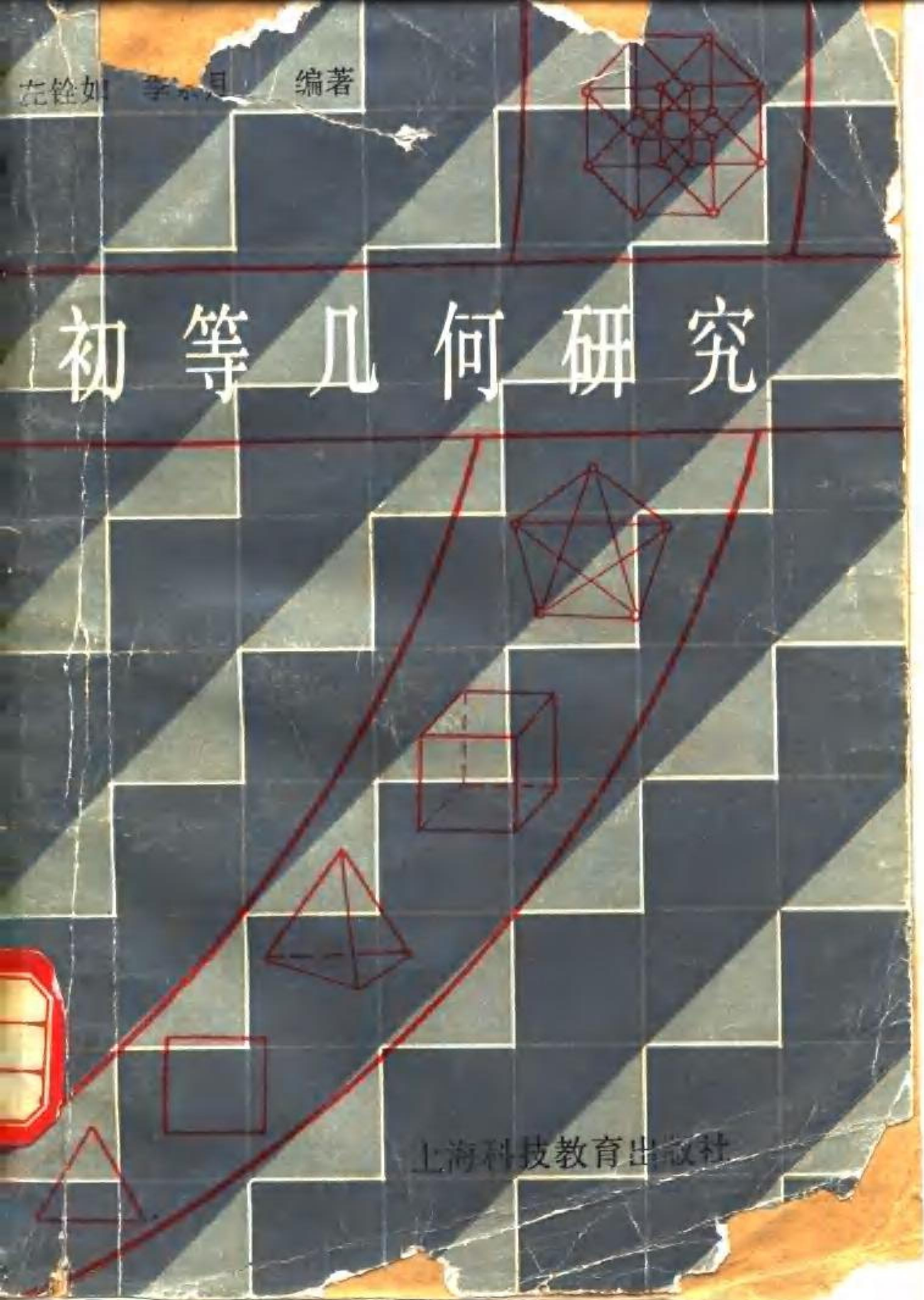
左铨如 季素月 编著

初等几何研究



上海科技教育出版社

初等几何研究

左铨如　季素月　编著

上海科技教育出版社

（沪）新登字116号

初等几何研究

左铨如　季素月　编著

上海科技教育出版社出版发行

（上海冠生园路393号）

各地新华书店经销　上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 15.5　字数 350000

1992年9月第1版　1992年9月第1次印刷

印数1—4300

ISBN7-5428-0637-8

G·359

定价：[illegible].50元

序

这本《初等几何研究》，是为数学教师，特别是未来的数学教师而写的。

人们常说，“要给学生一碗水，教师要有一桶水”。这一桶水，不应当是一碗水的简单的多少倍。它与一碗水比起来，不仅是量的增多，更应是质的提高。以初等几何而言，教师与学生比起来，不仅是会解更多的题，知道更多的定理、方法和技巧；更重要的是应当对这门学科的来龙去脉，它的历史与未来，它在数学中的地位，它与相邻近的数学分支的关系等方面有更进一步的了解。师范院校、教育学院和教师进修学校里为数学教师和未来的数学教师开的课程，就是要使他们真正掌握这一桶水。这不仅是帮教师解答教学中可能碰到的疑难，更在于提高教师的数学素养。

看来，《初等几何研究》正是朝这个方向努力的一个可喜收获。书中介绍了数学结构的观点，讲了现代公理化的方法，还涉及近年来国外为改革初等几何教材的尝试。在现代数学的高观点指导下，进一步落实到解题思想与方法技巧；居高临下，着眼廿一世纪，使学生（未来的数学教师）开眼界，破陈规。它出版并在教学中使用后，必将对我国中学几何教学改革起积极推动作用。

当然，数学教育改革、特别是中学几何教材改革的研究，是一个十分活跃的领域。有关初等几何研究的师范教材，也还处在发展、形成过程之中。《初等几何研究》是在这过程中

出现的，但它不是这过程的终结。随着教学实践的反复深入，它还会得到修改、补充，变得更完善，更适合课程的需要，更能满足现代科技发展对中学数学教师的要求。相信这也正是编者的希望。

最后顺便提一下，书中花了一些篇幅介绍了我的一些“教育数学”的观点和冒昧提出的几何教材改革想法。应当承认，这些想法尚未在中学课堂实施，能否在不久的将来实施，也无把握，不过抛砖引玉，希望引起我国同行的进一步探讨而已。

值此书出版之际，赘数言以为序。

张景中

一九九二年三月十日于成都

目　录

第一章　几 何 结 构

本章用现代数学的观点，从整体上鸟瞰欧氏几何的内在逻辑结构．着重介绍了若干有关欧氏几何的公理系统，分析比较了它们的优劣．使读者能居高临下，了解公理化方法的意义，熟悉欧氏几何的结构，明确欧氏空间是特殊的向量空间和度量空间，从而深刻理解初等几何研究的对象，领会在数学科学中所处的基础性地位与作用，进一步认清中学几何教材改革的方向．

§1　数学结构的意义

1.1　数学发展的分化与统一

随着数学的飞速发展，不断出现许多新的数学分支，这些分支有其自身的研究课题，独自的方法，独自的语言．就拿几何这一源远流长、多彩多姿的学科来说，有古典的欧氏几何、解析几何、球面几何、非欧几何、射影几何，还有近代的黎曼几何、代数几何、复几何、辛(symplectic)几何、代数拓扑、微分拓扑等等．至今，几何学仍然是一门丰富多彩蓬勃发展的学科，如将维数是分数而非整数的不规则图形作为研究对象的分形(fractal)几何就是一例．

另一方面，在这分化过程的同时，还进行着相反的统一过程——数学不同领域的方法和思想的互相渗透，这个过程在十九世纪末、二十世纪初得到迅速的发展，那时建立了现代数学共同的逻辑基础，集合论的思想成了统一的思想．希尔伯

特(Hilbert,D.德,1862~1943)的《几何基础》于1899年问世后,不仅把公理化方法推向到形式化的阶段,而且使公理化方法进入了数学的其他各个分支. 法国布尔巴基学派发展了形式公理化思想,采用全局观点,着重分析各个数学分支之间的结构差异和内在联系,在他们的百科全书式的数学巨著《数学原本》(Elements of Mathematics, 1939年以来已出版四十余卷)中实现了数学的统一. 这种统一的基础是所谓的"基本结构",任何的数学结构都是这些基本结构的适当组合.

1.2 现代数学结构的分类

现代数学,有如下两个特征:

(一)所有数学的基础是纯集合论.

(二)数学的各专门分支研究各种特殊的结构,每一种结构由相应的公理体系所确定. 在数学中,仅仅研究由所采用的公理体系导出的结构的性质,即仅仅研究精确到同构的结构.

一个抽象的集合不过是一组元素而已. 只有在集合的元素之间引进了某些关系(如运算或变换等)之后,集合上开始出现结构.

布尔巴基学派认为,数学研究的基本结构有三种,称之谓**母结构**:

(一)**代数结构**. 对集合中的元素规定了运算,能够从两个元素生出第三个元素,就叫做有了代数结构. 如群、环、域、线性空间等.

(二)**序结构**. 集合中某些元素之间有某种序关系,就叫做有了序结构,如半序集、全序集、良序集. 生物的亲子关系、类的包含关系、逻辑的蕴含关系都是序关系.

(三)**拓扑结构**. 它用来描述连续性、分离性、附近、边界

这些空间性质，如拓扑空间、度量空间、紧致集、列紧空间、连通集、连续性及完备性空间等.

母结构可以加上一些公理派生出**子结构**. 两种以上的结构可以加上联结条件产生复合结构. 例如对于实数，如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$，这就表明代数结构与序结构联系起来了. 通过结构的变化、复合、交叉，形成形形色色的数学分支，表现为气象万千的数学世界.

例 1 拓扑群是群结构上再定义拓扑结构的一门学科.

例 2 实数集 R 是一个完备的阿基米德全序域，它乃是由代数结构(域)、序结构(全序)、拓扑结构(完备性)形成的复合结构.

注记 古代曾误认为有理数与数轴上的点是一一对应的，后来发现了无理数，人们又长期地把实数看成与数轴上的点是一一对应的. 这是基于这样一条公理，即点是不可分的，是没有内部结构的.

1960年美国的数理逻辑学家鲁宾生(A. Robinson)成功地示明了无限小的存在性，从而把实数域 R 扩展成包含着数不清的无限小和无限大的非标准实数域 *R，它是一个非阿基米德的完备有序域. 在 *R 上展开分析学的讨论，就构成了《非标准分析》. 在数轴上要赋予非标准实数的位置，就得假定实数点是可分的. 也就是说，在实数点的"内部"凝聚着数不清的无限小点. 这样非标准数轴上的点和 *R 中的数可以看作是一一对应的.

在几何中，我们还是把点看作不可分的.

这里需要强调指出，实数域 R 的直观模型就是数轴，故将 R 也称为**一维欧氏空间**或数直线. 设数轴 OE 上点 O 和点 E 的坐标分别为 0 和 1，任一点 M 的坐标为 x，简记作 $M(x)$ (即有 $\overrightarrow{OM}=x\cdot\overrightarrow{OE}$)，则下列两个公式是**一维欧氏几何**的基本公式：

1. 数轴上任意两点 $A(a)$、$B(b)$ 间的距离

$$|AB|=|b-a|,\ a、b\in\mathrm{R}. \tag{1}$$

2. 数轴上任意有向线段AB的数量

$$AB=b-a,\ a、b\in\mathrm{R}. \tag{2}$$

其中(1)式使R具有度量空间的结构,(2)式使R具有线性空间的结构,下一节将予以详述.

1.3 结构的作用

在谈到结构的作用时,布尔巴基学派写道:"数学好比一座大城市,其郊区正在不断地并且多少有些混乱地向外伸展.与此同时,市中心又在时时重建,每次都根据构思更加清晰的计划和更加合理的布局,在拆毁掉旧的迷宫似的断街小巷的同时,修筑起新的更直、更宽、更加方便的林荫大道通向四方."

如果说,恩格斯时代的数学研究的对象还限于空间形式和数量关系,那么,现在数学完成了进一步的抽象,使形式脱离空间,使关系脱离数量,并且形式与关系也统一起来,称之为结构.于是数学成为研究各种结构的科学.

数学,至少是大部分数学,可以根据结构的不同而将它们分类,找出各数学分支间的结构差异,就会获得各数学分支间的内在联系的清晰图景.

数学家把结构作为研究对象,好比是不再单为固定的顾客加工产品了.他面向普通的需要,他占领广大的市场.哪种对象符合某一套结构的条件,那么有关这个结构的结果便可以用上去.这里,问题只在于选择适当的结构,而不在于探讨数学结论是不是真理.至于哪些结构要增加,哪些结构要修改,则来自科学实践.

六十年代以来,"结构"的观点广泛地渗入中学数学的教材体系之中.在一些"新数学"教材中,如美国的《统一的现代

数学》、英国的《SMP》等，对初等数学以及集论、数理逻辑、近世代数、微积分、概率论、程序设计、线性规划等基本知识，用现代数学的结构思想作了统一的处理．外国的实践为我们的教材改革提供了宝贵的经验与教训．为了胜任中学数学的教学工作，我们必须对初等几何的结构有清楚的了解，比较一下几何的现代结构与经典结构的优劣，可以明确教学改革的方向，少走弯路．

§2 现代数学中欧氏几何的结构

一切近代的欧几里得空间理论的基础是集合论和数的概念．因此，“集合”的概念与“属于”关系是数学（包括几何）的基本概念．实数域或者用来直接定义欧氏几何的结构，或者用作定义其他结构（向量空间、度量空间）的辅助结构．在经典的欧几里得几何理论中，数是作为线段之比或长度而引入的，是在这个理论范围内产生的．这是几何的近代理论与经典理论的根本区别．

1872年德国数学家克莱因（Klein，F.1849～1925）在爱尔朗根（Erlangen）讲演中首先提出几何学可以按照不同的变换群来分类．这种思想方法就是数学史上著名的爱尔朗根纲领．

克莱因认为，欧氏几何是研究刚体变换群作用下的不变性质（如长度不变，角度不变等）．射影几何研究的是射影变换下的不变性质．拓扑学研究的是拓扑变换（即一对一且具有双方连续的变换）下的不变性质．

因此，可以用变换群的观点来处理几何教材．但这样做比较代数化、抽象化．对于射影几何虽较传统方法简单，但对于欧氏几何并不能简化教材．当然利用变换解题有时比较简

单，应该提倡.

值得指出，在克莱因时代以后，对克莱因的分类已经有了增加分类与进一步细分的可能，但不是所有的几何都能纳入他的分类方案之中. 例如，今日的黎曼几何就不能置于克莱因的方案之下.

因此，在现代数学中，几何学较多地采用下述两类结构——向量结构和度量结构.

2.1　几何学的向量结构

作为几何学基础的公理系统，可以采用不同的系统. 下面先介绍一种常用的外尔(H.Weyl,德,1885～1955)公理系统，它是选取“向量”、“点”，对应：“点对→向量”，以及向量的运算(加法、数乘和内积)作为基本概念的.

非空集合 V 的元素称为向量，它满足下列各组公理：

第一组　向量的加法公理

映射 f：$V\times V\to V$

称为向量的加法，记作 $f(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$，称为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和.

I$_1$. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$，$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

I$_2$. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V$，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

I$_3$. $\exists\vec{o}\in V,\forall\vec{a}\in V,\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$.

I$_4$. $\forall\vec{a}\in V,\exists\vec{b}\in V,\vec{a}+\vec{b}=\vec{o}$.(称 $\vec{b}$ 是 $\vec{a}$ 的反向量，记 $\vec{b}=-\vec{a}$).

第二组　向量的数乘公理

映射 h：$R\times V\to V$.

称为向量的数乘，记作 $h(\lambda,\vec{a})=\lambda\vec{a}$ $(\lambda\in R)$.

II$_1$. $\forall\vec{a}\in V$，$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

II_2. $\forall\lambda、\mu\in R,\forall\vec{a}\in V,\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}.$

II_3. $\forall\lambda、\mu\in R,\forall\vec{a}\in V,(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$

II_4. $\forall\lambda\in R,\forall\vec{a},\vec{b}\in V,\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$

第三组　向量的内积公理

映射g：$V\times V\to R$.

称为向量的内积，记作$g(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

III_1. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$

III_2. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$

III_3. $\forall\lambda\in R,\forall\vec{a},\vec{b}\in V,(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$

III_4. $\forall\vec{a}\in V,\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}>0.$

满足上述三组公理的集合V称为**实内积空间**. 而满足上述一、二两组公理的集合V称为**向量空间**，又称为**线性空间**. 向量空间对于加法运算具有阿贝尔群的结构. 引入新的关系(向量的数乘)给阿贝尔群赋予了新的性质，可以谈论向量的线性相关与线性无关以及向量空间的维数等.

第四组　维数公理

IV_1. 存在n个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，仅当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$时，等式$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{o}$成立(称这样的$n$个向量是线性无关的，否则称为线性相关的).

IV_2. 任意$n+1$个向量总是线性相关的.

我们称满足维数公理的向量空间是n维的，记作$\dim V=n$. V中任意n个线性无关的向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$构成$n$维向量空间的一组基. n维向量空间的任一向量$\vec{a}$总可以用一组基向