

左铨如 李永月 编著



初等几何研究



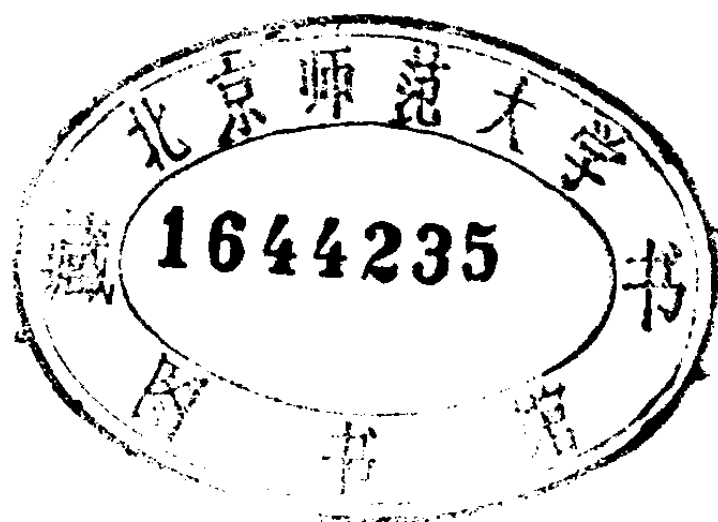
上海科技教育出版社



初等几何研究

左衿如 季素月 编著

J11/153/15



上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

初等几何研究

左铨如 季素月 编著

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路393号)

各地新华书店经销 上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 15.5 字数 350000

1992年9月第1版 1992年9月第1次印刷

印数1—430

ISBN7-5428-0637-8

G·359

定价: 0.50元

JU/1153/15

序

这本《初等几何研究》，是为数学教师，特别是未来的数学教师而写的。

人们常说，“要给学生一碗水，教师要有一桶水”。这一桶水，不应当是一碗水的简单的多少倍。它与一碗水比起来，不仅是量的增多，更应是质的提高。以初等几何而言，教师与学生比起来，不仅是会解更多的题，知道更多的定理、方法和技巧；更重要的是应当对这门学科来龙去脉，它的历史与未来，它在数学中的地位，它与相邻近的数学分支的关系等方面有更进一步的了解。师范院校、教育学院和教师进修学校里为数学教师和未来的数学教师开的课程，就是要使他们真正掌握这一桶水。这不仅是帮教师解答教学中可能碰到的疑难，更在于提高教师的数学素养。

看来，《初等几何研究》正是朝这个方向努力的一个可喜收获。书中介绍了数学结构的观点，讲了现代公理化的方法，还涉及近年来国外为改革初等几何教材的尝试。在现代数学的高观点指导下，进一步落实到解题思想与方法技巧；居高临下，着眼廿一世纪，使学生（未来的数学教师）开眼界，破陈规。它出版并在教学中使用后，必将对我国中学几何教学改革起积极推动作用。

当然，数学教育改革、特别是中学几何教材改革的研究，是一个十分活跃的领域。有关初等几何研究的师范教材，也还处在发展、形成过程之中。《初等几何研究》是在这过程中

出现的，但它不是这过程的终结。随着教学实践的反复深入，它还会得到修改、补充，变得更完善，更适合课程的需要，更能满足现代科技发展对中学数学教师的要求。相信这也正是编者的希望。

最后顺便提一下，书中花了一些篇幅介绍了我的一些“教育数学”的观点和冒昧提出的几何教材改革想法。应当承认，这些想法尚未在中学课堂实施，能否在不久的将来实施，也无把握，不过抛砖引玉，希望引起我国同行的进一步探讨而已。

值此书出版之际，赘数言以为序。

张景中

一九九二年三月十日于成都

目 录

第一章 几何结构	1
§ 1 数学结构的意义	1
1.1 数学发展的分化与统一	1
1.2 现代数学结构的分类	2
1.3 结构的作用	4
§ 2 现代数学中欧氏几何的结构	5
2.1 几何学的向量结构	6
2.2 几何学的度量结构	11
§ 3 经典数学中欧氏几何的结构	14
3.1 欧几里得《几何原本》——古典公理法	14
3.2 希尔伯特《几何基础》——近代公理法	19
§ 4 教育数学中欧氏几何的结构	26
4.1 我国现行中学几何教材的结构分析	27
4.2 国际中学几何教材改革的趋向	30
4.3 二十一世纪中学平面几何新体系的探讨	34
习题一.....	46
第二章 几何证题	50
§ 1 命题与证明	50
1.1 命题	50
1.2 推理与证明	56
§ 2 几何证题的推理方法	61
2.1 综合法与分析法	61
2.2 直接证法与间接证法	66
2.3 演绎推理与合情推理	75

§ 3 几何证题的思考方法	79
3.1 分解拼补法	79
3.2 命题转换法	86
3.3 特殊化	97
3.4 类比	101
3.5 面积法	105
§ 4 其他数学方法在几何证题中的应用	111
4.1 三角法	111
4.2 代数法	116
4.3 坐标法	120
4.4 向量法	124
4.5 复数法	127
习题二	138
第三章 几何变换	146
§ 1 变换与变换群	146
1.1 映射	146
1.2 变换	147
1.3 变换群	148
§ 2 合同变换	150
2.1 合同变换及其性质	150
2.2 平移变换	153
2.3 旋转变换	156
2.4 反射	162
2.5 平移、旋转、反射之间的关系	165
2.6 自对称图形	173
§ 3 相似变换	177
3.1 相似变换及其性质	177
3.2 位似变换	179
* § 4 反演变换	188

4.1 反演变换及其性质	188
4.2 极点与极线	203
习题三	205
第四章 几何轨迹	208
§1 轨迹的有关概念	208
1.1 轨迹的意义	208
1.2 轨迹基本定理	212
1.3 三种类型的轨迹题	213
§2 用综合法探求点的轨迹	220
2.1 描述法	220
2.2 几何变换法	226
2.3 条件代换法	229
§3 用解析法探求点的轨迹	237
习题四	244
第五章 几何作图	247
§1 几何作图基本知识	247
1.1 作图工具与作图公法	247
1.2 作图成法	248
1.3 作图题的条件与分类	249
1.4 解作图题的步骤	250
§2 常用的作图方法	252
2.1 交轨法	252
2.2 三角形奠基法	257
2.3 变位法	260
2.4 位似法	264
● 2.5 反演法	266
2.6 代数法	268
* §3 尺规作图可能性的判断准则	273
3.1 尺规作图的充分必要条件	273

3.2	三次方程的根能否尺规作图的判定	275
3.3	三大尺规作图不能问题	276
3.4	尺规作图不能问题的判别方法	277
	习题五	280
第六章	立体几何	283
§ 1	点、直线、平面	284
§ 2	简单多面体的欧拉公式	294
§ 3	面积与体积	301
3.1	面积概念	301
3.2	体积概念	303
3.3	拟柱体与辛普生公式	306
§ 4	立体几何证题法	314
4.1	分解拼补法	314
4.2	命题转换法	316
4.3	类比法	319
4.4	体积法	323
4.5	向量法	323
§ 5	四面体的度量公式	326
§ 6	多面角的概念与球面多边形的面积	332
	习题六	337
第七章	球面几何	342
§ 1	距离、线段、角	342
§ 2	球面三角	350
§ 3	对偶原则	356
§ 4	图形相等与椭圆运动	361
	习题七	364
第八章	双曲几何	367
§ 1	距离、线段、角	370

§ 2	双曲三角	379
§ 3	图形相等与双曲运动	386
* § 4	双曲几何模型	391
4.1	克莱因模型	391
4.2	庞卡莱模型	395
	习题八	400
* 第九章	n 维欧氏几何简介	403
§ 1	距离、线段、凸集、变换	404
§ 2	超平面、凸多胞形	409
§ 3	单形的体积	413
§ 4	关于单形的射影定理、余弦定理和正弦定理	422
§ 5	关于单形的几何不等式	427
§ 6	重心坐标	432
	习题九	440
	习题答案和提示	443

第一章 几何结构

本章用现代数学的观点,从整体上鸟瞰欧氏几何的内在逻辑结构.着重介绍了若干有关欧氏几何的公理系统,分析比较了它们的优劣.使读者能居高临下,了解公理化方法的意义,熟悉欧氏几何的结构,明确欧氏空间是特殊的向量空间和度量空间,从而深刻理解初等几何研究的对象,领会在数学科学中所处的基础性地位与作用,进一步认清中学几何教材改革的方向.

§ 1 数学结构的意义

1.1 数学发展的分化与统一

随着数学的飞速发展,不断出现许多新的数学分支,这些分支有其自身的研究课题,独自的方法,独自的语言.就拿几何这一源远流长、多彩多姿的学科来说,有古典的欧氏几何、解析几何、球面几何、非欧几何、射影几何,还有近代的黎曼几何、代数几何、复几何、辛(symplectic)几何、代数拓扑、微分拓扑等等.至今,几何学仍然是一门丰富多彩蓬勃发展的学科,如将维数是分数而非整数的不规则图形作为研究对象的分形(fractal)几何就是一例.

另一方面,在这分化过程的同时,还进行着相反的统一过程——数学不同领域的方法和思想的互相渗透,这个过程在十九世纪末、二十世纪初得到迅速的发展,那时建立了现代数学共同的逻辑基础,集合论的思想成了统一的思想.希尔伯

特(Hilbert, D. 德, 1862~1943)的《几何基础》于1899年问世后, 不仅把公理化方法推向到形式化的阶段, 而且使公理化方法进入了数学的其他各个分支. 法国布尔巴基学派发展了形式公理化思想, 采用全局观点, 着重分析各个数学分支之间的结构差异和内在联系, 在他们的百科全书式的数学巨著《数学原本》(Elements of Mathematics, 1939年以来已出版四十余卷)中实现了数学的统一. 这种统一的基础是所谓的“基本结构”, 任何的数学结构都是这些基本结构的适当组合.

1.2 现代数学结构的分类

现代数学, 有如下两个特征:

(一)所有数学的基础是纯集合论.

(二)数学的各专门分支研究各种特殊的结构, 每一种结构由相应的公理体系所确定. 在数学中, 仅仅研究由所采用的公理体系导出的结构的性质, 即仅仅研究精确到同构的结构.

一个抽象的集合不过是一组元素而已. 只有在集合的元素之间引进了某些关系(如运算或变换等)之后, 集合上开始出现结构.

布尔巴基学派认为, 数学研究的基本结构有三种, 称之为**母结构**:

(一)**代数结构**. 对集合中的元素规定了运算, 能够从两个元素生出第三个元素, 就叫做有了代数结构. 如群、环、域、线性空间等.

(二)**序结构**. 集合中某些元素之间有某种序关系, 就叫做有了序结构, 如半序集、全序集、良序集. 生物的亲子关系、类的包含关系、逻辑的蕴含关系都是序关系.

(三)**拓扑结构**. 它用来描述连续性、分离性、附近、边界

这些空间性质，如拓扑空间、度量空间、紧致集、列紧空间、连通集、连续性及完备性空间等。

母结构可以加上一些公理派生出子结构。两种以上的结构可以加上联结条件产生复合结构。例如对于实数，如果 $a > b$ ，则 $a + c > b + c$ ，这就表明代数结构与序结构联系起来。通过结构的变化、复合、交叉，形成形形色色的数学分支，表现为气象万千的数学世界。

例 1 拓扑群是群结构上再定义拓扑结构的一门学科。

例 2 实数集 R 是一个完备的阿基米德全序域，它乃是由代数结构(域)、序结构(全序)、拓扑结构(完备性)形成的复合结构。

注记 古代曾误认为有理数与数轴上的点是一一对应的，后来发现了无理数，人们又长期地把实数看成与数轴上的点是一一对应的。这是基于这样一条公理，即点是不可分的，是没有内部结构的。

1960年美国的数理逻辑学家鲁宾生(A. Robinson)成功地示明了无限小的存在性，从而把实数域 R 扩展成包含着数不清的无限小和无限大的非标准实数域 *R ，它是一个非阿基米德的完备有序域。在 *R 上展开分析学的讨论，就构成了《非标准分析》。在数轴上要赋予非标准实数的位置，就得假定实数点是可分的。也就是说，在实数点的“内部”凝聚着数不清的无限小点。这样非标准数轴上的点和 *R 中的数可以看作是一一对应的。

在几何中，我们还是把点看作不可分的。

这里需要强调指出，实数域 R 的直观模型就是数轴，故将 R 也称为一维欧氏空间或数直线。设数轴 OE 上点 O 和点 E 的坐标分别为 0 和 1 ，任一点 M 的坐标为 x ，简记作 $M(x)$ (即有 $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OE}$)，则下列两个公式是一维欧氏几何的基本公式：

1. 数轴上任意两点 $A(a)$ 、 $B(b)$ 间的距离

$$|AB| = |b - a|, a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

2. 数轴上任意有向线段 AB 的数量

$$AB = b - a, a, b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

其中(1)式使 \mathbb{R} 具有度量空间的结构,(2)式使 \mathbb{R} 具有线性空间的结构,下一节将予以详述.

1.3 结构的作用

在谈到结构的作用时,布尔巴基学派写道:“数学好比一座大城市,其郊区正在不断地并且多少有些混乱地向外伸展.与此同时,市中心又在时时重建,每次都根据构思更加清晰的计划和更加合理的布局,在拆毁掉旧的迷宫似的断街小巷的同时,修筑起新的更直、更宽、更加方便的林荫大道通向四方.”

如果说,恩格斯时代的数学研究的对象还限于空间形式和数量关系,那么,现在数学完成了进一步的抽象,使形式脱离空间,使关系脱离数量,并且形式与关系也统一起来,称之为结构.于是数学成为研究各种结构的科学.

数学,至少是大部分数学,可以根据结构的不同而将它们分类,找出各数学分支间的结构差异,就会获得各数学分支间的内在联系的清晰图景.

数学家把结构作为研究对象,好比是不再单为固定的顾客加工产品了.他面向普通的需要,他占领广大的市场.哪种对象符合某一套结构的条件,那么有关这个结构的结果便可以用上去.这里,问题只在于选择适当的结构,而不在于探讨数学结论是不是真理.至于哪些结构要增加,哪些结构要修改,则来自科学实践.

六十年代以来,“结构”的观点广泛地渗入中学数学的教材体系之中.在一些“新数学”教材中,如美国的《统一的现代

数学》、英国的《SMP》等，对初等数学以及集论、数理逻辑、近世代数、微积分、概率论、程序设计、线性规划等基本知识，用现代数学的结构思想作了统一的处理。外国的实践为我们的教材改革提供了宝贵的经验与教训。为了胜任中学数学的教学工作，我们必须对初等几何的结构有清楚的了解，比较一下几何的现代结构与经典结构的优劣，可以明确教学改革的方向，少走弯路。

§ 2 现代数学中欧氏几何的结构

一切近代的欧几里得空间理论的基础是集合论和数的概念。因此，“集合”的概念与“属于”关系是数学（包括几何）的基本概念。实数域或者用来直接定义欧氏几何的结构，或者用作定义其他结构（向量空间、度量空间）的辅助结构。在经典的欧几里得几何理论中，数是作为线段之比或长度而引入的，是在这个理论范围内产生的。这是几何的近代理论与经典理论的根本区别。

1872年德国数学家克莱因(Klein, F. 1849~1925)在爱尔朗根(Erlangen)讲演中首先提出几何学可以按照不同的变换群来分类。这种思想方法就是数学史上著名的爱尔朗根纲领。

克莱因认为，欧氏几何是研究刚体变换群作用下的不变性质（如长度不变，角度不变等）。射影几何研究的是射影变换下的不变性质。拓扑学研究的是拓扑变换（即一一对一且具有双方连续的变换）下的不变性质。

因此，可以用变换群的观点来处理几何教材。但这样做比较代数化、抽象化。对于射影几何虽较传统方法简单，但对于欧氏几何并不能简化教材。当然利用变换解题有时比较简

单,应该提倡.

值得指出,在克莱因时代以后,对克莱因的分类已经有了增加分类与进一步细分的可能,但不是所有的几何都能纳入他的分类方案之中.例如,今日的黎曼几何就不能置于克莱因的方案之下.

因此,在现代数学中,几何学较多地采用下述两类结构——向量结构和度量结构.

2.1 几何学的向量结构

作为几何学基础的公理系统,可以采用不同的系统.下面先介绍一种常用的外尔(H. Weyl, 德, 1885~1955)公理系统,它是选取“向量”、“点”,对应:“点对 \rightarrow 向量”,以及向量的运算(加法、数乘和内积)作为基本概念的.

非空集合 V 的元素称为向量,它满足下列各组公理:

第一组 向量的加法公理

映射 $f: V \times V \rightarrow V$

称为向量的加法,记作 $f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$,称为 \vec{a}, \vec{b} 的和.

$$I_1. \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

$$I_2. \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

$$I_3. \quad \exists \vec{o} \in V, \forall \vec{a} \in V, \vec{a} + \vec{o} = \vec{a}.$$

$$I_4. \quad \forall \vec{a} \in V, \exists \vec{b} \in V, \vec{a} + \vec{b} = \vec{o}. (\text{称 } \vec{b} \text{ 是 } \vec{a} \text{ 的反向量,记 } \vec{b} = -\vec{a}).$$

第二组 向量的数乘公理

映射 $h: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$.

称为向量的数乘,记作 $h(\lambda, \vec{a}) = \lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

$$I_1. \quad \forall \vec{a} \in V, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

$$\text{I}_2. \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V, \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}.$$

$$\text{I}_3. \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V, (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}.$$

$$\text{I}_4. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$

第三组 向量的内积公理

映射 $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

称为向量的内积, 记作 $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\text{II}_1. \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$\text{II}_2. \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

$$\text{II}_3. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

$$\text{II}_4. \quad \forall \vec{a} \in V, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{a} > 0.$$

满足上述三组公理的集合 V 称为**实内积空间**. 而满足上述一、二两组公理的集合 V 称为**向量空间**, 又称为**线性空间**. 向量空间对于加法运算具有阿贝尔群的结构. 引入新的关系(向量的数乘)给阿贝尔群赋予了新的性质, 可以谈论向量的线性相关与线性无关以及向量空间的维数等.

第四组 维数公理

IV_1 . 存在 n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, 仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ 时, 等式 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ 成立(称这样的 n 个向量是线性无关的, 否则称为线性相关的).

IV_2 . 任意 $n+1$ 个向量总是线性相关的.

我们称满足维数公理的向量空间是 n 维的, 记作 $\dim V = n$. V 中任意 n 个线性无关的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 构成 n 维向量空间的一组基. n 维向量空间的任一向量 \vec{a} 总可以用一组基向