄测坐标系原点的特殊性·····	(92)
〔三〕 立体模型绝对定向的计算过程·····	(94)
§ 2—5 建立双模型的基本理论·····	(96)
〔一〕 模型连接条件的基本形式·····	(96)
〔二〕 建立双模型的基本原理·····	(101)
〔三〕 带连接条件时,连续系统相对方位元素的计算·····	(104)
§ 2—6 空间双点后交会·····	(105)
〔一〕 误差方程式的建立·····	(105)
〔二〕 点位与点数·····	(107)
〔三〕 计算过程·····	(107)
§ 2—7 各角元素系统之间的关系·····	(107)
〔一〕 外方位角元素各系统间的关系·····	(107)
〔二〕 外方位角元素与相对方位元素间的关系·····	(109)
〔三〕 地面辅助坐标系系统竖轴旋转后,外方位角元素的换算关系·····	(111)
第三章 单航线解析空中三角测量 ·····	(115)
§ 3—1 连续象对单航线法·····	(115)
〔一〕 基本思想·····	(115)
〔二〕 航线网(航线模型)的建立·····	(115)
〔三〕 航线网的绝对定向(大地定向)·····	(121)
〔四〕 近似正形改正公式及其他·····	(127)
〔五〕 计算测图工序中所需的某些元素·····	(131)
§ 3—2 其他单航线法介绍·····	(133)
〔一〕 独立模型单航线法·····	(133)
〔二〕 双模型单航线法·····	(139)
〔三〕 虚拟象片单航线法·····	(140)
§ 3—3 系统误差在航线网中的累积·····	(141)
〔一〕 上下视差误差对相对方位元素的影响·····	(141)
〔二〕 外方位元素误差对单模型坐标的影响·····	(144)
〔三〕 相对方位元素的系统误差在航线模型中的累积影响·····	(147)
〔四〕 航线模型的系统变形·····	(154)

第四章 航线法区域网平差	(162)
§ 4—1 区域解析空中三角测量概述.....	(162)
§ 4—2 航线法区域网平差基本方案.....	(163)
〔一〕 基本思想.....	(163)
〔二〕 误差方程式的原始形式.....	(163)
〔三〕 原始误差方程式的改化原理及方法.....	(164)
〔四〕 简化法方程的组成及其结构.....	(169)
〔五〕 系统变形改正中, 地形起伏影响的考虑.....	(176)
〔六〕 航线飞行不正规时, 建立等效误差方程及简化法方程的特点.....	(177)
§ 4—3 航线法区域网平差的计算过程.....	(177)
〔一〕 区域网概算.....	(178)
〔二〕 区域网平差计算.....	(179)
§ 4—4 考虑已知控制点误差的航线法区域网平差方案.....	(179)
〔一〕 各类点的原始误差方程式.....	(181)
〔二〕 各类点的等效误差方程式.....	(181)
§ 4—5 带骨架航线的航线法区域网平差.....	(182)
〔一〕 等效误差方程式的建立.....	(182)
〔二〕 简化法方程的结构.....	(183)
第五章 独立模型法区域网平差	(185)
§ 5—1 独立模型法区域网平差概述.....	(185)
§ 5—2 平面区域网平差.....	(187)
〔一〕 基本原理.....	(187)
〔二〕 法方程的组成及其结构.....	(188)
〔三〕 等效误差方程式的组成.....	(194)
〔四〕 简化法方程的直接组成及其结构.....	(199)
§ 5—3 高程区域网平差.....	(205)
〔一〕 基本原理.....	(205)
〔二〕 法方程的组成及其结构.....	(206)
〔三〕 等高条件在高程平差中的应用.....	(209)
§ 5—4 独立模型法平高迭代方案的计算过程.....	(210)
〔一〕 区域网概算.....	(210)
〔二〕 区域网平差.....	(211)
§ 5—5 独立模型法的逐个趋近解算方案.....	(213)
§ 5—6 独立模型法自检校区域网平差.....	(214)
第六章 光束法区域网平差	(218)
§ 6—1 光束法区域网平差概述.....	(218)
〔一〕 基本原理.....	(218)
〔二〕 主要运算过程.....	(220)

§ 6—2	光束法的原始法方程和简化法方程	(222)
〔一〕	原始法方程及其简化	(222)
〔二〕	等效误差方程	(228)
〔三〕	利用等高条件时的等效误差方程	(231)
〔四〕	距离条件的利用	(233)
§ 6—3	逐片逐点趋近计算方案	(234)
〔一〕	每片全部外方位元素与模型点坐标反复趋近计算方案	(234)
〔二〕	利用投影光线夹角的趋近计算方案	(235)
§ 6—4	光束法自检校区域平差	(238)
第七章	高差仪记录资料的处理及其在电算加密中的应用	(241)
§ 7—1	高差仪记录的处理	(241)
〔一〕	高差仪工作原理简介	(241)
〔二〕	利用高差仪记录计算航高差的公式推导	(243)
〔三〕	等压面弯曲的改正	(248)
§ 7—2	在单航线法中, 处理高差仪记录的综合平差方法	(249)
〔一〕	依最小二乘法原理进行综合平差	(249)
〔二〕	依抛物线规律平差	(252)
§ 7—3	高差仪记录在电算加密中的应用	(254)
〔一〕	在单航线法中的应用	(254)
〔二〕	在区域网平差中的应用	(256)
附 录:		
附录 I	向量代数的基础知识	(257)
附录 II	矩阵运算的基础知识	(266)
附录 III	间接观测平差中的等效误差方程	(285)
附录 IV	电算加密中, 线性代数方程组的常用解法	(295)
附录 V	地心坐标系及其换算公式	(308)
附录 VI	共线条件线性化的一般关系式	(313)
附录 VII	解析空中三角测量精度	(320)
附录 VIII	量测象点坐标的精密仪器	(327)

第一章 航摄像片的基本数学关系

§ 1—1 常用的坐标系统

在解析空中三角测量中，通常采用右旋直角坐标系，只有地面点的大地坐标（指高斯投影坐标）仍采用左旋直角坐标系表示。下面介绍几种常用的坐标系统。

【一】 象平面坐标系

象平面坐标系是一种在象片平面内的右旋直角坐标系。它用来表示象点在象平面内的位置。这种坐标系通常以象主点 o 作原点，坐标轴方向按需要选定。在电算加密中，一般以航线方向的一对框标联线作为 x 轴。这种象平面坐标系，用小写字母 $o-xy$ 表示，如图 1—1—1 所示。任一象点 a 在象片上的位置，用它在 $o-xy$ 中的坐标 (x_a, y_a) 来表示。在不易混淆的情况下，常省略下角符。任一象点在象平面坐标系中的坐标 x, y 值，可在航摄像片上量出。有了各象点在 $o-xy$ 坐标系中的坐标 x, y ，也就知道了各象点在象片上的位置。从几何关系方面来说，有了象片上各点的象平面坐标，就相当于有了这张象片。

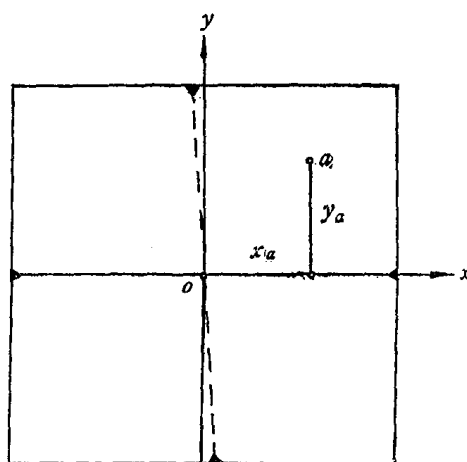


图 1—1—1

有的航摄像片的框标在象片的四个角隅，这时，可在航线方向上任意选定一方向线作为 x 轴。

【二】 象空间坐标系

象空间坐标系是一种右旋空间直角坐标系，用来表示象点在象方空间的位置。这是一种为了便于进行坐标变换而采用的过渡性的坐标系统。

如图 1—1—2 所示，象空间坐标系的原点选在镜头中心（即投影中心） S ，其 x, y 轴

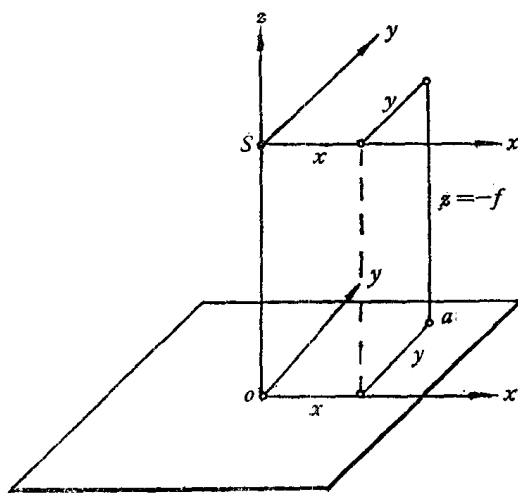


图 1—1—2

分别与象平面坐标系相应坐标轴平行。用符号 $S-xyz$ 表示。任一象点 c 在 $S-xyz$ 中的坐标为 (x, y, z) 。显然，其中 x, y 值就是象点的象平面坐标，而 $Z = -f$ ， f 为航摄像片的主距。所以，象点的象空间坐标也可以写成 $(x, y, -f)$ 。由于航摄像片的主距 f 通常是已知值，因此，在量出象点的象平面坐标后，象点的象空间坐标也是已知值。从几何关系方面来说，有了象片上各点的象空间坐标，也就确定了这象片的摄影光束的形状。

象片（光束）绕投影中心 S 的旋转，就是象空间坐标系绕其原点 S 的旋转。象片在空间的方位，也就是象空间坐标系在空间的方位。这一概念对象点的坐标变换来说，是十分重要的。

【三】 摄影测量坐标系

摄影测量坐标系简称摄测坐标系，也是一种右旋空间直角坐标系。它用于表示模型空间中各点的相关位置。由于用象点坐标直接计算相应地面点的大地坐标十分困难，为方便起见，往往先求出地面上待定点在摄测坐标系中的坐标，然后，再用数学方法变换成大地坐标。所以，摄测坐标系也是一种过渡性质的坐标系。

摄测坐标系的原点一般选在某摄站或某一已知点，横坐标轴大体上与航线方向一致，竖坐标轴向上为正。各坐标轴分别用 X_P, Y_P, Z_P 或 X, Y, Z 表示，如图 1-1-3 所示，图中 $S_1-X_P Y_P Z_P$ 和 $A-XYZ$ 都是摄测坐标系。

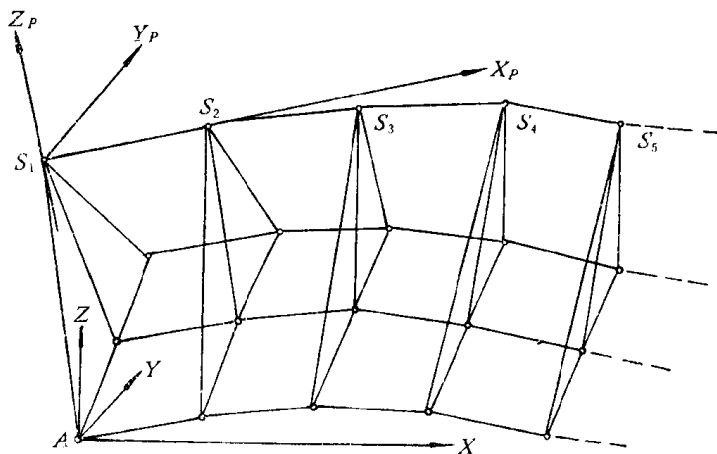


图 1-1-3

从实际情况出发，摄测坐标系可作各种不同选择。其中一些摄测坐标系又有其专门名称，例如航线坐标系、基线坐标系以及地面辅助坐标系等，将在以后的叙述中陆续进行介绍。这里只说明一下地面辅助坐标系。这种坐标系的特点是： Z 轴必须铅垂，而其原点和 X 轴方向可按需要选定。通常，原点选在某一已知点， X 轴大体与航线方向一致。为了与其他摄测坐标系区别，在必要时，采用 X_T, Y_T, Z_T 分别表示三个坐标轴。地面辅助坐标系可简称为地面坐标系。

【四】 大地坐标系

本书中，大地坐标系是指高斯平面坐标系和高程而言。高斯平面坐标系的横坐标轴

用 Y_D 表示，纵坐标轴用 X_D 表示。为了与纵横坐标轴的表示方式相对应，竖轴（高程）用 Z_D 表示。因此，大地坐标系是左旋空间直角坐标系。在坐标变换中，应特别注意这一点。

§ 1—2 航摄像片的内、外方位元素

【一】 内方位元素

确定镜头中心（投影中心）与象片间的相对位置所需的元素，叫做象片的内方位元素。它们用于恢复摄影光束的形状。

内方位元素包括：镜头中心 S 至象片平面的垂直距离 f ，即象片的主距，或叫航摄影镜箱主距；象主点（即 S 在象平面上的垂足）在象平面坐标系中的坐标 (x_0, y_0) ，如图 1—2—1 所示。

应该指出，在制造航摄影时，总是尽可能使象主点与对应框标联线的交点重合，所以，通常把对应框标联线的交点视为象主点，即 $x_0 = y_0 = 0$ 。但在实际上受制造工艺的限制，又不可能完全重合。为了区别，把框标联线的交点叫做象片中心点。

由于该点在象片上的位置很容易确定，所以在量测象片时，都以象片中心点作为象平面坐标系的原点。对成果精度要求较高时，不应忽视 x_0 和 y_0 的影响。

(x_0, y_0) 和 f 均可在航摄影鉴定表中查出。

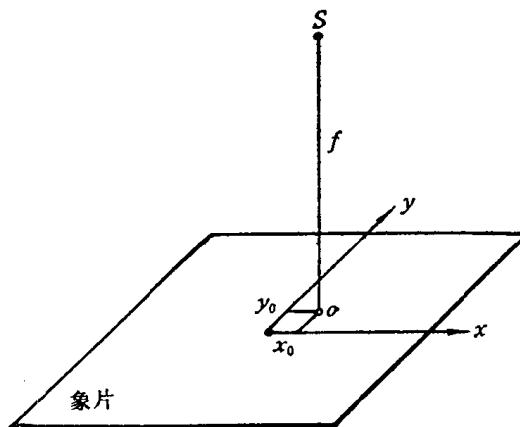


图 1—2—1

【二】 外方位元素

广义地说，确定摄影光束（象片）在某一空间直角坐标系中的位置所必需的元素，叫做象片（光束）对该空间直角坐标系的外方位元素。象片的外方位元素一般是对地面辅助坐标系而言。

为了确定摄影光束在地面辅助坐标系中的位置，需要有三个线元素和三个角元素，共需六个元素。其中三个线元素是摄站（投影中心） S 在地面辅助坐标系中的坐标 (X_S, Y_S, Z_S) ，用来确定摄影光束顶点在地面辅助坐标系中的空间位置；三个角元素用来确定摄影光束在地面辅助坐标系中的角方位。这些角元素的表示方式有很多种，下面介绍三种角元素系统。

（一） $\alpha_x - \omega - \kappa$ 系统

如图 1—2—2 所示，在这系统中的三个角元素为 α_x 、 ω 和 κ 。

α_x —主光轴（摄影轴） So 在 XZ 坐标面内的投影与过投影中心的铅垂线之间的夹角，叫做偏角。以铅垂线，即 Z 轴作为起算线。

ω —主光轴与 XZ 面之间（即主光轴与其在 XZ 面内的投影之间）的夹角，叫做倾角。从主光轴在 XZ 面的投影起算。

κ — Y 轴在象片上的投影与象平面坐标系 y 轴之间的夹角，叫做旋角。从 Y 轴在象

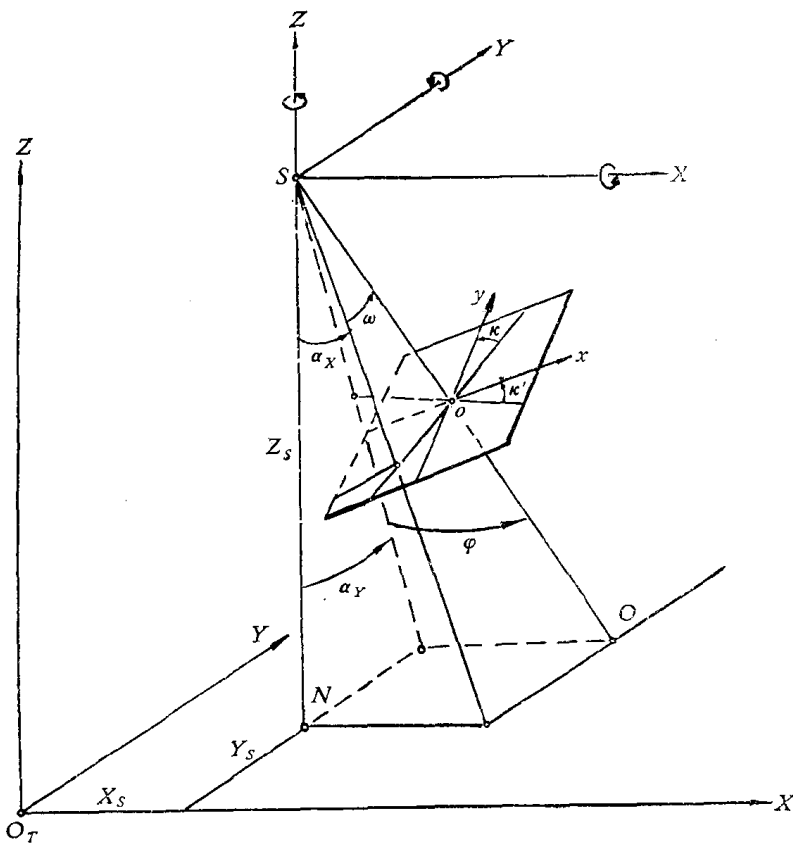


图 1-2-2

片上的投影起算。

上述三个角元素的正负号，以图 1-2-2 中箭头表示的旋转方向作为正方向，反之为负。图中各角均为正值。

这三个角元素中， α_x 和 ω 用来确定主光轴 S_o 的方向，而旋角 κ 则用来确定象片在象平面内的方位，即确定光束绕主光轴的旋转方位。

图 1-2-2 中所示的航摄像片的位置，可认为是象片由该摄站的水平象片位置分别绕各坐标轴依次旋转 α_x 、 ω 和 κ 角后的结果。首先，由水平象片位置绕 Y 轴旋转 α_x 角，此时，象片所处的位置如图 1-2-3(a) 所示。 X 和 Y 轴在象片上的投影分别与象平面坐标系的 x 和 y 轴重合。对象空间坐标系 $S-xyz$ 来说（图 1-2-3 中未表示出），由原来与 $S-XYZ$ 重合的位置，旋转到 $S-X'Y'Z'$ 。 α_x 角是绕 Y 轴旋转的，旋转前后的 Y 轴位置不变，即 Y' 与 Y 重合。在此基础上，又绕旋转后的 X 轴（即 X' 轴）旋转 ω 角，象片转到图 1-2-3(b) 中所示的位置。这时，主光轴已恢复到图 1-2-2 中所示的应处的位置，象片亦处在应处的象平面内。空间坐标系 $S-X'Y'Z'$ 旋转到 $S-X''Y''Z''$ ， X' 轴的位置不变，即 X'' 与 X' 重合。原 Y 轴在象片上的投影仍与象片上的 y 轴重合，而原来的 X 轴的投影不与象片上的 x 轴重合，所以，象片的旋角 κ 必须从 Y 轴在象片上的投影起算。若再将象片绕主光轴（即 Z'' 轴）旋转 κ 角，即得图 1-2-2 中所示的象片应处位置。由此可见，象片向任意方向的倾斜，可以分解成由三次连续旋转来完成。上述旋转过程中，以 Y 轴作为第一旋转轴（即主轴）， X 轴作为第二旋转轴

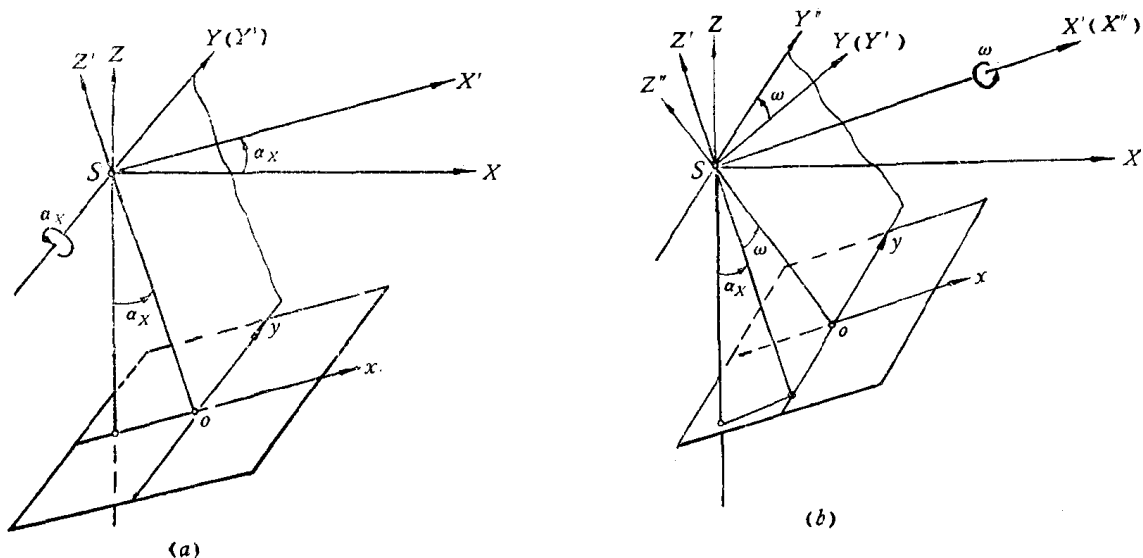


图 1-2-3

(即副轴)。也就是分别按 $Y-X-Z$ 的次序连续旋转 α_X 、 ω 和 κ 角, 可使象片由水平象片位置转到倾斜象片应处的位置。反之, 倾斜象片反向旋转 κ 、 ω 和 α_X 角后, 可转到水平象片的位置。对空间直角坐标系来说, 地面辅助坐标系 $S-XYZ$ 依次旋转 α_X 、 ω 和 κ 后, 与倾斜象片的象空间坐标系 $S-x'yz$ 重合。反之, $S-x'yz$ 依次反向旋转 κ 、 ω 和 α_X 后, 与 $S-XYZ$ 重合。

本书在以后的叙述中, 采用 $\alpha_X-\omega-\kappa$ 系统。

(二) $\alpha_Y-\varphi-\kappa'$ 系统

如图1-2-2所示, 在这系统中的三个角元素为 α_Y 、 φ 和 κ' 。

α_Y —主光轴 S_o 在 YZ 面的投影与过投影中心的铅垂线(即 Z 轴)之间的夹角, 也叫做倾角, 以铅垂线作为起算线。

φ —主光轴 S_o 与 YZ 面的夹角, 也叫做偏角, 从主光轴在 YZ 面的投影起算。

κ' — X 轴在象片上的投影(即含 X 轴和主光轴的平面与象平面的交线)与象平面坐标系的 x 轴之间的夹角, 也叫做旋角。从 X 轴在象片上的投影起算。

上述三个角元素的正负号, 以图1-2-2中箭头表示的旋转方向作为正方向, 反之为负。图中各角均为正值。

与第一种角元素系统相仿, α_Y 和 φ 角用来确定主光轴的方向, 旋角 κ' 用来确定象片(光束)绕主光轴的旋转方位。利用 $\alpha_Y-\varphi-\kappa'$ 系统恢复象片在空间的角方位时, 应以 X 轴作为第一旋转轴, Y 轴作为第二旋转轴, 即依次绕 $X-Y-Z$ 轴, 分别连续旋转 α_Y 、 φ 和 κ' 角来实现。

(三) $t-\alpha-\kappa_Y$ 系统

如图1-2-4所示, 这系统中的三个角元素为 t 、 α 和 κ_Y 。

t —主垂面(即含主光轴 S_o 的铅垂面)和 XY 面的交线与 Y 轴的夹角, 叫做方向角。从 Y 轴正方向起算, 顺时针方向为正, 图1-2-4中, t 角为正值。

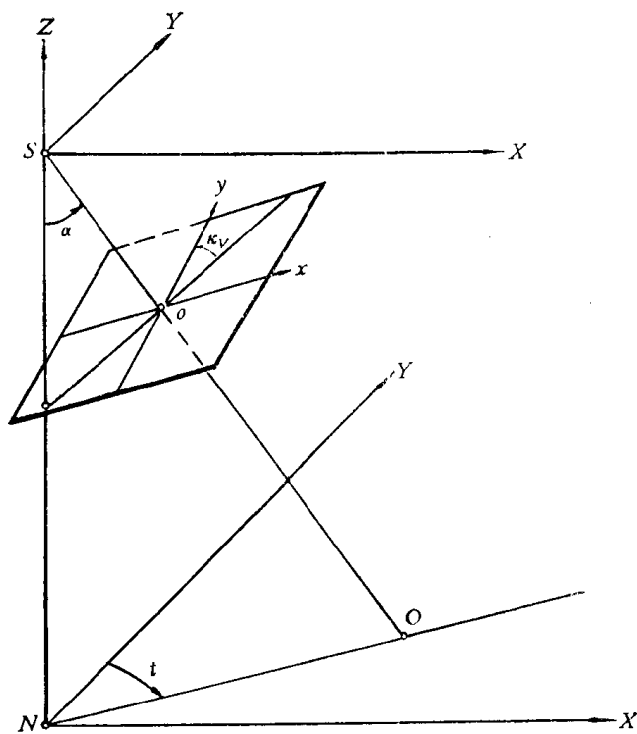


图 1-2-4

α —主光轴 S_o 与过投影中心 S 的铅垂线之间的夹角，叫做象片倾斜角。始终取正值。

κ_v —象片上的主纵线（即主垂面与象平面的交线）与 y 轴的夹角，通常也叫旋角。从主纵线起算，逆时针为正。图1-2-4中所示的 κ_v 角为正值。

利用 $t-\alpha-\kappa_v$ 系统恢复象片角方位时，应依次绕 $Z-X-Z$ 轴，分别连续旋转 t 、 α 和 κ_v 角来实现。

应该明确，任何一个空间直角坐标系在另一个空间直角坐标系中的角方位，都可采用上述三种系统中的任何一种来描述。但不论采用哪一种，都有三个独立的角元素，即可由三个独立参数来确定。

§ 1-3 象点坐标中的系统误差及其改正

在航空摄影及摄影化学处理过程中，由于航摄软片的伸缩、镜头畸变差以及大气折光差等物理因素的影响，都会使象点产生不应有的移位，以致破坏了物象之间的中心投影关系。它对每张象片的影响具有相同的规律性，即由此而产生的象点移位（象点坐标误差）是一种系统误差。在利用大量象片作业的室内加密中，这种对每张象片来说影响很小的系统误差，要产生系统累积，以致明显地影响加密成果的精度。是否能在象点坐标中消除系统误差的影响，是关系加密成果精度的重要问题之一。

下面分别介绍各种系统误差的影响规律，以及改正象点坐标的方法。在条件许可的情况下，应尽可能按下述方法消除象点坐标中的系统误差，以利于提高加密成果的质

量。

【一】 航摄像片的变形

航摄像片必须经过显象、定影和水洗等一系列的处理，在摄影曝光时，为使底片压平，航摄底片要承受一定的拉力，另外，底片要产生老化现象，这些因素都会使航摄像片产生不可避免的变形，从而破坏物象间的中心投影关系。

航摄软片的变形可分偶然变形和系统变形两类，偶然变形是指航摄软片的某一局部产生偶然伸缩，这种变形只能用改进航摄软片制作工艺等办法加以限制，无法在测量作业中加以消除。系统变形是指每张航摄软片产生同样规律的伸缩。这类变形若能用一定数学公式来描述，那末，就可能用计算方法来消除这种变形对象点坐标的影响。

目前，在作业中用来检查和改正象片变形的的方法主要有两种，一种是在航摄软片曝光时，使一标准方格网也同时构象在航摄像片上，只要检查航摄像片上许多格网点的移位情况，就可知道航摄像片的变形。这种办法虽能精确地改正航摄像片的变形，但要显著增加作业工作量。我国现有少数航摄仪上带有标准格网板装置。在多数情况下，采用另一种方法进行航摄像片变形的检查和改正，即利用航摄像片上的框标来检查航摄像片的变形，并进行改正。

在航摄仪上设置框标的方式，最常见的有：①框标位于航摄像片四边的中央；②框标位于航摄像片的四角；③在航摄像片的四边中央和四角都设有框标。根据框标设置方式不同，可采用不同方法来改正航摄像片的系统变形。

(一) 框标位于四边中央时的改正方法

如图1—3—1(a)所示，当框标位于四边中央时，适宜于改正航摄像片的均匀伸缩，以及航摄像片的不均匀伸缩（使正方形变成长方形）的影响，如图1—3—1(b)所示。

在航摄仪上，1—3和2—4两对框标的距离可在航摄质量鉴定表中查出，或由航摄部门提供一张晒印在玻璃干版上的框标影象样片，利用此样片，可在立体坐标量测仪上，精确地量出每对框标间的距离或坐标。

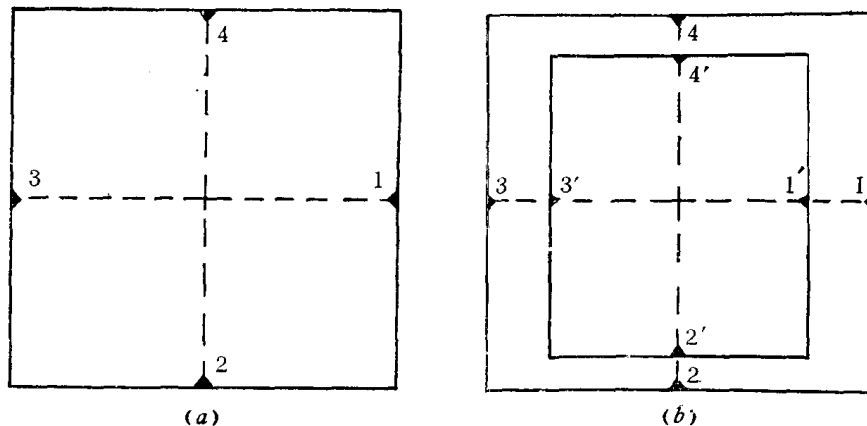


图 1—3—1

假设航向和旁向两对框标间的距离分别为 L_X 和 L_Y ，而在航摄像片上量出的相应距离分别为 l_X 和 l_Y ，则航向伸缩系数 K_X 和旁向伸缩系数 K_Y 分别为

$$K_x = \frac{l_x}{L_x} \quad K_y = \frac{l_y}{L_y} \quad (1-3-1)$$

设在已伸缩的航摄像片上量出的象点坐标为 (x, y) ，则可用 K_x 和 K_y 来计算经伸缩改正后的象点坐标 (x', y') ，即

$$x' = \frac{1}{K_x} x \quad y' = \frac{1}{K_y} y \quad (1-3-2)$$

当 $K_x = K_y$ 时，叫做均匀变形，否则，叫做不均匀变形。按目前规范规定，当变形系数 δ 小于 0.0015 时，可认为 $K_x = K_y$ ，即可用 K_x 代替 K_y ，否则象点坐标 (x, y) 应分别采用不同的伸缩系数进行改正。计算 δ 值的公式如下：

$$\delta = \frac{K_x}{K_y} - 1 \quad (1-3-3)$$

假如不改正象点坐标，则应改正航摄像片主距，以保证光束形状不变，如图 1-3-2 所示，由图可知

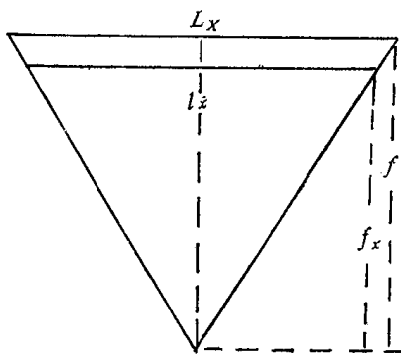


图 1-3-2

$$\frac{f_x}{l_x} = \frac{f}{L_x}$$

$$\text{即 } f_x = \frac{l_x}{L_x} \cdot f = K_x \cdot f \quad (1-3-4)$$

同理 $f_y = K_y \cdot f$

式中 f_x 为适应 x 坐标的主距，
 f_y 为适应 y 坐标的主距，
 f 为改正前的主距。

在电算加密中，最好不采用改变主距的方法来改正航摄像片的变形。否则，在同一区域将出现许多不同的主距值。此外，严格地讲，主距值与镜头畸变差值有关，否则镜头畸变差也应作相应调整。改正后的主距只供测图作业中使用。

(二) 框标位于象片四角时的改正方法

如图 1-3-3 所示，框标设置在象片的四个角隅。这种设置框标的方式，在改正象片变形方面，比上述设置方式有利。利用这类框标，同样可用 (一) 中所述方法改正象片变形。但采用下述方法，可以更有效地改正航摄像片的变形。

假设改正后的象点坐标 (x', y') 与改正前的象点坐标有下列关系

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ y' &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned} \right\} (1-3-5)$$

式中 a_i 和 b_i ($i=1, 2, 3, 4$) 为 8 个待定的变换参数，这些参数可利用框标坐标反算出来，

然后，再按 (1-3-5) 式计算各点改正后的坐标 (x', y') 。具体步骤如下：

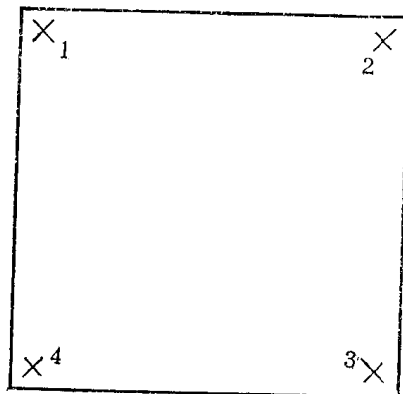


图 1-3-3

- ①在立体坐标量测仪上，精确地量出框标样片上各框标的坐标 (x'_1, y'_1) ， (x'_2, y'_2) ， (x'_3, y'_3) ， (x'_4, y'_4) ；
- ②相应地在航摄像片上量出各框标的坐标 (x_1, y_1) ， \dots ， (x_4, y_4) ；
- ③利用上述框标坐标按 (1—3—5) 式可列出八个方程式；
- ④答解方程式，求出 a_1, \dots, a_4 和 b_1, \dots, b_4 八个变换参数；
- ⑤按各象点量测坐标 (x, y) ，再利用 (1—3—5) 式 (此时八个变换参数采用 ④ 中算出之值) 计算各象点改正后的坐标 (x', y') 。

改正前后的象点坐标之间究竟采用什么样的关系式最合适，需要通过试验才能确定。(1—3—5) 式也可改用下述 (1—3—6) 或 (1—3—7) 式来代替，改正步骤不变。

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 \\ y' &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy + a_9x^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-3-6)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + 1} \\ y' &= \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + 1} \end{aligned} \right\} \quad (1-3-7)$$

式中 a_i 、 b_i 和 c_i 分别为待定的变换参数。

框标位于四边中央时，虽然也可以采用上述改正方法，但对象片四角的控制较差。

为直接计算以象主点 (严格地说，是象片中心点) 为原点的改正后的象点坐标，要求样片上框标坐标的量测亦应以象主点为原点，否则应考虑原点平移问题。

航摄底片的片基材料不同或出厂批号不同，都有可能产生不同的变形，各种类型的底片都应通过实验来确定采用何种改正公式，不能千篇一律。

当框标布设在四边中央和四角时，共有八个框标可以利用。假如仍采用上述方法和公式，则可列出16个方程式。此时，有了多余观测，变换参数要用间接观测平差方法来确定。

(三) 带格网的象片变形改正方法

带格网的象片可以利用本身的格网，精确地改正航摄像片的变形。在摄取这种象片的航摄仪承片玻璃上，每隔 1cm 刻有一个“+”字标志，构成正方格网。例如 AΦA—41 航摄仪，在 18cm×18cm 的范围内，刻有 17×17 个“+”字标志，构成了边长为 1cm 的正方格网。每次航摄曝光时，这些格网也同时晒印在航摄底片上。在承片玻璃上每一“+”字标志的坐标是已知值，因此，只要在航摄像片上，也量测出这些“+”字标志的坐标，就可用来改正航摄像片的变形，具体方法如下：

- ①在立体坐标量测仪上量测各象点坐标时，同时量测离每一象点最近的四个十字标志的坐标；
- ②利用每一象点最近的四个十字标志的量测坐标，以及每一十字标志的应有坐标，按 (1—3—5) 式列出八个方程式，并解算出该方格的变换参数；
- ③利用每一小方格的变换参数，再按 (1—3—5) 式计算该方格中各象点的改正坐标。

重复②、③逐点进行改正。

另一改正方法如下

①在立体坐标量测仪上将象片按格网定向后,量测各象点坐标 (x, y) , 以及离该象点最近的十字标志坐标 (x_+, y_+) ;

②计算各象点对最近的十字标志的坐标差 $(\Delta x, \Delta y)$, 即

$$\Delta x = x - x_+, \quad \Delta y = y - y_+;$$

③计算改正后各象点坐标 (x', y') , 即

$$x' = x'_+ + \Delta x$$

$$y' = y'_+ + \Delta y$$

式中 (x'_+, y'_+) 为十字标志应有的正确坐标值。该值很容易由其量测值 (x_+, y_+) 判别出来。

若象片在立体坐标量测仪上未按格网定向,则 $(\Delta x, \Delta y)$ 应考虑坐标系的旋转向题。

由上述可知, 这些改正方法虽能精确地或较精确地改正航摄像片的变形, 但不论在量测作业工作量方面, 还是在计算工作量方面, 都大大地增加了, 所以, 只能在高精度量测作业中采用。

通常, 为了改正这种象片的变形, 可以把周边的“+”字标志作为框标使用, 按(二)中所述方法进行改正。由于可利用的标志很多, 象片变形改正公式可以改用下列形式

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 \\ y' &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5x^2 + b_6y^2 + b_7x^2y + b_8xy^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-3-8)$$

【二】航摄仪物镜的畸变差

在理想情况下, 过物镜节点的入射光线与出射光线的方向是平行的。因而, 把航摄像片视为地面的中心投影。实际上, 入射光线与出射光线并不平行, 如图1-3-4(a)所示。物点A应构象于 a' , 但由于出射光线不平行于入射光线, 而构象于 a , 也就是使象点产生了移位 $a'a$, $a'a$ 就是物镜的畸变差。使象点向外(离开象片中心)移位, 叫做正畸变, 反之, 叫做负畸变。这两种畸变可使一个正方形变成如图1-3-4(b)、(c)所示的图形, 所以, 又分别叫做枕形畸变和桶形畸变。

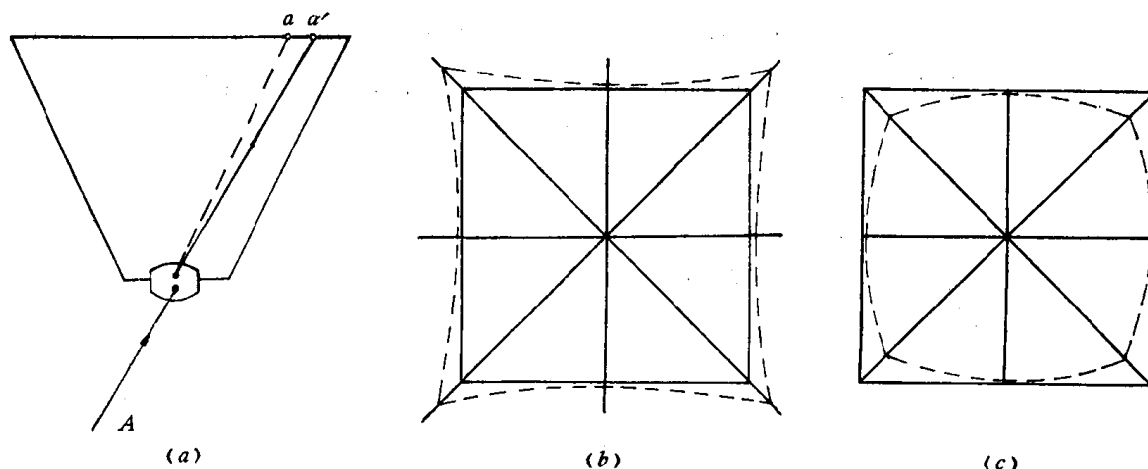


图 1-3-4