实用概率统计学

（概率及其应用）

高 明 坤 编著

国 防 工 業 出 版 社

实用概率统计学

（概率及其应用）

高 明 坤　编著

国防工业出版社

内容简介

书中着重介绍了各种状态下的概率计算方法及其在工业、农业、医学、企业管理、军事方面的应用，常用的各种随机变量的分布函数及数字特征的近似计算，极限定理的广泛应用，蒙特-卡罗法在实际问题中的随机模拟计算，概率在可靠性工程中广泛应用，数论网格法及散布网法的应用介绍。附录中对测度论、集合论、排列与组合和矩阵作了简介。为了自学的方便，书中还精选了数百例典型而实用的例题。本书可供科研工作者、工程技术人员，以及高等院校师生使用和参考。

实用概率统计学
(概率及其应用)
高明坤 编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32 印张$16^3/_4$ 443千字
1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷 印数：0,001—3,400册

ISBN 7-118-00048-5/O1 定价：9.70元

前　言

随着我国工业、农业、国防、科学技术的蓬勃发展，概率统计这门学科正在被广泛地应用到自然科学与社会科学的许多领域中去。例如，自动控制、电子工程、水文气象、航海、地质、医学、人口控制、农业、财贸、企业管理、军事指挥与战斗使用等，都越来越多地应用概率统计理论及其数学方法来解决有关的实际问题。由于概率统计本身具有不同于其它学科的特点，使学者感到有些基本概念难懂、习题难做、方法难于掌握，而对科研和工程技术工作者往往用概率统计理论去解决实际问题时感到无从下手，即使结果得出，但往往也无具体方法加以验证。这样，就迫切需要有一本既有理论，又能密切联系实际应用的概率统计方面的书籍，来帮助克服学习和应用中的困难。有鉴于此，作者从科研和工程应用出发，在长期科研和工程实践的基础上，概括和总结了概率统计的系统理论、各种概率统计方法、典型的实用例题，写成了《实用概率统计学》一书。希望它能对科研、工程技术人员，以及高等院校师生有所帮助。

本书力求做到：理论的完整性，对概率统计中最基本的概念、定理、公式，作全面和严格的叙述，尤其对随机现象和概率统计方法要阐述清楚它的基本概念和客观实际意义；应用的广泛性，既有一定数量的帮助理解掌握概念、定义及定理方面的例子，又大量引用了应用于各个领域的随机现象的实际例题，特别是有典型应用价值的例题，以体现本书的实用性特点。

全书共分三册。第一册概率及其应用；第二册数理统计及其应用；第三册随机过程及其应用。本书是《实用概率统计学》一书的第一册，书中着重介绍了各种状态下的概率计算方法及其在工业、农业、医学、企业管理、军事方面的应用，常用的各种随

机变量的分布函数及数字特征的近似计算，极限定理的广泛应用，蒙特-卡罗法在实际问题中的随机模拟计算，概率在可靠性工程中的广泛应用，数论网格法及散布网法的应用介绍。书中附录对有关的基础理论，如测度论、集合论、矩阵等作了简介。为了自学和应用的方便，还精选了200多个典型实用例题。在每章后附有一定数量的习题和答案，供读者练习用。本书内容丰富，方法新颖、实用。

本书编著和出版过程中，得到王会懋和周淦林等有关领导的大力支持和帮助，以及张恩举、高林、杨健威、瞿守春、李银芳、蔡浩吉、金继元等有关同志的帮助，在此谨向这些同志致谢。

本书如能在“四化”中发挥作用，作者将引以为自慰。由于作者水平有限，不当之处欢迎批评指正。

高明坤

目　录

第一章　随机事件和概率计算

§1.1　随机事件的引出及其运算

在一切科学试验的结果中，事件按发生可能性大小，划分为三类：

在试验结果中，必然要发生的事件称为必然事件（或基本事件空间），记为Ω。

在试验结果中，必然不发生的事件，称为不可能事件，记为ϕ。

在试验结果中，可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件（简称事件）记为$A, B, C, \cdots\cdots$。

下面举几个随机事件的例子。

三次射击"至多命中目标3次"是必然事件，而"命中目标4次"是不可能事件，而"命中小于2次"的事件，就是随机事件。

用平板仪测量某座山高5次，得x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，则平均数$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i$与实际山高$H$之差小于5：$|\bar{x}-H|<5$是随机事件。

在通常的上午1min内某电话总机接到用户呼唤多于3次，是随机事件。

在一批显象管中，某个显象管出现寿命为3000 h的现象，为随机事件。

用某种饲料喂猪，某一头猪在一周内体重增加4斤的现象，为随机事件。

用某种通讯系统进行一次包括60个电码的无线电通讯，则至

少有 4 个电码失真，是随机事件。

黄河中游某处（该处年总流量平均约为820 亿米^3）在无特大自然变动情况下，该处年总流量超过830亿米^{3}是随机事件。

N个气体分子在温度为T的密闭容器中自由运动，则运动速度在v_1到v_2之间的分子个数超过$\frac{N}{3}$是随机事件。

在100亩生长相当均匀的成熟麦田中，随机收割1亩得产量400斤，则100亩总产量与估计产量$400\times100=40000$(斤）相差不超过500斤是一个随机事件。

随机试验含意是，在相同条件下重复试验，试验的所能发生的各种结果是已知的，但具体每次取什么试验结果在试验前是不能确定的，进行的这种试验（或实验）为随机试验（或实验)。这里相同条件（或一定的条件）很重要。我们只考虑可以在相同条件下重复进行的随机试验。

随机试验举例。记样本空间为Ω。

在一定的条件下进行射击，并观察是否命中目标。随机试验有两种可能的结果：未命中目标，记“0”，命中目标，记“1”，则有$\Omega=\{0,1\}$。

观察某交换台早晨8.00～9.00接到电话呼唤的次数$n=i$，$i=0,1,2,\cdots$，则$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。

在长为t的时间段上观察三级以上地震出现的次数$k=i$，$i=0,1,2,\cdots$，则$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。

在分析天平上称量某物品并记录称量结果ξ；设物品的真实重量为a，并以$\xi=a+e$表示称量结果，其中e表示称量误差。$\xi=x$，x原则上可以是任意实数（这样的假定在数学上是容许的，而实际上x只能在某个范围内变化)。则$\Omega=(-\infty,\infty)$。

在某固定地区观察从一次三级以上地震到下一次三级以上地震的时间间隔τ，则$\Omega=(0,\infty)$。

悬浮在液体中的固体微粒在液体分子的撞击下作不规则运动

(布朗运动)。微粒布朗运动的每一个可能轨道，就是该随机试验的样本空间（Ω）。

我们将试验（或实验）的所有不同的结果的总和称作子样空间，记为Ω，或称样本空间，而把子样空间中的每一个结果称作简单事件，或称基本事件，或称子样空间的元素。上述随机试验各例子中的Ω，即为样本空间。为了更进一步说明样本空间，再举例如下。

某批显象管出现废品率p的现象，$\Omega=\{0\leqslant p\leqslant 1\}$，含意是显象管的废品率$p$从0～1的所有数值都有可能出现。

在一个形状为旋转体的均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间〔0，3）上的诸数字。旋转这个陀螺。当它停下时，它的圆周与桌面接触处的刻度总是区间〔0，3）上的一个数，在完成试验前，并不能肯定这刻度的数字。样本空间为选取区间〔0，3）上的全体点组成的集合。

用步枪射击靶子上的点目标时，枪弹击中的位置是(靶子)平面上的一个点，但是，按所给的条件，在完成试验前，并不能肯定击中的位置是哪个点。选取靶子所在的平面内的全体点组成的集合为基本空间（或样本空间）。

在进行一个试验（或实验）中，事件之间有一定的关系和运算如下：

（一）导致（包含）

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A含于事件B，或称事件B包含事件A，并记为$A\subset B$，或$B\supset A$。例如，高炮向敌机连发2弹，则“命中1弹”（记为A_1）导致“击中敌机”（记为B）；“命中2弹（记为A_2）也导致“击中敌机”。则$A_1\subset B$，$A_2\subset B$。对任何事件A，有

$$\phi\subset A\subset\Omega$$

（二）相等（等价）

如果事件A与B只能同时发生或同时不发生，即$A\subset B$，而且$B\subset A$，则称A与B相等，记为$A=B$。例如，用步枪对靶标

射击，“命中靶标”（A），“靶标穿一孔”（B），它们只能同时出现或同时不出现，故$A=B$。再例如，从一批产品中随机取10件，则“至少抽到1件次品”（A）和“抽到了次品”（B）互相导致，因而$A=B$。

（三）和（并）

如C表示“事件A与B中至少有一个发生”这一事件，则称C为A与B之和，记为$C=A\cup B$（符号$\cup$在这里是表示“或”的意思)。例如，某交换台接到电话呼唤的次数并表示为n，而$n=i$（$i=0, 1, 2, \cdots$），记$A=\{20<n\leqslant 150\}$，$B=\{n\geqslant 100\}$，那么$A=\bigcup\limits_{i=21}^{150}A_i$，$B=\bigcup\limits_{i=100}^{\infty}A_i$，则$A\cup B=\{n>20\}$。一般表示：如把“事件$A_1$或$A_2$或$A_3$……或$A_n$至少有一发生”作为事件$A$，则$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，或记为$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。例如，进行一次科学试验，直到成功为止，若$A$表示试验成功数，$A_i$表示试验到第$i$次才成功，则$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

（四）积

如果把“事件A和B同时发生”作为事件C，则事件C为A与B之积，并记作$C=A\cap B$。例如，一电路上有两个开关，则“电路接通”(C）是“开关Ⅰ接通”（A）与“开关Ⅱ接通”（B）之积，$C=AB$(如图1-1)。一般表示：如果把“事件$A_1, A_2, \cdots,$

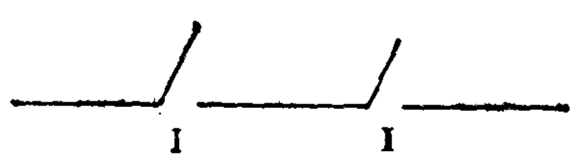

图 1-1

A_n同时发生”作为一个事件A，则$A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，记作

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i。$$

事件积的性质：

（1）对事件A有$A\cap\Omega=A$，$A\cap\phi=\phi$；

（2）若事件A_1、A_2互不相容，则$A_1\cap A_2=\phi$。

（五）互不相容

如果事件A与B不能同时发生，则称事件A与B为互不相容，并记为$AB=\phi$。例如，高炮向敌机连发2弹，则"击中敌机"（A），与"未击中敌机"（B），为互不相容。如$A_1,A_2,\cdots,A_n$中任意两个事件互不相容，则一般记为$A_iA_j=\phi$（$i\neq j$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$）。

（六）差

如果把"事件A发生而事件B不发生"作为事件C，则C为A与B之差，记为$C=A-B$。（符号"－"，表示"非"的意思）。例如，高炮向敌机连发2弹，则"命中1弹"（以C表示）是"命中敌机"（A）与"命中2弹"（B）之差$C=A-B$。

对事件A，由差的定义有

$A-A=\phi$，$A-\phi=A$，$A-\Omega=\phi$。

（七）余事件（或逆事件、对立事件）

如事件A、事件$\overline{A}$（$\overline{A}$表示A不发生事件）至少有一发生，但又不能同时发生时，称A、$\overline{A}$为对立事件（或余事件、逆事件）。A与它的余事件$\overline{A}$之间有下列关系：

$$A\cup\overline{A}=\Omega\qquad（竭尽可能）$$

$$A\cap\overline{A}=\phi\qquad（互不相容）$$

$$\overline{\overline{A}}=A$$

例如，射击时，"命中目标"（A）与"不命中目标"（$\overline{A}$）为对立事件。

（八）相等可能事件

一组事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$在重复进行试验时，事先没有根据认为那一个出现的次数较多，对此试验而言，这一组事件称为相

等可能事件。

定义 一组同时具有互不相容，相等可能与竭尽可能性质的事件，称为此试验的基本事件集，构成基本事件集的每一个事件称为基本事件。

事件运算满足下述关系：

（1）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cap C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（3）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

（4）$A-B=A\cap\overline{B}$；

（5）$\overline{\bigcup\limits_k A_k}=\bigcap\limits_k\overline{A}_k$（$k=1,2,\cdots,n$）。

例 向一个指定的目标连射 3 枪。以 A_i 表示事件“第 i 枪击中目标”（$i=1,2,3$）。给出下列诸事件的表达式。

（a）第一枪、第三枪中至少有 1 枪击中；

（b）只有第一枪击中；

（c）只击中 1 枪；

（d）至少击中 1 枪；

（e）3 枪都击中；

（f）3 枪都没有击中。

解 （a）$A_1\cup A_2$。

（b）$A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$。

（c）$(A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)$。

（d）$A_1\cup A_2\cup A_3$。

（e）$A_1\cap A_2\cap A_3$。

（f）$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$。

例 有甲、乙、丙 3 种报纸。某单位成年人中，订甲报的有45%，订乙报的有35%，订丙报的有30%。其中，同时订甲、乙

两报的有10%，同时订甲、丙两报的有8%，同时订乙、丙两报的有5%，同时订3种报的有3%。求下列百分比。

(a) 至少订1种报纸的；

(b) 不订任何报纸的；

(c) 只订甲、乙两报的；

(d) 恰好订2种报的；

(e) 只订甲报的；

(f) 只订1种报的。

解 题中的各个百分比，实际上就是有关事件发生的概率。所以，本题也是一个概率计算题。该单位任一成年人，以A、B、C分别表示他订甲报、订乙报、订丙报这3个事件。由题设有：

$$P(A)=0.45,\ P(B)=0.35,\ P(C)=0.3,$$
$$P(AB)=0.1,\ P(AC)=0.08,\ P(BC)=0.05,$$
$$P(ABC)=0.03$$

(a) 事件A、B、C是相容的，于是该单位任一成年人至少订1种报这个事件，表示为$A\cup B\cup C$。由n个相容事件的加法公式

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\\&-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k<n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned}$$

有
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A+B+C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)\\&\quad-P(AB)-P(BC)-P(AC)\\&\quad+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.3-0.1-0.05\\&\quad-0.08+0.03=0.9\end{aligned}$$

即该地成年人中至少订1种报纸的有90%。

（b）该单位任一成年人不订任何报纸这个事件，可表示为 $\overline{A\cup B\cup C}$，有

$$P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.9=0.1$$

表示该单位成年人中不订任何报纸的有10%。

（c）只订甲、乙两报这一事件，可表示为 $AB\overline{C}$。

由于 $$(A\cap B\cap C)\cap(A\cap B\cap\overline{C})=\phi$$
$$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})=A\cap B$$

所以

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P((A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap\overline{C})\end{aligned}$$

则有

$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0.1-0.03=0.07.$$

该单位成年人中只订甲、乙两报的有7%。

（d）$(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$，由于 $A\cap B\cap\overline{C}$，$A\cap\overline{B}\cap C$，$\overline{A}\cap B\cap C$ 两两互不相容，得

$$\begin{aligned}P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)&=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)\\&=0.07+0.05+0.02\\&=0.14\end{aligned}$$

该单位成年人中恰好订两种报纸的有14%。

（e）$A\overline{B}\overline{C}$，由于 ABC、$AB\overline{C}$、$A\overline{B}C$、$A\overline{B}\overline{C}$ 为两两互不相容，且有

$$\begin{aligned}ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C}&=(ABC+AB\overline{C})+(A\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C})\\&=AB+A\overline{B}\\&=A\end{aligned}$$

$$P(A)=P(ABC)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(A\overline{B}\overline{C})$$

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\overline{C})&=P(A)-P(ABC)-P(AB\overline{C})-P(A\overline{B}C)\\&=0.45-0.03-0.07-0.05\\&=0.3\end{aligned}$$

该单位成年人中只订甲报的有30%。

（f）$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$，事件$A\overline{B}\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\overline{B}C$两两互不相容，得

$$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$$

而

$$P(A\overline{B}\overline{C})=0.3$$

$$P(\overline{A}B\overline{C})=P(B)-P(ABC)-P(AB\overline{C})-P(\overline{A}BC)=0.35-0.03-0.07-0.02=0.23$$

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(C)-P(ABC)-P(A\overline{B}C)-P(\overline{A}BC)=0.3-0.03-0.05-0.02=0.20$$

所以

$$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=0.3+0.23+0.20=0.73$$

该单位成年人中只订1种报的有73%。

例 向3个相邻的军火库投掷1颗炸弹，炸中第一军火库的概率为0.025，炸中其余2个军火库的概率各为0.1。只要炸中1个，另外2个也要发生爆炸，求军火库发生爆炸概率。

解 设A、B、C分别表示炸弹炸中第一、第二、第三军火库这3个事件。由题设有：$P(A)=0.025$，$P(B)=P(C)=0.1$。又设D表示军火库发生爆炸事件，则$D=A+B+C$，由于A、B、C互不相容，有$P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=0.225$。

§1.2 事件概率的定义及其应用

（一）古典概率

定义 如果试验结果中存在有一组基本事件集，则在此试验中任一事件A出现的概率等于导致A出现的基本事件数m与总的基本事件数n的比值$\frac{m}{n}$，称作事件A的概率，表示为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$