公 共 课 系 列　2001年研究生入学考试应试指导丛书

2001

策划：北京大学研究生院

rance Exams for MD

研究生入学考试

概率论与数理统计

姚孟臣 编著

北京大学出版社

2001年研究生入学考试应试指导丛书

概率论与数理统计

姚孟臣 编著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/姚孟臣编著. —北京:北京大学出版社,2000.4

(2001年研究生入学考试应试指导丛书)

ISBN 7-301-04480-1

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料 ②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03826号

书　　名:概率论与数理统计
著作责任者:姚孟臣　编著
责任编辑:刘　勇
标准书号:ISBN 7-301-04480-1/G·564
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部62752015　发行部62754140　理科编辑部62752021
电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京高新特公司照排中心
印　刷　者:北京飞达印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32开本　10.125印张　255千字
2000年4月第1版　2000年4月第1次印刷
定　　价:14.50元

内 容 简 介

本书是经济类硕士研究生入学考试科目“概率论与数理统计”复习指导书. 本书作者多年来参加有关经济类考研数学试卷的命题、阅卷和考研辅导班的教学，亲临考研第一线，具有丰富的教学与应试经验. 作者把他们的教学经验以及潜心研究试卷命题的体会加以细化、归纳和总结，整理成书奉献给广大读者，旨在提高考研者的考试成绩与命中率.

本书紧扣数学三、四的考试大纲，贴切考试实践，内容丰富. 全书共分八章. 内容包括：随机事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计及假设检验等. 本书结构新颖，每一章按照：考试要求，复习要点(重要定义、定理及公式)，典型例题分析，练习题四部分编写. 本书概念叙述简洁，解题思路清晰，对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解，注重对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养，是考研者较好的复习指导书和良师益友.

本书可作为经济类硕士研究生入学考试数学考试科目“概率论与数理统计”的复习指导书，也可作为理工科考研者的复习参考书. 对于在校的经济类及管理类大学生、大专生及自学考试者，本书也是一本较好的学习用书.

前　言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部最近制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，结合我们多年参加经济类数学考研及有关考试的命题、阅卷及辅导的经验，编写了这套经济类数学《2001 年研究生入学考试应试指导丛书》，其中包括复习指导书：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》以及《2001 年研究生入学考试数学模拟试卷（经济学类）》共 4 册，供广大考生选用。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成：

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确把握考试要求，这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳，总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题，全部

习题都附有答案或提示，这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《2001年研究生入学考试数学模拟试卷(经济学类)》一书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十二份，其中数学三、四各6份；另一部分是1999年和2000年数学三、四考研试题及解答。

我们是在深入研究了历年考研试卷的结构、知识点及难度的分布，并紧密结合我们命题实践、阅卷过程中常见问题及在全国各大城市“考研辅导班”辅导的经验来编好每一道题。因此，每一份试卷都从不同角度选择了具有多种风格的题目，基本上涵盖了全部命题思路，能够达到实际考试效果。这样有利于广大考生检验自己复习的效果，更加全面系统地掌握所需知识，迅速提高综合解题能力。为了方便考生了解近两年有关数学考试的题目类型、知识点及难度的分布情况，我们给出了1999年和2000年数学三、四考研试题及解答，仅供参考。

本书不仅是经济类硕士研究生入学考试数学考试科目应试者的一本复习用书，同时对于参加理工类考研及在校的经济类和管理类本科生、大专生、参加自学考试考生也是一本较好的学习用书和参考书。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2000年4月20日

目 录

第一章 随机事件和概率

一、考试要求

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，重点掌握事件的关系与运算；

2. 理解概率与条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会运用古典概型计算有关的概率；

3. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概公式及贝叶斯公式；

4. 理解事件独立性的概念，掌握利用事件独立性计算有关概率的各种方法；理解独立重复试验的概念，掌握运用二项概型计算有关的概率的各种方法.

二、复习要点

(一) 重要概念及性质

定义 1.1(随机现象)　在一定条件下，具有多种可能发生的结果的现象称为**随机现象**. 这类现象的一个共同点是：事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.

定义 1.2(随机试验)　为了叙述方便，我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的两个条件：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 试验都有哪些可能的结果是明确的，但每次试验的具体结果在试验前是无法得知的，

那么就称它是一个**随机试验**，简称为**试验**，一般用字母 E 表示.

定义 1.3(样本空间)　在随机试验中，每一个可能出现的不

可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示；而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 Ω.

例 1 设 E_1 为从 10 件产品（其中 2 件次品，8 件正品）之中任取 3 件，观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品（$i=0,1,2$），于是 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 设 E_2 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击，直到击中目标为止，观察射击次数. 记 ω_i 为射击 i 次（$i=1,2,\cdots$），于是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 3 设 E_3 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过，乘客对于列车通过该站的时间完全不知道，观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω. 显然有 $\omega\in[0,5)$，即 $\Omega=[0,5)$.

通过上面的几个例子可以看出，随机试验大体可以分成只有有限个可能结果的（如 E_1）；有可列个可能结果的（如 E_2）和有不可列个可能结果的（如 E_3）这样三种情况.

应该说明的是，一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外，一个随机试验的条件有的是人为的，有的是客观存在的. 在后一种情况下，每当试验条件实现时，人们便会观测到一个结果 ω. 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果，但是能够指出它出现的范围 Ω. 因此，我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含意的.

例 4 写出下列随机试验的样本空间 Ω：

(1) 同时掷两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

(2) 10 件产品中有 3 件是次品，每次从中取 1 件，取出后不再放回，直到 3 件次品全部取出为止，记录抽取的次数；

(3) 生产某种产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数；

(4) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

解 (1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$；

(2) $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$;

(3) $\Omega=\{10,11,\cdots\}$;

(4) 设 x,y,z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度，有

$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$.

定义 1.4(随机事件) 所谓**随机事件**是样本空间 Ω 的一个子集，随机事件简称为**事件**，用字母 A,B,C 等表示. 因此，某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生，记为 $\omega\in A$.

在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**，记作 Ω. 在每次试验中必定不会发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 我们知道，必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 都不是随机事件. 因为作为试验的结果，它们都是确定性的，并不具有随机性. 但是为了今后讨论问题方便，我们也将它们当作随机事件来处理.

定义 1.5(事件的关系)

(1) 包含

设 A,B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B，那么称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 这就是说，在一次试验中，如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 等价

如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，那么称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**，记为 $A=B$. 这就是说，在一次试验中，等价的两个事件同时发生或同时不发生，因此可以把它们看成是一样的.

(3) 互斥(互不相容)

设 A,B 为两个事件. 如果 $A\cdot B$[①]$=\varnothing$，那么称事件 A 与 B 是**互不相容**的(或**互斥**的). 这就是说，在一次试验中事件 A 与事

① 这里出现的 $A\cdot B$(及后面出现 AB)表示事件 A 与 B 的**交**，在第 5 页才给出了它的定义. 本书为了便于考生复习，集中分类归纳叙述了一些概念或术语，这就可能导致某些概念或术语提前引出，而它们的定义是滞后给出的. 请读者在阅读本书时能正确理解作者的用意.

件 B 不可能同时发生.

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形. 即, 如果 $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n = \varnothing$, 则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互斥的. 如果 $A_i \cdot A_j = \varnothing (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 这时我们又称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是**两两互斥**的. 注意, 如果 n 个事件两两互斥, 那么这 n 个事件之间一定互斥; 反之不真.

(4) 独立

设 A, B 是某一随机试验的任意两个随机事件. 称 A 与 B 是**相互独立**的, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

这就是在 A 与 B 独立的情况下事件 A 与 B 乘积的概率公式. 可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性. 类似地当 $P(B) \neq 0$ 时, A 与 B 相互独立也可以用

$$P(A|B) = P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义, 我们可以得到: 若事件 A 与 B 相互独立, 则 $\overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

如果事件 A, B, C 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

注意, 事件 A, B, C 相互独立与事件 A, B, C 两两独立不同, 两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立. 因此, 相互独立一定是两两独立, 但反之不一定.

对于 n 个事件的独立性, 我们有

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件. 如果对于所有可能的组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$ 下列各式同时成立：

$$\begin{cases}P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\\P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),\end{cases}$$

那么称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

定义 1.6(事件的运算)

(1) 并

设 A,B 为两个事件. 我们把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**并**或**和**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 这就是说,事件 $A\cup B$ 表示在一次试验中,事件 A 与 B 至少有一个发生.

我们用 $A_1+A_2+\cdots+A_n\xlongequal{\text{def}}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生;进而用 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots\xlongequal{\text{def}}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生.

(2) 交

设 A,B 为两个事件. 我们把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**交**或**积**,记为 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$,有时也简记为 AB. 这就是说,事件 $A\cap B$ 表示在一次试验中,事件 A 与 B 同时发生.

我们用 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n\xlongequal{\text{def}}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生;进而用 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n\cdots\xlongequal{\text{def}}\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

(3) 逆(对立)

对于事件 A,我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合

称为事件 A 的**逆**（或 A 的**对立事件**），记为 $\overline{A}$. 这就是说，事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 A 不发生. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生（即 $A\cdot\overline{A}=\varnothing$，称它们具有**互斥性**），而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生（即 $A+\overline{A}=\Omega$，称它们具有**完全性**）. 这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 满足：

$$\begin{cases} A\cdot\overline{A}=\varnothing, \\ A+\overline{A}=\Omega. \end{cases}$$

根据上面的基本运算定义，不难验证事件之间的运算满足以下的一些规律：

1）$A+B=B+A$（加法交换律）；

2）$A+(B+C)=(A+B)+C$（加法结合律）；

3）$A+A=A$；

4）$A+\overline{A}=\Omega$；

5）$A+\Omega=\Omega$；

6）$A+\varnothing=A$；

7）$A\cdot B=B\cdot A$（乘法交换律）；

8）$(AB)C=A(BC)$（乘法结合律）；

9）$A\cdot A=A$；

10）$A\cdot\overline{A}=\varnothing$；

11）$A\cdot\Omega=A$；

12）$A\cdot\varnothing=\varnothing$；

13）$A(B+C)=AB+AC$（分配律）；

14）$A+BC=(A+B)(A+C)$（分配律）；

15）$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$（对偶原理(1)）；

16）$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$（对偶原理(2)）.

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算. 例如，我们称事件 $A\overline{B}$ 为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$. 可见，事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集

合.

例 5 设 A,B,C 是三个随机事件. 试用 A,B,C 表示下列各事件：

(1) 恰有 A 发生； (2) A 和 B 都发生而 C 不发生；

(3) 所有这三个事件都发生；(4) A,B,C 至少有一个发生；

(5) 至少有两个事件发生； (6) 恰有一个事件发生；

(7) 恰有两个事件发生； (8) 不多于一个事件发生；

(9) 不多于两个事件发生； (10) 三个事件都不发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；(2) $AB\overline{C}$；(3) ABC；(4) $A+B+C$；

(5) $AB+BC+CA$；(6) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(7) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(8) $\overline{AB+BC+CA}$；(9) $\overline{ABC}$；(10) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 6 设某工人连续生产了四个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$)，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 没有一个是次品； (2) 至少有一个是次品；

(3) 只有一个是次品； (4) 至少有三个不是次品；

(5) 恰好有三个是次品； (6) 至多有一个是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$；(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$；

(4) $A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1A_2A_3A_4$；

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$；

(6) $A_1A_2A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$.

例 7 下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系？

(1) $AB=A$； (2) $A+B=A$.

解 (1) 因为“$AB=A$”与“$AB\subset A$ 且 $A\subset AB$”是等价的，由 $A\subset AB$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $A\subset B$，因此有 $A\subset B$.