高等学校教材

# 微波声学

陈戈林　乐光启　编

電子工業出版社

高等学校教材

# 微波声学

陈戈林　乐光启　编





電子工業出版社

## 内 容 提 要

微波声学是新近发展起来的微波电磁场理论的重要领域，也是声学的一个分支，既有理论意义又是一种实用技术，全书分为两大部分，第一部分论述了微波声学的基本内容，如理想流体内的声波；各向同性、各相异性压电体内的平面波的基本理论和分析方法．第二部分叙述了微波声学的主要应用，如有声表面波器件、声显微技术、声光相互作用器件等．

本书可供声学、微波电磁场理论专业的大学高年级学生和研究生阅读，也可供从事微波声学应用的科研人员、工程技术人员参考．

高等学校教材

微 波 声 学

陈戈林 乐光启 编

责任编辑：龚兰方

*

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：16 字数：411 千字

1989 年 3 月第一版 1989 年 3 月第一次印刷

印数：1500 册 定价：3.20 元

ISBN 7-5053-0455-0/TN·160

# 出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从 1978 年至 1985 年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应"三个面向"的需要，贯彻"努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材"的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了 1986～1990 年的"七五"(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近 400 种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部教材办公室

# 前　　言

本教材系按机械电子工业部制定的工科电子类教材 1986～1990 年编审出版规划，由《电子物理与器件》教材编审委员会《电子物理与器件》编审小组组织征稿、评选、推荐出版的.

本教材由清华大学陈戈林、乐光启编写，成都电讯工程学院袁敬闲担任主审.

本课程的参考教学时数为 50 学时，其主要内容为微波声学器件的基本原理，其中包括流体、固体、压电体中声波传播规律，声表面波器件、声成象技术、声光作用器件的基本原理和应用.

全书共分为八部分. 绪论介绍了微波声学研究的对象、发展历史以及和电子学的关系. 第一章流体中的声波，引入了声学的一些基本概念和定理. 第二、三章从广义虎克定律出发导出固体中声波波动方程，利用简化下标得到各向异性固体中的克利斯托夫方程. 求解方程时常利用电、声的相似性. 第四章根据压电方程讨论了压电体中平面波的特性，导出了梅森等效电路. 第五章分析了声表面波的特点，讨论了声表面波叉指换能器的两种模型. 第六章概述了声成象技术的发展历史，介绍了三种声显微镜的工作原理. 第七章从光栅衍射出发阐明了声光效应的物理过程，还讨论了声光器件的设计和应用问题. 本书附录中包含了常用材料的声学参数和对称性.

使用本教材时应注意突出声学的基本概念和晶体的对称性问题，尤其要抓住电、声的相似性. 学习方式灵活一些，有的内容可以自学. 这样可使同学耗费较少的时间而获得较大的收益.

本教材由乐光启编写第六、第七章，陈戈林编写绪论、第一至第五章及附录，并统编全稿. 清华大学张克潜教授对整个编写工作给予了热情的鼓励、帮助和指导. 参加审阅工作的还有清华大学电子物理与器件教研组罗淑云、胡思正、吴伯瑜等同志，这里表示诚挚的感谢. 由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正.

编者

# 目　　录


绪论 …… (1)
01 声学 …… (1)
02 微波声学 …… (1)
03 声学与电磁学和电子学 …… (2)
第一章 理想流体中的声波 …… (4)
1.1 基本方程 …… (4)
1.2 波动方程 …… (7)
1.3 理想流体中的能量关系 …… (9)
1.4 均匀流体中的平面声波 …… (13)
1.5 波动方程的一般解 …… (17)
1.6 波动方程一般解的应用 …… (23)
1.7 几何声学基本方程 …… (31)
1.8 互易原理 …… (34)
习题 …… (38)
第二章 弹性固体中声场基本方程 …… (40)
2.1 固体的形变——应变张量 …… (40)
2.2 固体的内应力——应力张量 …… (43)
2.3 广义虎克定律 …… (46)
2.4 运动方程 …… (51)
2.5 张量运算简介 …… (53)
2.6 电磁学和声学的相似性 …… (58)
2.7 能量守恒、功率流和波印亭定理 … (63)
2.8 固体中声波波动方程和各向同性固体中的平面声波 …… (67)
习题 …… (75)
第三章 各向异性固体中的声波 …… (77)
3.1 晶体的对称性和分类 …… (77)
3.2 s、c的对称性——简化s、c张量… (78)
3.3 各向异性固体中的声波 …… (80)
3.4 声学问题中的几种速度及曲面 …… (87)
3.5 等效传输线 …… (95)
3.6 固体界面上声波的反射和折射 …… (101)
习题 …… (107)
第四章 压电体中的声波 …… (109)
4.1 压电体的简单模型 …… (109)
4.2 压电体的压电方程及压电常数 …… (113)
4.3 压电体的特性及定向切割 …… (116)
4.4 压电体中的平面波 …… (120)
4.5 压电体中一般波动方程 …… (130)
4.6 压电体的等效传输线 …… (139)
4.7 薄片压电换能器 …… (146)
习题 …… (156)
第五章 声表面波(SAW)和声表面波器件…(157)
5.1 非压电体中的声表面波 …… (157)
5.2 压电体中的声表面波 …… (160)
5.3 叉指换能器和等效电路 …… (163)
5.4 IDT 的脉冲响应模型 …… (169)
5.5 常用声表面波器件及其应用 …… (173)
习题 …… (178)
第六章 声成象和声显微镜 …… (179)
6.1 声成象概述 …… (179)
6.2 球面声透镜及其成象机理 …… (181)
6.3 透镜成象的扫描式声显微镜(SAM)…(189)
6.4 热波成象和扫描式光声显微镜(SPAM) …… (191)
6.5 液面波纹衍射成象和声光显微镜(SLAM) …… (196)
习题 …… (200)
第七章 声光效应和声光器件 …… (201)
7.1 概述 …… (201)
7.2 各向同性媒质中的声光效应 …… (203)
7.3 单晶体中的声光效应 …… (212)
7.4 声光效应器件 …… (215)
7.5 声光器件应用举例 …… (218)
习题 …… (222)
附录 …… (223)
一、 固体分类及其对称操作 …… (223)
二、 常用材料的声学特性 …… (225)
(一) 力学特性 …… (225)
(二) 压电特性 …… (232)
(三) 介电常数 …… (235)
(四) 衰减和声学特性 …… (237)
三、 固体中平面声波特性 …… (237)
四、 常用固体材料表面传播的瑞利波的基本特性 …… (243)
五、 本书常用符号 …… (247)
参考文献 …… (249)

# 绪　论

## 01　声　学

声学和力学、热学、电磁学、光学一起组成经典物理学.声学是一门历史悠久而又在不断发展的学科。人类在古代就对声音有了认识.到了牛顿的时代，当科学家还在对光的波动性和粒子性激烈争论，对光的电磁本质还茫然无所知时，对声的波动性认识已经很清楚了。但完整的声学理论的建立和发展都在电磁理论建立之后。其原因在于固体中的声场是张量的应力、应变场，媒质的各向异性及声波在媒质中传播的多样性。

最初，声学的研究局限于可听的声音，即大约 20Hz 至 20000Hz 频段的声波，包括对音乐与乐器的研究，语言及听觉的研究，建筑声学的研究，电声系统（电话，微音器，喇叭等）的研究等。以后研究的领域逐渐扩展，低频方面扩展到 20Hz 以下的次声波，1Hz 以下的地震波等。高频方面扩展到 20000Hz 以上的超声波及数百乃至数千兆赫的微波声。由此可见，目前声学研究的领域已远远超出人耳可听的范围。声学的准确定义应当是：研究在气体、液体、固体中机械振动的产生、传播、接收及相互作用的科学。

习惯上把声波按频率划分为下列频段：

$10^{-4}$Hz ～ 20Hz　　次声频

20Hz ～ 20kHz　　声频或音频

20kHz 以上　　超声频

其中 50MHz ～ 100GHz　微波声频

$10^{12}$ ～ $10^{14}$Hz　热振动、声子

声学既是一门基础科学，又是一门应用性很强的学科；它深入到各个科技领域。按照应用领域可以划分为下列子学科：

大地声学及大气声学：地震波、冲击波等

水声学：声纳、水下声成像等

建筑声学：建筑物音响效果

乐声学：乐器及音响系统

生物声学：发声、听觉及声波的生物效应。

电声学：微音器、喇叭、喇叭箱等

声学信号处理：语音处理及识别、人机对话等

超声学：超声加工、清洗、探伤、超声诊断、超声层析等。

微波声学：声学信号处理、声学显微成像、材料研究、声光作用等。

## 02　微波声学

如上所述，微波声学的研究范围可由下列几方面来说明。第一，它所研究的声波频率范围

大体相当于电磁波中微波的频率范围。但因声速只是电磁波速的十万分之一，因此在微波中的分米波、厘米波的频率范围，所激励起来的声波波长就成为微米量级。故微波声学所涉及的频率是百兆赫及千兆赫量级而其波长则为微米量级。

第二，微波声学研究中所用的实验手段以微波技术为主。 在微波技术研究中发展起来的微波产生、放大、调制、检测等基本手段也都是微波声学的基本实验手段。

第三，微波声学研究的应用领域主要是：

1. 模拟信号处理：即各种表面波及体声波的信号处理器件，如延迟线、滤波器、相关器、卷积器等。

2. 声显微成像：即声学显微镜，它能进行亚表层成像，分辨率已与光学显微镜相当，即零点几微米。实验室中的最高水平已达 200 埃（1 埃 $=10^{-10}$m）。

3. 材料研究：包括高精度无损探伤，微区材料识别研究，材料参数测试等。

4. 声光作用： 近年来在研制声光调制器、偏转器的基础上，发展出一套声光信号处理技术。

微波声学的实际研究工作是在微波技术达到成熟阶段以后，始自六十年代末和七十年代初期。目前正处于方兴未艾的阶段。

微波声学既是声学的一个新兴分支又是电子学的一个重要领域。可以说，它是声学与电子学的交叉学科。

## 03 声学与电磁学和电子学

声学与电磁学和电子学表面上似乎无关，但实际有着紧密的联系。

### 一、声波与电磁波的相似性

电磁波一般地满足矢量亥姆霍茨方程，在许多特殊情况下可化为标量亥姆霍茨方程。 理想流体中的声波满足标量亥姆霍茨方程。固体中的声波满足张量波动方程，在许多情况下可化为与标量亥姆霍茨方程相似的方程。因此，在电磁波研究中所用的复数符号法、玻印亭定理、波的传播、反射、折射、等效传输线，波阻抗概念、边值问题解法，衍射理论及傅里叶光学等也都适用于声学。

当然声学也具有特点，例如固体中的声场——应力、应变是张量而不是矢量。微波声学中常用的晶体又是各向异性的，因此，声学问题一般要比电磁问题复杂一些。压电体中既有声学量又有电学量，而且又是各向异性体。 因而压电问题是连续媒质电动力学中较复杂的一个课题。

### 二、声学器件是电子系统中的重要组成部分

最早用于电子系统中的声学(机械振动)器件是压电石英晶体。至今除了复杂的原子频率标准外，压电石英仍然是目前最方便的产生高稳定度频率信号的基本器件。 目前除了专业用的信号发生器、频率计、定时器及发射机中必须应用石英振荡器，即使是日常生活中的彩色电视机、电子表及计算器中也都少不了石英晶体。由于数字倍频、数字分频、频率合成等技术的发展，石英晶体作为稳定的定时器更显示出它的重要性。

声表面波技术发展起来以后，在信息处理中它可做成延迟线、滤波器、卷积器、相关器等.广泛应用于通信、雷达等电子系统中，新一代的电视接收机也采用了无需调谐的声表面波中频滤波器代替原来的多个 $L$-$C$ 调谐回路，使电视机生产中大大简化了调谐，降低了成本。 此外体声延迟线及滤波器也广泛用于各种电子系统中。

在光电子技术中声光调制、声光偏转、声表面波光栅等也获得了广泛应用。

### 三、声学研究中以电子技术为主要实验手段

在声学研究中声学的产生、接收及声信号处理、显示等都需要应用电子技术。尤其是到了微波声学的范围，微波技术更是研究中的重要工具。

正是由于上述原因，声学研究工作者往往同时又是电子学特别是微波理论与技术方面的学者。近年来在微波声学方面好几位卓有成绩的科学家过去都在微波技术与微波电子学方面做出过重大贡献。

声波与电磁波的一些特点对比如下：

| | 声　波 | 电磁波 |
|---|---|---|
| 传播媒质 | 气体、液体、固体(真空中不能传播) | 真空、气体、液体、固体中都可传播 |
| 可视性 | 全不可见 | $\lambda = 0.4 \sim 0.8\mu m$ 波段可见，其余不可见 |
| 可听性 | $f = 20 \sim 20000Hz$ 频段可听，其余不可听 | 全不可听 |
| 波速 | 低，$10^2 \sim 10^4 m/s$ | 高，$\sim 3 \times 10^8 m/s$ |
| 波长 | 短 | 长 |
| | $f = 300MHz$ 时 | $f = 3000MHz$ 时 |
| | 水中 $\lambda = 5\mu m$ | 真空中 $\lambda = 1m$ |
| 基本定律 | 牛顿定律 | 麦克斯韦方程 |
| | $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ | $\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial D}{\partial t}$ |
| | 虎克定律 | $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ |
| | $[S] = [s]:[T]$ | |

由于声学与电磁学和电子学有着如此密切的关系。那么对于主修电子学的学生来说，学习一些声学的基础及应用知识就是很有必要的了。本书的主要目的是供电子学领域有关专业研究生及高年级大学生作为教材或参考书。也可供声学专业的学生(或科技人员)参考。

# 第一章　理想流体中的声波

## 1.1 基 本 方 程

声波是物质内传播的一种机械波。波的性质主要取决于物质的性质和状态，和固体不同，液体、气体内分子间可以任意相对移动。液体和气体统称为流体。本章讨论流体中声波的特点。

为了了解流体中声波波动过程的主要规律和特征，我们首先研究理想流体。其主要假设是:

(1) 流体是连续的，不考虑分子间的距离。由于我们分析的问题是物质宏观波动过程，选取的最小体积元包括了大量的分子。因而可以忽略物质的不连续性。

(2) 流体的分子间可以任意自由滑动，无粘性，流体运动过程中无能量损耗（如热传导损耗等)。

我们采用尤拉变量。即流体中参量 $p$, $\boldsymbol{v}$, $\rho$（压力、速度、密度）仅是空间坐标 $xyz$ 和时间 $t$ 的函数。

应说明，流体力学分析法及其基本方程不仅用于分析声波，也可用于分析电子注内空间电荷波及等离子体内的磁流体波等。理想流体满足的基本方程如下:

### 一、连续性方程

连续性方程说明流体密度 $\rho$ 的变化率和流体速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的关系，是物质守恒定律在流体力学中的具体形式。其方程推导过程如下:

如图 1-1-1，设有一流体体积为 $V_0$，外表面 $S$，体内各点密度为 $\rho$，各点流体速度为 $\boldsymbol{v}$，外表面 $S$ 上取一面积元 $d\boldsymbol{S}$. $d\boldsymbol{S}$ 为一矢量，数值等于元面积，其方向沿面积元的法线方向。通过面积元 $d\boldsymbol{S}$，单位时间流出流体的质量为 $\rho(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S})$. 故单位时间通过整个 $S$ 流出的流体质量为

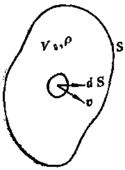

图 1-1-1　流体表面

$$\oint_s \rho(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}).$$

体积 $V_0$ 内流体总质量为 $\int_{V_0}\rho dV$. 单位时间内减少质量为

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{V_0}\rho dV\right]$$

根据质量守恒定律和散度定理可得

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1-1-1}$$

$\rho$、$\boldsymbol{v}$ 都是空间坐标的函数，按散度公式，上式可改写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=0$$

(1-1-1) 式告诉我们流体中任一点的密度变化率和 $\rho v$ 的散度之和为 0。

## 二、状态方程

状态方程说明流体中压力 $p$ 和密度 $\rho$ 之间的关系．这涉及能量变化过程，要利用热力学关系．

由于本章仅讨论理想流体，在形变过程中流体内声波无能量损失．其中过程都是绝热等熵过程．用 $S$ 表示熵，按热力学关系，此过程满足 $\frac{dS}{dt}=0$ 或 $\frac{\partial S}{\partial t}+v\nabla S=0$．流体中各点压力是密度和熵的函数 $p=f(\rho,S)$．

$$dp=\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}d\rho+\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)_{\rho_0}dS$$

理想流体中 $dS=0$，故

$$dp=\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}d\rho,\quad \frac{dp}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}\frac{d\rho}{dt}.$$

若令 $\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}=c^2$

则
$$\frac{dp}{dt}=c^2\frac{d\rho}{dt}\tag{1-1-2}$$

[例 1] 求理想气体的 $\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}$

理想气体的绝热方程为 $pV^\gamma=p_0V_0^\gamma=\text{const}$; $\gamma=\frac{C_p}{C_V}$; $C_p$、$C_V$——气体的等压等容比热; $p_0$、$V_0$——未受压时的压力 $p$ 和体积 $V$．故

$$p=\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma p_0$$

根据质量守恒 $\rho_0V_0=\rho V$

$$p=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma p_0$$

令
$$p=p_0+dp,\quad \rho=\rho_0+d\rho$$

则
$$dp=\frac{\gamma}{\rho_0}p_0d\rho$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}=c^2$$

如空气的 $\gamma=1.41$; $\rho_0=1.23\text{kg/m}^3$; $p_0=1.014\times10^5\text{N/m}^2$ 代入

$$c^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}$$

则得 $c=340\text{m/s}$．

[例 2] 求出液体的 $\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}$

$$c^2=\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{S_0}=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{S_0}$$

$$V\rho = V_0\rho_0$$

$$(V_0 + dV)(\rho_0 + d\rho) = V_0\rho_0$$

略去高阶项

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = -\frac{dV}{V_0}$$

故

$$c^2 = -\left(\frac{dp}{\frac{dV}{V_0}\cdot\rho_0}\right)_{s_0}$$

令 $\beta_s = -\dfrac{\frac{dV}{V_0}}{dp}$ 为压缩系数，可得 $c^2 = \dfrac{1}{\rho_0\beta_s}$

如水的 $\rho_0 = 10^3\text{kg/m}^3$; $\beta_s = 4.75\times10^{-10}\text{s}^2\text{m/kg}$. 则 $c = 1.5\times10^3\text{m/s}$

## 三、运动方程——尤拉方程

尤拉方程说明流体内体积元受力和速度间的关系。它由牛顿方程导出.

取流体中任一体积元 $dV = dxdydz$. 中心点$M$的坐标为 $(x, y, z)$. 理想流体中任一表面都只受正压力，压力都垂直于表面(见图 1-1-2).

故 $dV$ 体积所受 $x$ 方向的力都在法线沿 $x$ 方向的平面上. 故 $dV$ 受 $x$ 向力为

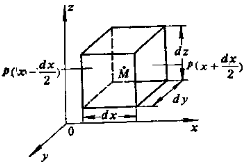


图 1-1-2 流体中体积元

$$p\left(x+\frac{dx}{2}\right)dydz = \left[p(x,y,z) + \frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{dx}{2}\right]dydz$$

$$p\left(x-\frac{dx}{2}\right)dydz = \left[p(x,y,z) - \frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{dx}{2}\right]dydz$$

故

$$F_x = \left[p\left(x-\frac{dx}{2}\right) - p\left(x+\frac{dx}{2}\right)\right]dydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

由于流体内每点的压力各向相同，$p$ 是标量，同理 $y$, $z$ 向受力为

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz$$

$$F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz$$

总结以上 $\boldsymbol{F} = -\nabla p dxdydz = -\nabla p dV$

按牛顿定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, 并将上式代入，可得

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p \tag{1-1-3}$$

上式称为尤拉方程，也可改写成

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p$$

上式中 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$

若流体不仅受压力还受重力，电磁力，则上式右端还要加上别的力.

尤拉方程告诉我们：流体的加速度和压力负梯度成正比．当 $\nabla p=0$，则

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=0,\quad \boldsymbol{v}=\text{cons}\,t.$$

## 1.2 波动方程

理想流体满足三个基本方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{1-2-1}$$

$$\frac{dp}{dt}=c^2\frac{d\rho}{dt} \tag{1-2-2}$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla p \tag{1-2-3}$$

方程中变量为 $p$、$\rho$、$\boldsymbol{v}$．一般情况下变化量较小，可作小讯号假设，并令流体速度恒定分量为 0．即

$$\begin{aligned}&\rho=\rho_0+\rho_1 &&\rho_1\ll\rho_0\\&p=p_0+p_1 &&p_1\ll p_0\\&\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\end{aligned}$$

上式中的 $p_0$、$\rho_0$ 为直流分量，$p_1$、$\rho_1$、$\boldsymbol{v}_1$ 为交变分量.

在分析声波波动过程时，可导出三个参量中任一量的波动方程．上述三个参量中，$\boldsymbol{v}$ 为矢量有三个分量，计算较麻烦．$\rho$ 不易准确测定，在分析流体声学问题时常用压力 $p$ 作为主要参量，描述声场．下面如不特别说明，所指声场就是 $p$ 场，下面我们将从基本方程中消去 $\boldsymbol{v}$、$\rho$ 得到 $p$ 的方程.

按小讯号假设，由 (1-2-1) 式得

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\nabla[(\rho_0+\rho_1)\boldsymbol{v}]=0$$

由于 $\rho_1\ll\rho_0$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1$，下面我们就把 $\boldsymbol{v}_1$ 写成 $\boldsymbol{v}$．上式写成

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0\cdot\boldsymbol{v})=0$$

将上式各项对 $t$ 求导

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2}+\nabla\cdot\left(\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}\right)=0 \tag{1-2-4}$$

按小讯号假设，尤拉方程 (1-2-3) 式为

$$(\rho_0+\rho_1)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla(p_0+p_1)$$

设流体各处均匀 $\nabla p_0=0$；及 $\rho_1\ll\rho_0$，则

$$\rho_0 \frac{dv}{dt} = -\nabla p_1$$

而

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$$

在波动过程中令 $v \propto e^{j(\omega t - \beta x)}$, $\frac{\partial v}{\partial t} = j\omega v$, $(v \cdot \nabla)v = -j\omega v\left(\frac{v}{c}\right)$.

一般声波振动速度比声波传播速度小得多,即 $v \ll c$ 故

$$\rho_0 \frac{dv}{dt} \approx \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

尤拉方程

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p_1 \tag{1-2-5}$$

由状态方程

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d(\rho_0 + \rho_1)}{dt} = \frac{d\rho_1}{dt}.$$

及 $v \ll c$,

$$\frac{d\rho_1}{dt} \approx \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \quad \frac{dp_1}{dt} \approx \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

则状态方程

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \tag{1-2-6}$$

将 (1-2-6) 式代入 (1-2-4) 式,则得

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \nabla \cdot (-\nabla p_1) = 0$$

即

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \tag{1-2-7}$$

上式是理想、均匀、静止流体中小振幅声波的波动方程,即亥姆霍茨方程.

关于波动方程有几点需要说明:

(1) 推导方程过程中作了一些简化近似假设,这和实际情况比较符合.

(2) 上面仅写出了 $p_1$ 的波动方程,而流体声波可假设一个速度位 $\varphi$. 令 $v = -\nabla\varphi$, 可证明,$\varphi$ 也满足方程

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

同理, $\rho_1$ 也同样满足波动方程.

(3) 当流体密度分布不均匀,存在恒定速度 $v_0$, 或还有别的力作用时, 波动方程有变化, 但我们很少涉及这些问题,在此不予讨论.

(4) 方程 (1-2-7) 和电磁波波动方程一致,故在分析声波问题时可沿用电动力学中一套行之有效的求解方法及概念.

## 1.3 理想流体中的能量关系

声波传播过程中，流体中振动向前传播．此时动能向前传播，流体中各点 $p$、$\rho$ 也发生变化，故内能会有变化．而流体又是在压力作用下产生运动，伴有作功过程．本节将讨论声波能量存在的形式和声能传播过程．

### 一、声能密度

根据能量守恒定律讨论声波具有的能量．

设流体体积 $V_0$，完全静止无声波时 $p_1$、$\rho_1$、$v$ 都是 0，其中 $p = p_0, \rho = \rho_0, v = v_1 = 0$．由于外力作功，建立声场后 $p = p_0 + p_1$，$\rho = \rho_0 + \rho_1$，$v = v_1 \neq 0$．此时流体中增加的能量就是声能．

令 $V_0$ 内质量 $m_0 = \rho_0 V_0$．受外力作功，流体速度提高，动能增加为

$$E_k = \int_0^x dW = \int_0^x m_0 \frac{dv}{dt} dx$$

外力作功使 $V_0$ 内流体运动，流体体积也有变化，密度由 $\rho_0$ 变成 $\rho$，体积变成 $V = m_0/\rho$．状态变化引起流体内能变化，外力使流体运动时，不仅要流体产生加速度，还要克服流体体积变化产生的压力增量，按形变位能公式

$$E_p = -\int_{V_0}^{V} \Delta p dV$$

式中 $\Delta p$——压力增量；$dV = -\frac{V_0}{\rho_0} d\rho$．又根据绝热状态方程 $\Delta p = c^2(\rho - \rho_0)$．

故

$$E_p = -\int_{\rho_0}^{\rho_0+\rho_1} c^2(\rho - \rho_0)\left(-\frac{V_0}{\rho_0}\right) d\rho = \frac{c^2 V_0}{2\rho_0} \rho_1^2$$

按小讯号状态方程．$p_1 = c^2 \rho_1$ 及 $E_p = \frac{V_0}{2\rho_0 c^2} p_1^2$．体积 $V_0$ 内声波总能量为

$$E_t = E_k + E_p = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 V_0 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} V_0$$

流体声能密度 $E = \frac{E_t}{V_0}$，则

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho_0 c^2}. \tag{1-3-1}$$

由上式可知：声场的能量包括流体动能和位能，前者和流体振动速度有关，后者和声压有关．声场能量都是机械能．

### 二、能流密度

声场储蓄能量，声波传播时必然有能量传播．我们用下述几个参量来描述．

能流密度：和能量传播方向相垂的平面内单位面积单位时间通过的能量．这个量是矢量，用 $\omega$ 代表，下面求出 $\omega$ 和 $p$、$v$ 的关系，按能量守恒．

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \omega$$

由 (1-3-1) 式

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho_0 v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

按 (1-2-4)、(1-2-5)、(1-2-6) 式

得

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \nabla \cdot v$$

代人前式

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= -v\nabla p_1 - \frac{p_1}{\rho_0 c^2} c^2 \rho_0 \nabla \cdot v \\ &= -[v\nabla p_1 + p_1 \nabla \cdot v] \\ &= -\nabla(p_1 v)\end{aligned}$$

按能量守恒

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \omega$$

故

$$\omega = p_1 v \tag{1-3-2}$$

由上可知:

(1) 声场能流密度等于 $p_1$ 和 $v$ 之积，和电磁波的玻印亭矢量相似，但 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}$ 的方向和 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 相垂，而 $\omega$ 的方向和 $v$ 一致.

(2) $p_2$、$v$ 都随时间而变，故空间各点 $\omega$ 的方向，数值都随时间变化.

## 三、声波强度

有时人们还用声波强度 $I$ 来表示能流密度对时间的平均值。

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T p_1 v \, dt$$

当声波为正弦波时，$p_1 = p_\sim \cos(\omega t + \Phi)$, $v_1 = v_\sim \cos \omega t$, $I = \frac{p_\sim v_\sim}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \Phi)\cos(\omega t) dt$

$$I = \frac{p_\sim v_\sim}{2} \cos \Phi \tag{1-3-3}$$

即声波强度等于声压，振速幅值及声压振速相位差的余弦三者乘积之半。

## 四、能流密度的一般表示式

根据热力学关系，单位体积流体能量为 $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon$. $\varepsilon$ 是单位质量流体内能。

根据能量守恒

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \omega$$

而

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right] \tag{1-3-4}$$

由连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)=\frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho \boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$$

及尤拉方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)=-\frac{v^2}{2}\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}(-\nabla p)-\rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

按定义

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\nabla v^2$$

及热力学关系 $dH=TdS+Vdp$。若仅讨论单位质量流体 $\rho V=m_0=1$，则 $V=\frac{1}{\rho}$。

故

$$dH=TdS+\frac{1}{\rho}dp$$

则

$$\nabla H=T\nabla S+\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla p=\rho\nabla H-\rho T\nabla S$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)=-\frac{v^2}{2}\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})-\rho \boldsymbol{v}\nabla\left(H+\frac{v^2}{2}\right)+\rho T\boldsymbol{v}\nabla S \tag{1-3-5}$$

由热力学关系 $d\varepsilon=TdS-pdV$，及 $dV=-\frac{1}{\rho^2}d\rho$。因而 $d\varepsilon=TdS+\frac{p}{\rho^2}d\rho$。

按定义

$$H=\varepsilon+pV=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$$

故

$$d(\rho\varepsilon)=\varepsilon d\rho+\rho d\varepsilon=\varepsilon d\rho+\rho TdS+\frac{p}{\rho}d\rho=\rho TdS+Hd\rho$$

对 $t$ 求导

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}=\rho T\frac{\partial S}{\partial t}+H\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

又根据连续方程及绝热关系，则上式成

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}=-\rho T\boldsymbol{v}\nabla S-H\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) \tag{1-3-6}$$

将 (1-3-5)、(1-3-6) 式代入 (1-3-4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t}&=-\frac{v^2}{2}\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})-\rho \boldsymbol{v}\nabla\left(H+\frac{v^2}{2}\right)+\rho T\boldsymbol{v}\nabla S\\&\quad-\rho T\boldsymbol{v}\nabla S-H\nabla(\rho \boldsymbol{v})\\&=-\left(\frac{v^2}{2}+H\right)\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})-\rho \boldsymbol{v}\nabla\left(H+\frac{v^2}{2}\right)\\&=-\nabla\cdot\left[\left(\frac{v^2}{2}+H\right)\rho \boldsymbol{v}\right]\\&=-\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$