常微分方程理论及其应用

王　联　蒲富全　刘永清　俞元洪　编

科学出版社

常微分方程理论及其应用

王　联　蒲富全　刘永清　俞元洪　编

科学出版社

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书为1992年在烟台召开的"全国第四届运动稳定性理论与应用学术讨论会"的优秀论文专辑，其中包括会议筹备组特别邀请的有关学者撰写的综述报告13篇，专题论文59篇，以及研究简报66篇．本书全面、系统地总结了近40年来我国学者在这个广阔领域中所获得的丰硕成果，并充分介绍了该领域的最新研究进展．内容涉及常微分方程、泛函微分方程、Volterra积分微分方程、常差分方程等学科的稳定性和定性理论及其在控制论、生物、现代物理和力学等方面的应用．

本书可供大学数学系、应用数学系、生物系、力学系和物理系学生、研究生、教师和有关的科学工作者参考．

常微分方程理论及其应用

王 联 蒲富全 刘永清 俞元洪 编

责任编辑 吕 虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

顺义马坡印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行各地新华书店经售

*

1992年10月第一版　　开本：787×1092 1/16

1992年10月第一次印刷　　印张：16

印数：1—2 800　　字数：363000

ISBN 7-03-002989-5/O·553

定价12.30元

编 者 的 话

全国第四届运动稳定性理论与应用学术讨论会是前三次会议的继续和深入. 今年恰好是俄罗斯学者A. M. Ляпунов(Liapunov, 李雅普诺夫)发表他的著名博士论文《运动稳定性的一般问题》100周年. 因此本次会议一方面是为了纪念"运动稳定性理论"的奠基人、著名的学者A. M. Ляпунов的博士论文的发表, 另一方面也是为了祝贺在这一领域做出杰出贡献的、我国著名学者秦元勋教授的70岁生日.

众所周知, 早在50年代中、后期, 在秦元勋教授的领导和主持下, 我国的常微分方程工作者, 先后举办了系统学习和深入研究Poincaré的《微分方程定义的积分曲线》等四篇论文及A. M. Ляпунов的《运动稳定性一般问题》的博士论文的讨论班, 从而为我国科技工作者在这个学科领域中开展研究工作奠定了基础. 当今我国的常微分方程工作者在定性理论和运动稳定性理论所获得的丰富研究成果, 特别是在与Hilbert第16问题密切相关的"极限环"这个课题的研究中所取得的世界领先地位, 都有秦元勋教授不可磨灭的功劳. 正是由于这个原因, 所以本次会议自1991年3月发出征文通知以来, 得到了我国数学界、力学界, 以及科学史工作者强烈的反响, 来自除西藏、台湾外的全国各个省市的应征稿件达200篇之多. 从征文、审稿, 直至会议文集编辑加工的整个过程中, 都得到我国广大科技工作者的大力支持和合作. 在此, 我们向关心和支持本次会议、并为此积极撰写论文的所有专家、教授及科技工作者表示诚挚的谢意[1].

本次会议是由中国科学院应用数学研究所、数学所、清华大学、华南理工大学、中山大学、烟台师范学院等20多个单位联合发起,并受中国数学会的委托由中国科学院应用数学研究所、烟台师范学院负责承办的. 除上述单位外、本次会议还得到厦门大学、山东大学、华南师大、河南师大、昆明工学院、南京大学、北京航空航天大学、安徽大学、西北大学、东北师大、内蒙古师大、辽宁师大、白城师专、福建师大、上海师大、东南大学、湖南大学、贵州大学、浙江大学、绵阳师专、中国科学院系统科学研究所、贵州师大、河北师大、山东师大、云南师大、华中师大、合肥工大、国家地震局地震研究所等单位的大力支持和慷慨赞助. 在此, 我们谨向这些单位和有关领导同志及专家表示衷心感谢!

中国科学院应用数学研究所的领导和业务处的同志、烟台师院的领导和数学系的同志科、学出版社的领导和一编室的同志, 对本次会议的召开和本文集的出版给予了大力的支持, 并付出了艰辛的劳动. 在此, 谨向他们表示深切的谢意.

王　联　蒲富全

刘永清　俞元洪

1992年元月于北京

1) 本文集的综述报告是会议筹备组特别邀请有关学者撰写的.

序

今年是俄罗斯数学家A. M. Ляпунов（李雅普诺夫）发表著名博士论文《运动稳定性的一般问题》100周年，恰好又逢法国数学家H. Poincaré（庞加莱）完成他的不朽著作《微分方程定义的积分曲线》110周年. 对于广大的科学技术工作者，特别是对于常微分方程工作者来说，今年是非常值得纪念的一年.

H.Poincaré和A.M.Ляпунов的工作有许多特色. 从选题方面，他们从那个时代的突出问题（例如天体力学中的三体问题及旋转恒星的稳定性等）的背景出发，提升出准确的数学问题，创造了新的数学方法（如无切环线和A.M.Ляпунов函数），深入地解决问题（例如中心判据和临界情况的问题最终处理），为非线性问题的研究提供了新的有力工具，开创了新的数学分支（如实域定性理论、组合拓扑学、运动稳定性理论等），丰富了数学科学本身，并且在新的科学技术发展中（例如自动控制理论、非线性振动理论、生态平衡问题和航天科学等）不断得到新的应用和发展（例如偏微分方程的运动稳定性理论、带有随机项的运动稳定性理论. 泛函微分方程的运动稳定性理论、离散动力系统的运动稳定性理论、复域的常微分方程定性理论、偏泛函微分方程的运动稳定性理论、混沌动力系统等等）.

我国的常微分方程工作者和有关的科学技术工作者一起用自己创造性成果进行交流、集会讨论，用以纪念这两位杰出的数学家，并出版这本论文选集，特为之序.

秦元勋
中国科学院应用数学研究所
美国佛罗里达大学数学系
1992年1月1日

目 录

综 述 报 告

专 题 论 文

研　究　简　报

综　述　报　告

复多项式焦点系统

秦元勋

（中国科学院应用数学研究所）

对于给定正整数n，考虑复域中多项式系统

$$\frac{dw}{dT}=W_n(w,z)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}a_{k,j-k}w^k z^{j-k}$$

$$\frac{dz}{dT}=Z_n(w,z)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}b_{k,j-k}w^k z^{j-k} \qquad (E_n^*)$$

其中复变量$w=u+iv$，$z=x+iy$，$T=t+i\tau$，复系数$a_{j,k}=a_{j,k}^{*}+ia_{j,k}^{**}$，$b_{j,k}=b_{j,k}^{*}+ib_{j,k}^{**}$．由实系数$a_{j,k}^{*}$，$a_{j,k}^{**}$，$b_{j,k}^{*}$，$b_{j,k}^{**}$$(0\leqslant j+k\leqslant n)$组成实欧氏空间$E=E^{2(n+1)(n+2)}$，$E$中任一点对应一个多项式系统$(E_n^*)$．

定义 1．如果系统(E_n^*)的所有有限奇点和无穷远奇点均为焦点型，即(E_n^*)在任一奇点处的两个特征根λ_1,λ_2满足$\lambda_1\lambda_2\neq0$，$I_m\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\neq0$，则称之为复多项式焦点系统，简称为焦点系统．

定理 1（通有性定理）．在$E^{2(n+1)(n+2)}$空间中除了一个零测度集以外，所有点对应于焦点系统．

定理 2（强有根定理）．任一焦点系统(E_n^*)的任一积分曲面至少与(E_n^*)的某一无穷远奇点相连接．

定理 3（通解的全局典则形式）．焦点系统的通解可表示为如下典则形式：

$$\exp(G(w,z))\prod_{j=1}^{n+1}(G_j(w,z))^{A_j}=C$$

其中$G_j(w,z)=0$表示过无穷远奇点Q_j的极限曲面$(1\leqslant j\leqslant n+1)$，$G(w,z)$在除有限奇点之外的所有点$(w,z)$处有限解析．

注记．类似于实域情形，可定义高阶焦点．如果(E_n^*)的所有有限奇点和无穷远奇点为焦点（任意阶），则称之为广义焦点系统．由高阶焦点附近的拓扑结构和局部通解形式

知，相应的定理 1 和定理 2 成立，此时定理 3 中的表达式为

$$\exp(G^*(\zeta,\eta))\zeta\prod_{j=1}^{n+1}\left(\frac{f_j(\zeta,\eta)}{(h_j(\zeta,\eta))^{1/k_j}}\right)^{A_j}=C$$

其中对 0 阶焦点$h_j(\zeta,\eta)=1$，k_j阶焦点

$$h_j(\zeta,\eta)=1+(\zeta g_j(\zeta,\eta))^{k_j}\Big[\frac{k_j}{2}A_{k_j}L_n(g_j(\zeta,\eta)/\zeta)$$
$$-\frac{k_j}{2}C_{k_j}L_n(\zeta g_j(\zeta,\eta))\Big]+(*)$$

由于在一焦点附近，通解可局部表示为

$$\exp(G(w,z))(f_1(w,z))^A(f_2(w,z))=C$$

其中

$$f_1(w,z)\equiv w-\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j,\quad f_2(w,z)\equiv z-\sum_{j=0}^{\infty}b_jw^j,\ |w|<\varepsilon,\ |z|<\varepsilon$$

且$G(w,z)$在$|w|<\varepsilon$，$|z|<\varepsilon$中单值解析．我们称对应于$C\neq0,\infty$的解曲面为在该焦点处局部超越．

定义 2．焦点系统(E_n^*)的全局解曲面F从逻辑上分为以下三种类型：

螺旋型：F在它上面的所有焦点处均超越；

代数型：F在它上面的所有焦点处为代数型；

混和型：F在它上面的一些焦点处为超越型，又在其它焦点处为代数型．

不难举例说明，这三种类型的解曲面都存在．

定理 4．对任一焦点系统(E_n^*)，至多除去$2n^2+n+1$个解曲面，其它解曲面都为全局螺旋型；任一全局螺旋型的解曲面均与$(n+1)$个无穷远奇点相连且螺旋地逼近于在$(n+1)$个无穷远焦点处为代数型的$(n+1)$个解曲面，也趋于∞平面．

定理 5．设F为焦点系统(E_n^*)之一解曲面．如果F在所有奇点处为代数型，则F必为一代数曲面；对$n>1$，在$E^{2(n+1)(n+2)}$中除去一个零测度集外，所有其它点对应的多项式系统(E_n^*)均无代数解曲面．

定义 3．设F为焦点系统(E_n^*)之一混和型解曲面．如果F只在其上一个焦点处为代数型且只过此焦点一次，则称之为简单混和型；否则称之为多重混和型．

定理 6．对$n>1$，则在$E^{2(n+1)(n+2)}$空间中除了一个零测度集以外，所有其它点对应于具有如下性质的焦点系统：

(i) 恰有$2n^2+n+1$个不同的简单混和型解曲面；

(ii) 所有其它解曲面均为螺旋型．

作为焦点系统理论的应用，下面考虑实域中的多项式系统：

$$\frac{du}{dt}=U_n(u,x)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}a^*_{k,j-k}u^kx^{j-k}$$
$$\frac{dx}{dt}=X_n(u,x)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}b^*_{k,j-k}u^kx^{j-k}\qquad(E_n)$$

其中u,x,t为实变量，$a^{*}_{j,k},b^{*}_{j,k}$为实系数．把(E_n)自然扩张为复多项式系统：

$$\frac{dw}{dT}=U_n(w,z),\quad \frac{dz}{dT}=X_n(w,z) \tag{E_n^*}$$

其中$w=u+iv$，$z=x+iy$，$T=t+i\tau$.

定义4．对(E_n^*)的任一焦点P，存在两个特征根λ_1,λ_2以及两个相应的过P的解曲面$F_1=0,F_2=0$．我们称它们为特征解曲面．

不难看出，焦点系统(E_n^*)至多有$2n^2+n+2$个特征解曲面（包括∞特征解曲面）．

定理7（联系定理）．设(E_n)的自然扩张复系统（E_n^*）为一焦点系统，则(E_n)的任一实极限环必为实平面$(v=y=0)$与(E_n^*)的某一特征解曲面之交．

定理8．如果(E_2)的自然扩张(E_2^*)为一广义焦点系统．则(E_2^*)的所有奇点具有类型(F,F,f,f,F,f,f)（其中F表示实焦点，f表示复焦点），且(E_2^*)的任一解曲面（除∞特征解曲面外）至少与(E_n^*)的两个复有限焦点之一相连．

定理9．设(E_2)的自然扩张(E_2^*)为一广义焦点系统，则(E_2)的实极限环最大个数$N(E_2)$满足

$$N(E_2)\leqslant 4$$

且如果极限环数目达到4，则必为(1,3)分布．此外，(E_2)极限环数目达到4可通过适当微扰系统的实系数并使相应的(E_2^*)仍为焦点系统来实现．

在此基础上，通过进一步分析讨论具有三阶细焦点的实系统(E_2)之十个参数区域(见文[1]p.143)，可得如下(E_2)的基本定理：

定理10．多项式系统(E_2)的极限环最大数目为4，且达到4时必为(1,3)分布．此外，最大数目可通过(E_2)的系数微扰并保持相应的自然扩张(E_2^*)为焦点系统来实现．

参 考 文 献

[1] 秦元勋，常微分方程定义的积分曲面，西北大学出版社，1985.

[2] Yuan-shun Chin, On Surfaces Defined by Ordinary Differential Equations,A New Approach to Hilbert's 16th Problem,Lecture Notes in Math.,1151,1984,115—131.

[3] ——, On Surfaces Defined by ordinary differential equations(II), Proceedings of Ohio Conference,Ohio University,1988,165—175.

[4] 秦元勋，科学通报，33(1988)，18，1361—1363.

[5] Yuan-shun Chin (Yuanxun Qin),Foci system of complex polynomial system(I),(II),(III), 1991(preprints).

Ляпунов第二方法及其应用※

王　联　王慕秋

（中国科学院数学研究所）

A.M.Ляпунов的博士论文“运动稳定性的一般问题”[1]是1892年发表的.在前苏联，自本世纪30年代开始，稳定性理论已受到极大重视，这是与自动控制技术的发展分不开的. 自1956年开始，秦元勋教授在国内首先开始了运动稳定性理论的研究. 1958年夏天，他在北京大学开办了一个有关运动稳定性的讲习班，并编写了《运动稳定性的一般问题讲义》[2]. 从这以后，他提出了微分差分方程与微分方程稳定性的等价问题、[3]稳定性理论中方程组的分解问题等重要研究课题. 至今国内研究稳定性理论已取得了非常丰富的成果，这与秦元勋教授当时所作的努力是分不开的. 50年代末、60年代初期，美国学者开始对稳定性问题发生兴趣. 1961年出版的J.Lasalle 和 S.Lefschetz的“Stability by Liapunov's Direct Method with Application”是近年来人们经常引用的专著之一[3].

运动稳定性理论研究干扰性的因素对于物质系统运动的影响. 所谓干扰性的因素应理解为那些在描述运动时，由于与基本力相比甚小而未曾加以考虑的力. 这些力通常是不确切知道的. 它们可以是瞬间的作用，因而引起物质系统的初始状态的微小变化.

按Ляпунов意义下的运动稳定性，粗糙地讲是研究某个运动，当初始值作微小变化后，以后的运动情况如何？是总接近于原来的运动（我们称原来运动是稳定的），还是远离原来的运动（我们称原来运动是不稳定的）. 所以研究运动稳定性是由其周围情况决定. 例如考虑单摆的运动，如果摆的位置在支点以下，则其平衡位置是稳定的；如果摆的位置在支点以上，其平衡位置则是不稳定的. 这也说明了微小的干扰因素对于物质系统的影响，对于不同的运动是不一样的.

运动稳定性理论就是要建立一些准则，用以判断所考察的运动是稳定的或是不稳定的. 所谓Ляпунов第二方法，就是不需要寻求运动方程的解，而是作一簇曲面（即构造Ляпунов函数），用以控制积分曲线的动向，以解决稳定性问题. 因为在实际情况下，干扰性因素总是不可避免地存在着，所以对运动稳定性的研究有很重要的理论意义与实用价值，这也是近年来稳定性理论蓬勃发展的原因. 但是Ляпунов函数的作用决不仅限于对运动稳定性或不稳定性的确定. Ляпунов函数方法还是研究自动调节系统最有效的方法之一. 对于具体的非线性自动调节系统而言，适当地作出Ляпунов函数，就能解决一系列有重大实际意义的问题. 例如，可以给出调节量变化的估计、调节质量的估计和过渡过程经过的时间（调节时间）的估计等等.A.M.Летов和A.и.Лурье在这方面做了大量的工作.

※　国家自然科学基金资助项目.

А.М.Летов指出："不管现代自动调节理论用什么方式阐述，它总是依凭在一个巩固的基础上，那就是Ляпунов关于运动稳定性理论"．利用Ляпунов函数，可以估计经常作用下扰动的影响，可以解决大范围稳定性问题．特别地，从本世纪60年代开始，Ляпунов函数方法是研究解的有界性、周期解的存在性等问题的一个重要工具，日本数学家T.Yoshizawa[4]在这方面做了大量深刻的工作.此外，在构造Poincaré-Bendixson环域的外境界线时，应用Ляпунов函数方法比用传统定性理论方法要简洁得多．总之，Ляпунов第二方法在科学的许多领域内都已经取得了广泛的应用．正如Lasallé在1964年的一篇评论中所指出："稳定性理论正吸引着全世界数学家的注意，而且Ляпунов直接法现在得到了工程师的广泛赞赏"．

但是直到现在为止，对于一般非线性系统，如何构造其Ляпунов函数还没有通用而有效的方法．人们只是针对具体问题，探索着构造Ляпунов函数．因此针对具体问题如何来构造出恰当的Ляпунов函数，这是一个较为困难的问题．这主要要根据每个研究者的经验，实际上这是一个技巧问题．下面将结合我们的工作，以说明Ляпунов第二方法的应用．

一、星系密度波理论中一个不稳定性定理[5]

在《星系密度波在共转区的非线性不稳定性》一文中，中心问题是要证明一个二阶非线性非自治系统在某个区域中不存在稳定的周期解.当胡文瑞提出这个问题后，秦元勋用定性方法给予了证明，然而证明过程非常麻烦．后来在我们所发表的文章以及书中关于这个问题的证明，不是采用以上的证明方法，而是用我们所构造的一个Ляпунов函数来得出不存在稳定的周期解的结论．证明简洁明了，足以说明用Ляпунов第二方法的优越性．但这个Ляпунов函数是在上述定性分析的基础上构造出来的．这也说明了定性理论与稳定性理论之间的密切联系．

二、Lefschetz书中曾研究Lienard方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0\text{，}\ g(0)=0 \tag{1}$$

的零解的全局稳定性．如果满足条件：

(a) $xg(x)>0$， 当$x\neq 0$时，

(b) $f(x)>0$，

(c) $|F(x)|=\left|\int_0^x f(\xi)d\xi\right|\to\infty$，当$|x|\to\infty$时，

则（1）的零解是全局稳定的．而我们将条件改进为：如果满足

(a) $xg(x)>0$， 当$x\neq 0$时，

(b) $x\int_0^x f(x)dx>0$， 当$x\neq 0$时，

(c) $|F(x)| = \left|\int_0^x f(\xi)d\xi\right| \to \infty$, 当 $|x| \to \infty$时，

则（1）的零解是全局稳定的，而且证明过程非常简单[6]. 在此基础上，李惠卿[7]进一步给出了方程（1）的零解为全局稳定的充要条件.

三、变系数线性系统Ляпунов函数的构造[5, 6]

1965年宋键曾提出以下问题，对于

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2}$$

零解稳定性的研究，实际工作者常用冻结系数法，即取t_1，t_2，…，t_k，…，如果相应的

$$\frac{dx}{dt} = A(t_i)x \tag{3}$$

的特征方程 $|A(t_i) - \lambda E| = 0$ 之根均具有负实部，则他们认为系统（2）的零解是渐近稳定的. 他问这种做法对不对？

实际上，Rosenbrok于1963年已举出例子，即使对所有$t \geqslant t_0$，满足$\mathrm{Re}\lambda_i(t) < 0$（其中$\lambda_i(t), i = 1, \cdots, n$为 $|A(t) - \lambda E| = 0$之根），系统（2）的零解亦可以是不稳定的.

我们借助于对常系数线性系统所构造的Ляпунов函数，作为变系数线性系统相应的Ляпунов函数，这时

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{grad}v \cdot A(t)x$$

为了使$\frac{dv}{dt}$负定，要求系统（2）的系数缓变，以保证系统（2）的零解是渐近稳定的. 我们给出了系数缓变界限的具体估计. 这个问题的难点是关于所构造的$v(t, x)$正定性的证明. 1984年，在以上工作基础上，我们构造了变系数线性系统（2）的另一个Ляпунов函数. 这个公式便于应用（特别当n大时），改进了以前的工作. 章毅在这方面作了更深入的研究.

四、锁相技术[8]

a. 首先我们用定性方法系统地研究了具有正切鉴相特性的二阶锁相环路没有失锁点等问题. 当进一步研究带有强迫项的环路方程

$$\ddot{\varphi} + f(\varphi)\dot{\varphi} + g(\varphi) = e(t) \tag{4}$$

时，其等价系统为

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = -f(\varphi)z - g(\varphi) + e(t) \end{cases} \tag{5}$$

这时系统（5）已经没有奇点，代替研究自治系统奇点位置的是研究系统（5）的周期解. 我们需要研究系统（5）的周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题. 这时需要作出

一条封闭曲线Γ，使系统（5）的方向场在φ-z平面上的投影都自外向内地穿过Γ. 张锦炎用传统定性方法给出的Γ有10多段. 并且是对具体方程而作的. 我们这里用了一段Ляпунов函数，不仅使证明简化，并研究了更一般的方程，显然这个方法是好的. 在研究具有正弦锁相环路的强迫振荡等问题时，基本上沿用以上的方法.

b.具有正切鉴相特性的三阶环路方程的研究. 因为在三维空间中，人们所熟悉的平面定性理论手法失去效用，所以我们用构造Ляпунов函数方法解决这个问题. 首先我们从对各类三阶系统构造全局稳定性的Ляпунов函数着手，最后构造出合适的Ляпунов函数，用以证明具有正切鉴相特性的三阶环路没有失锁点. 其中部分结果已写进T.A.Burton的书中[9].

在锁相环路的一系列研究中，我们认为其困难之点为：1.具有正切鉴相特性的二阶锁相环路方程定性分析，这是我们研究这个课题的起点；2.柱面上一类微分方程全局稳定的充要条件；3.强迫振荡；4.三阶环路方程的研究. 在以上一系列研究工作中，明显可以看出Ляпунов函数的作用. 近年来，钱敏和张锦炎等在这方面获得了非常出色的研究成果[10, 11].

五、离散系统

Ляпунов第二方法可以用来研究离散系统的稳定性、解的有界性与周期解的存在性等问题. 有关常微分方程的很多结果，在离散系统中可以平行地得到. 但毕竟离散系统与连续系统具有不同的性质，所以对离散系统来讲，无论从所得结果和所用证明方法来讲，与常微分方程又有一定的差异. 详细可参考[12].

六、大系统

大系统理论是从60年代开始发展起来的. 早在1959年，秦元勋首先提出了稳定性理论中方程组的分解问题[13].关于大系统的思想，我们用下面的例子说明.

研究具有分解

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=A_{ii}(t)x_i+\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{r} A_{ij}(t)x_j,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \tag{6}$$

的大系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t) \tag{7}$$

的零解的稳定性，其中 $x_i\in R^{n_i}$，$\sum_{i=1}^{r} n_i=n$，$A_{ij}(t)$为$n_i\times n_j$阶矩阵，$x\in R^n$，$A(t)$是$n\times n$阶矩阵.

我们研究子系统

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=A_{ii}(t)x_i,\quad i=1,\ \cdots,\ r \tag{8}$$

假定系统（8）的零解是渐近稳定的，对关联项$A_{ij}(t)$（$i\neq j$）加上限制，以得出大系统（7）的零解的渐近稳定性. 研究大系统零解的稳定性，通常采用以下两种方法：a)向量

Ляпунов函数方法：以子系统的Ляпунов函数作为v的分量，用比较原理，由已知系统（或低阶系统）的稳定性来得出大系统的稳定性；b)标量Ляпунов函数方法：取大系统的Ляпунов函数v为子系统的Ляпунов函数v_i的加权和，即取$v=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i$，再利用Ляпунов定理，以得出大系统的稳定性. 值得注意的是章毅和张毅所提出的处理大系统稳定性的参数变易法[6]，这个方法近年来已得到广泛的应用.

我们曾研究了大系统周期解的存在性与唯一性等问题[14]. 这种提法在以前文献中尚未见到. 此外，我们还研究了大系统关于部分变元的稳定性，研究了离散动力系统在结构扰动下的稳定性问题以及离散大系统在结构扰动下周期解的存在性与唯一性等问题.

近年来，我们用Ляпунов第二方法，研究了泛函微分方程和积分微分方程的稳定性问题[15-20]. 对于这两个课题的研究，针对具体问题，我们具体构造Ляпунов泛函，得到了一些结果. 当然，对以上两类系统构造Ляпунов泛函，比对常微分方程构造Ляпунов函数是更为困难的问题. 我们作了一些尝试，有些结果是好的，这充分说明了运用Ляпунов第二方法处理以上问题时的优越性.

参 考 文 献

[1] Ляпунов, А.М., Общая задача об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

[2] 秦元勋，运动稳定性的一般问题讲义，科学出版社，1958.

[3] J.Lasalle, S.Lefschetz, Stability by Liapunov's Direct Method with Application, Academic Press, 1961.

[4] Yoshizawa, T.(吉泽太郎), Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions, Springer-Verlag, 1975.

[5] 秦元勋、王慕秋、王联，运动稳定性理论与应用，纯粹数学与应用数学专著，第8号，科学出版社，198.1

[6] 王联、王慕秋，非线性常微分方程定性分析，哈尔滨工业大学出版社，1987.

[7] 李惠卿，数学学报，31(1988)，2.

[8] 王慕秋、张锦炎、王联，中国科学，(1980)，2.

[9] T.A.Burton, Stability and Periodic Solutions o Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, 1985.

[10] Qian Min, Shen Wenxian and Zhang Jinyan, J.Differential Equations, 71(1988), 315—333.

[11] ——, J.Differential Equations, 88(1990), 1.

[12] 王联、王慕秋，常差分方程，新疆大学出版社，1991.

[13] 王慕秋，稳定性理论中方程组的分解问题，科学记录，4(1960)，1.

[14] Wang Muqiu and Wang Lian, On existence o' Periodic solution of large-scale system, in Special Session on Periodic and Almost Periodic Solutions of Differential Equations, III (Chicago Meeting, 1985, 3).

[15] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，1963.

[16] 秦元勋、刘永清、王联、郑祖庥，带有时滞的动力系统的运动稳定性，第二版，科学出版社，1989.

[17] 唐贤瑛、王联，应用数学学报，13(1990)，4.

[18] Wang Mu-qiu, Wang Lian and Du Xue-tang, Chinese Science Bulletin, 35(1990), 18.

[19] Wang Lian and Wang Muqiu, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1991.

[20] Wang Lian and Zhao Huaizhong, Acta Mathematicae Sinica, 1991.