傅里叶光学

（基本概念和习题）

吕迺光　陈家璧　毛信强　编著

科学出版社
1985

内 容 简 介

本书提纲挈领地概述了傅里叶光学有关基本概念和重要公式，并对 J. W. 顾德门所著《傅里叶光学导论》中各章习题、以及若干有应用价值的习题作了详尽的分析和解答. 内容包括：二维线性系统分析；标量衍射理论基础；菲涅耳衍射与夫琅和费衍射；透镜的傅里叶变换性质和成像性质；光学成像系统的频谱分析；空间滤波和光学信息处理；波前重现成像或全息术等方面.

这是一本有助于深入理解傅里叶光学并应用它去解决一些实际工程问题的参考书. 可供高等院校有关专业师生及从事激光应用方面工作的科技人员参考.

傅 里 叶 光 学

（基本概念和习题）

吕迺光 陈家璧 毛信强 编著

责任编辑 陈菊华

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1985年2月第一次印刷 印张：11

印数：0001—6,300 字数：252,000

统一书号：13031·2804

本社书号：3852·13—3

定价： 2.60 元

前　言

傅里叶光学是现代光学的重要分支，它是光学成像、光学信息处理和全息术的理论基础. J. W. 顾德门所著的《傅里叶光学导论》(以下简称《导论》)介绍了傅里叶光学的理论及其应用，是这一学科的代表性著作. 该书的各章习题与正文关系十分密切，是书中所述理论不可缺少的补充部分. 它包括二维线性系统分析、标量衍射理论基础、菲涅耳衍射与夫琅和费衍射、透镜的傅里叶变换性质和成像性质、光学成像系统的频谱分析、空间滤波和光学信息处理、波前重现成像或全息术等方面的有关习题.本书的目的正在于力图对这些习题(包括若干补充题)作出正确的分析和解答. 以便有助于读者学习傅里叶光学理论，并能运用这些理论解决有关的实际光学问题.

为方便读者，本书中采用的有关术语、数学符号和公式，都尽可能与《导论》相一致. 在各章的第一部分，扼要叙述了有关基本概念和公式，以供解题时参考.

本书可作为高等学校光学、光学仪器专业教师、研究生和高年级学生的教学参考书，也可供从事光学成像、光学信息处理和全息术方面研究的有关人员参考.

本书是在华中工学院光学工程系吕迺光、陈家璧编写的《近代光学问题的傅里叶分析方法》和浙江大学光学仪器工程系毛信强编写的《傅里叶光学习题解答》的基础上改写而成的. 其中前五章由吕迺光、陈家璧编写，后三章由毛信强编写. 由于水平有限，在解题和分析过程中，难免有考虑不周或

不妥之处，望读者不吝指教，以便改正.

在本书编写过程中，清华大学夏学江同志、武汉测绘学院朱光世同志、浙江大学龙槐生同志、王子余同志曾给予热情指导和帮助，在此表示衷心感谢.

编　者

1981 年 9 月

目　　录

第一章　二维线性系统分析

一　基本概念与公式

1. 狄拉克 δ 函数

a）δ 函数即脉冲函数的三种定义方式：

［定义 I］

$$\delta(x,y)=0,\ \text{当}\ x\neq 0\ \text{或}\ y\neq 0,$$
$$\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)dxdy=1. \tag{1.1}$$

［定义 II］　可以把 δ 函数定义为宽度逐步减小、高度逐步增大但体积保持为 1 的一个脉冲序列的极限．在光学上这一概念代表一个点光源，或一个单位体积的空间脉冲．常用的表示式有

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)], \tag{1.2}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\mathrm{rect}(Nx)\mathrm{rect}(Ny), \tag{1.3}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\mathrm{sinc}(Nx)\mathrm{sinc}(Ny). \tag{1.4}$$

［定义 III］　δ 函数是一个广义函数，它赋予检验函数 $\phi(x,y)$ 以一个数 $\phi(0,0)$，即

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)\phi(x,y)dxdy=\phi(0,0). \tag{1.5}$$

对于检验函数的要求是连续、在一个有限区间外为零、并存在所有阶的连续导数．

b) δ 函数的常用性质：

筛选性质

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\delta(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta = g(x,y), \quad (1.6)$$

在 g 连续的各点上.

尺度变化性质

$$\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y). \quad (1.7)$$

与普通函数乘积的性质

$$h(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=h(x_0,y_0)\times\delta(x-x_0,y-y_0), \quad (1.8)$$

$h(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

2. 卷积和相关

a) 卷积积分

函数 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 的卷积定义为

$$g(x,y)*h(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta. \quad (1.9)$$

b) 相关积分

两个复函数 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 的互相关定义为

$$g(x,y)\bigstar h(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\times h^*(\xi-x,\eta-y)d\xi d\eta, \quad (1.10)$$

式中“*”号代表复共轭函数. 该式适用于两个函数中至少有一个是平方可积函数.

同一函数的相关积分称为自相关，其定义为

$$g(x, y) \bigstar g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) \times d\xi d\eta. \tag{1.11}$$

3. 傅里叶级数

一个周期性函数 $g(x)$，周期 $\tau = \frac{1}{f}$，它满足狄里赫利条件（函数在一个周期内只有有限个极值点和第一类不连续点），则 $g(x)$ 可以展开为三角傅里叶级数

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f x + b_n \sin 2\pi n f x), \tag{1.12}$$

其中傅里叶系数

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(x) \cos 2\pi n f x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau g(x) \sin 2\pi n f x dx.$$

也可以等效地把周期函数 $g(x)$ 展开为指数傅里叶级数的形式

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f x), \tag{1.13}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x) \exp(-j2\pi n f x) dx, \tag{1.14}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

两种表示形式之间系数的关系是

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad (n \geqslant 1)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n). \quad (n \geqslant 1)$$

在指数傅里叶级数中，周期性函数可以分解为不同频率的复指数函数之和．因为一对同值异号频率的复指数函数可以合成为一个余弦函数，所以本质上还是把周期函数分解为各种频率的余弦波分量．

c_n 是频率的函数，通常称为频谱函数．一般 c_n 是复函数，它包括振幅频谱和相位频谱．由于周期性函数只包含 $0, \pm f, \pm 2f, \pm 3f, \cdots$ 等频率分量，频率取值是离散的，所以只有离散谱．

4. 二维傅里叶变换

a）定义

非周期函数 $g(x, y)$ 在整个无限 xy 平面上满足狄里赫利条件，且 $\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)| dxdy$ 存在，则有

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y)\exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]df_X df_Y, \tag{1.15}$$

其中

$$G(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]dxdy. \tag{1.16}$$

这里 $G(f_X, f_Y)$ 是函数 $g(x, y)$ 的傅里叶变换（或称傅里叶谱、频谱），记为 $\mathscr{F}\{g\}$．$g(x, y)$ 是频谱函数 $G(f_X, f_Y)$ 的傅里叶逆变换，记为 $\mathscr{F}^{-1}\{G\}$．利用公式（1.15）可以把非周期函

数分解为连续频率的余弦波分量的积分．由于频率取值是连续的，所以 $G(f_X, f_Y)$ 是连续谱，它表示各频率成分的权重因子．

b）广义傅里叶变换

如果函数可以定义为由可变换函数所组成的序列的极限对组成定义序列的每一函数进行变换，得到一个相应的变换式序列，这一新序列的极限称为原来函数的广义傅里叶变换式．广义变换可按照通常变换的规则进行运算．

c）傅里叶变换定理

设函数 $g(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的傅里叶变换分别是 $G(f_X, f_Y)$、$H(f_X, f_Y)$，则有

线性定理

$$\mathscr{F}\{\alpha g(x, y) + \beta h(x, y)\} = \alpha G(f_X, f_Y) + \beta H(f_X, f_Y). \tag{1.17}$$

相似性定理

$$\mathscr{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right). \tag{1.18}$$

相移定理

$$\mathscr{F}\{g(x-a, y-b)\} = G(f_X, f_Y) \times \exp[-j2\pi(f_X a + f_Y b)]. \tag{1.19}$$

帕色伐 (Parseval) 定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_X, f_Y)|^2 df_X df_Y. \tag{1.20}$$

卷积定理

$$\mathscr{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_X, f_Y) \cdot H(f_X, f_Y). \tag{1.21}$$

自相关定理

$$\mathscr{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\}$$
$$= |G(f_X, f_Y)|^2, \tag{1.22}$$

以及

$$\mathscr{F}\{|g(x, y)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) \cdot G^*(\xi - f_X, \eta - f_Y) d\xi d\eta. \tag{1.23}$$

傅里叶积分定理

在 g 的各个连续点上

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{g(x, y)\} = g(x, y). \tag{1.24}$$

d) 可分离变量函数的变换

函数 g 在直角坐标系内是可分离变量的函数，即

$$g(x, y) = g_X(x) \cdot g_Y(y), \tag{1.25}$$

则它的二维傅里叶变换式等于两个一维傅里叶变换式的乘积

$$\mathscr{F}\{g(x, y)\} = \mathscr{F}_X\{g_X\} \cdot \mathscr{F}_Y\{g_Y\}. \tag{1.26}$$

e) 傅里叶-贝塞耳变换

极坐标系中的函数 $g(r, \theta)$，当它只是半径 r 的函数时，即有

$$g(r, \theta) = g_R(r),$$

我们称它是圆对称的. 圆对称函数的傅里叶变换式为

$$G_0(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r g_R(r) J_0(2\pi r\rho) dr, \tag{1.27}$$

式中 ρ 是用极坐标表示的频率坐标，

$$\rho = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}.$$

J_0 是零阶第一类贝塞耳函数. 显然 $G_0(\rho)$ 也是圆对称函数，称之为函数 $g_R(r)$ 的傅里叶-贝塞耳变换，记为 $\mathscr{B}\{g_R(r)\}$. 而 $G_0(\rho)$ 的逆变换，记为 $\mathscr{B}^{-1}\{G_0(\rho)\}$，由下式计算：

$$g_R(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho G_0(\rho) \cdot J_0(2\pi r\rho) d\rho. \tag{1.28}$$

傅里叶变换定理在傅里叶-贝塞耳变换中都有对应的表达式，例如

$$\mathscr{B}\{g_R(ar)\} = \frac{1}{a^2} G_0\left(\frac{\rho}{a}\right). \tag{1.29}$$

f) 一些常用函数(参看图 1.1)

矩形函数

$$\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} \tag{1.30}$$

sinc 函数

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \tag{1.31}$$

符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0, \end{cases} \tag{1.32}$$

三角状函数

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} \tag{1.33}$$

梳状函数

$$\operatorname{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n), \tag{1.34}$$

圆域函数

$$\operatorname{circ}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \tag{1.35}$$

上表最后一项列出了圆域函数的傅里叶-贝塞耳变换式，而其余都是直角坐标系中可分离变量函数的傅里叶变换式。

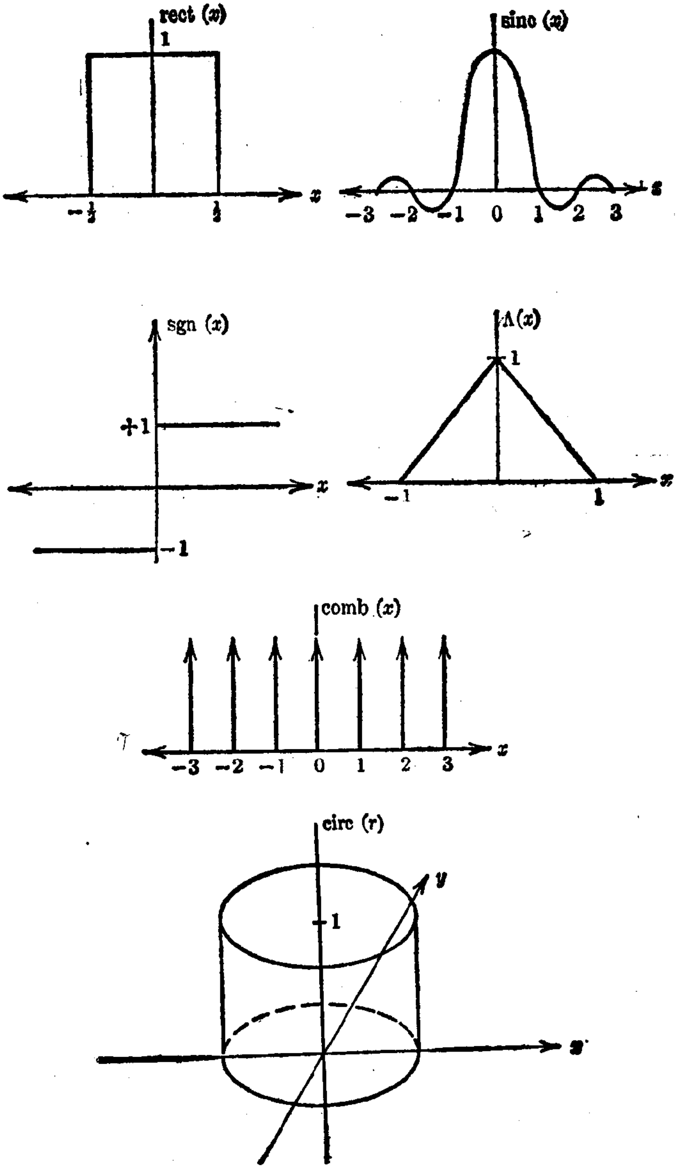
rect (x)
1
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
x
sinc (x)
−3 −2 −1 0 1 2 3
x
sgn (x)
+1
−1
x
Λ(x)
1
−1
1
x
comb (x)
−3 −2 −1 0 1 2 3
x
circ (r)
1
y
x

图 1.1　常用函数

g）傅里叶变换表

函　　数	变 换 式
$\exp[-\pi(x^2+y^2)]$	$\exp[-\pi(f_X^2+f_Y^2)]$
$\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y)$	$\mathrm{sinc}(f_X)\mathrm{sinc}(f_Y)$
$\Lambda(x)\Lambda(y)$	$\mathrm{sinc}^2(f_X)\mathrm{sinc}^2(f_Y)$
$\delta(x,y)$	1
$\exp[j\pi(x+y)]$	$\delta\left(f_X-\frac{1}{2}, f_Y-\frac{1}{2}\right)$
$\mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)$	$\frac{1}{j\pi f_X}\cdot\frac{1}{j\pi f_Y}$
$\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y)$	$\mathrm{comb}(f_X)\cdot\mathrm{comb}(f_Y)$
$\mathrm{circ}(r)$	$\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$

5. 线性系统

a）线性系统

所谓系统，广义地定义为一个变换，即它把一组输入函数变换成一组输出函数．这里用数学算符$\mathcal{S}\{\}$表示系统的作用． 如对所有的输入函数 t 和 s 以及所有复常数 a 和 b，存在下述迭加性质

$$\mathcal{S}\{as(x_1, y_1)+bt(x_1, y_1)\} = a\mathcal{S}\{s(x_1, y_1)\} + b\mathcal{S}\{t(x_1, y_1)\}, \tag{1.36}$$

则此系统称为线性系统．凡是线性系统，其输入函数 g_1 和输出函数 g_2 之间的关系可用迭加积分

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)h(x_2, y_2; \xi, \eta)d\xi d\eta \tag{1.37}$$

描述，式中$h(x_2, y_2; \xi, \eta)$表示系统输出平面(x_2, y_2)点上对位于输入平面坐标(ξ, η)上的δ函数输入的响应，称之为系统的脉冲响应(参看图 1.2)，即

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathcal{S}\{\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\}. \tag{1.38}$$

系统的性质完全由它对单位脉冲的响应来决定．

图 1.2　线性系统对 δ 函数输入的响应

b）不变线性系统

当一个 δ 函数输入在输入平面位移时，输出平面上系统的脉冲响应只是相应改变位置，而不改变它的函数形式，则此系统是空间不变的线性系统，即有

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta). \tag{1.39}$$

把它代入(1.37)式，迭加积分则化为卷积积分的形式：

$$\begin{aligned} g_2(x_2, y_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta \\ &= g_1 * h. \end{aligned} \tag{1.40}$$

c）传递函数

对于不变线性系统，其传递函数定义为系统脉冲响应的傅里叶变换：

$$H(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_X\xi + f_Y\eta)] d\xi d\eta. \tag{1.41}$$

若系统的输入频谱、输出频谱分别为 G_1、G_2，则根据卷积定理，

$$G_2(f_X, f_Y) = H(f_X, f_Y) \cdot G_1(f_X, f_Y). \tag{1.42}$$

传递函数表示了系统在频率域的效应．利用傅里叶变换，输入可以分解为具有不同空间频率(f_X, f_Y)的基元复指数函数，系统对每个基元复指数函数的效应决定于$H(f_X, f_Y)$（参看图1.3），即

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\{\exp[j2\pi(f_X x_1 + f_Y y_1)]\} &= H(f_X, f_Y) \\ &\times \exp[j2\pi(f_X x_2 + f_Y y_2)]. \end{aligned} \tag{1.43}$$

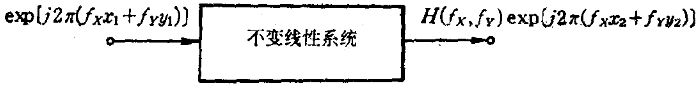

图 1.3　不变线性系统对 $\exp[j2\pi(f_X x_1+f_Y y_1)]$ 的输出响应

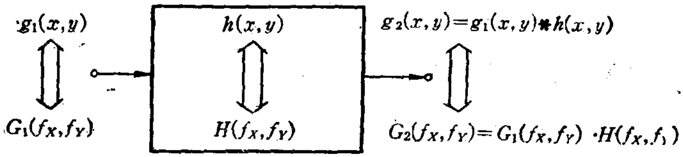

图 1.4　不变线性系统

系统的功能在这里类似一种滤波器，它使各种输入频率分量发生振幅的变化和相移．图 1.4 表示了不变线性系统在空间域和频率域的作用．

6. Whittaker-Shannon 抽样定理

一个频带有限的函数 $g(x, y)$，它的频谱 $G(f_X, f_Y)$ 在频率空间一个有限区域 $\mathscr{R}$ 上不为零．若用 $2B_X$、$2B_Y$ 分别表示围住 $\mathscr{R}$ 的最小矩形在 f_X 和 f_Y 方向上的宽度，当函数在 x，y 方向抽样点的间距 X、Y 满足

$$X \leqslant \frac{1}{2B_X} \quad 及 \quad Y \leqslant \frac{1}{2B_Y}, \tag{1.44}$$

则函数唯一地由其抽样值决定．在每一抽样点上加上一个由 sinc 函数的乘积构成的内插函数，就可以准确恢复函数 $g(x,y)$．

当抽样点间距为允许的最大间隔，即

$$X = \frac{1}{2B_X} \quad 及 \quad Y = \frac{1}{2B_Y},$$

抽样定理表示为

$$g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_X}, \frac{m}{2B_Y}\right)$$