FOURIER分析

〔日〕河田龍夫 著

周民强 译

高等教育出版社

FOURIER 分析

〔日〕河田龍夫 著
周民强 译

高等教育出版社

本书根据日本产业图书社出版的河田龍夫著《FOURIER 解析》一书译出，是FOURIER 分析方面的一本入门书。

全书分为十三章，内容以古典 Fourier 分析为主。

本书可作数学专业选修课的教学用书，也可供数学专业和其他有关专业师生及研究生作参考书。

FOURIER分析

〔日〕河田龍夫 著

周民强 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北香河县 印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.875 字数 280,000

1982年8月第1版 1984年1月第1次印刷

印数 00,001—5500

书号 13010·0776 定价 1.80 元

序 言

自 1807 年 Joseph Fourier 在法国科学院倡导所谓 Fourier 级数至今的近两个世纪中，Fourier 级数的理论及其类似体系(Fourier 分析）的研究一直是分析数学领域的一个中心部分. 事实上，它常常成为新概念的源泉. 我想这种情景，在将来还不单是限于原有的分析数学，在其它分支，如抽象理论，代数，数论中也是如此.

Fourier 分析的较新领域，有如概率论的解析研究，广义函数的 Fourier 分析，多重 Fourier 级数与 Fourier 积分等.

不过，本书却不包括上述这些新课题，而只着眼于较全面地介绍古典 Fourier 分析. 奇怪的是，几乎没有一位入门者是了解 Fourier分析概貌的. 虽然已有论述部分Fourier 分析的书刊，但读这些书离全面了解还相去甚远. 在国外也有类似情况. 那末，对初学者来说读些什么书好呢？这一问题还很难回答. 如果只限于 Fourier 级数，倒有几本名著，例如A. Zygmund的《三角级数》，该书可以说是这一分支的一部“圣经”，它几乎详尽地涉及到目前为止的全部古典 Fourier 级数的知识；N. Bary 的《三角级数》也一样，它搜罗了这一方面的古典成果，且与 Zygmund 的书一起堪称“双璧”. 我想，有了这两本书是足够的了. 此外，关于 Fourier 积分以及其它 Fourier 分析的专题也有一些较好的书. 可是初学者把这些书籍当作教科书或者入门书来读，那是过于繁细了. 我想也许正是因为有了优秀的专门著作，致使面向初学者的好书反而不多了.

本书是为那些想知道 Fourier 分析是什么的人而写的，并力图使读者能在一定程度上对古典 Fourier 分析有较广泛的了解.

但说实在的，在这样一本书中，不要说写出全部 Fourier 分析，即使只限于古典的部分，也是不可能的．因而想写而未写入本书的还有：Fourier 级数的发散问题，三角级数的唯一性问题，逼近问题，缺项 Fourier 级数问题，Fourier-Stieltjes 积分论，Laplace 变换，Mellin 变换以及所谓的一般积分变换，广义函数的 Fourier 变换，多元 Fourier 分析以及随机变量(项)的 Fourier 级数论等等．介绍这些内容的意愿，等将来有机会再来实现．

本书是作者 1962—1970 年在美国 (Washington, D.C.) Catholic 大学数学研究生部的讲义以及 1971 年至今年在慶応義塾大学工学院对本科生、硕士、博士等课程所用讲义的基础上写成的，同时参考了各种书籍，特别是 N. Bary, A. Zygmund, E. C. Titchmarsh, K. Hoffman, 洲之内源一郎, G. H. Hardy-W. W. Rogosinski, Y. Katznelson, R. R. Goldberg, P. L. Duren 等人的书(见文献)．在此对协助本书校阅工作的慶応義塾大学工学院数理工学科助教前島信博士、本田郁二博士致以衷心感谢．另外也没少麻烦产业图书社的江面竹彦先生、西川宏先生．如果没有这些先生们的鞭策和勉励，本书尚不知何时才能完成，在此致以深厚的谢意．

1974年12月

河田龍夫

目　录

第一章 预备知识，抽象空间

1.1 线性空间

设X是由抽象的元(素)构成的非空的空间，其元也可以叫做点．对于X中任意两个元x与y，我们定义称为"加"的运算，并设得出的元为z，用$x+y=z$表示．又，对任一元x和任一纯量α，定义称为"数乘"的运算，并设得出元y．这一运算记为$\alpha x=y$．

对于能够定义上述两种运算的空间X，若满足下列公理，我们就称X为**线性空间**．即对任意的$x, y, z\in X$以及任意的纯量α, β

(a) $x+y=y+x$,

(b) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

(c) 存在一个元θ，对任意的元x有$x+\theta=x$,

(d) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

(e) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

(f) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

(g) $1\cdot x=x$,

(h) $0\cdot x=\theta$.

所谓纯量，就是一个数域中的数，这里的数域是指实数系或复数系．

当上述公理中的纯量是实数时，即数乘是实数和元的乘积时，线性空间X就叫做**实线性空间**，而纯量是复数时就叫做**复线性空间**．线性空间也叫做**向量空间**．

在上述公理中，θ称为**零元**．这种θ只存在一个．实际上，若

另外还有一个元 θ'，使得对任一元 x 有 $x+\theta'=x$，则令 $x=\theta$，就有 $\theta+\theta'=\theta$. 而在(c)中，若用 θ' 代替 x，又得 $\theta'+\theta=\theta'$，由(a)可知 $\theta=\theta'$.

我们将 $x+(y+z)$ 写为 $x+y+z$，由(b)可知，这样写法是不会引起混乱的.

又记 $(\alpha x)+(\beta y)=\alpha x+\beta y$.

关于从上述公理引出的各种事实，此处没必要细讲，例如

对任意的纯量 α，有 $\alpha\theta=\theta$. 对任一 $x\in X$ 有 $x+(-1)x=\theta$. $x+(-y)$ 可写为 $x-y$. 此外，还有

$$若\ x+y=x+z,\ 则\ y=z,$$

$$若\ \alpha x=\alpha y,\ \alpha\neq 0,\ 则\ x=y,$$

$$若\ \alpha x=\beta x,\ x\neq\theta,\ 则\ \alpha=\beta.$$

例 1 实数的全体 $\boldsymbol{R}$，采用通常的加、乘，就是实线性空间.

例 2 n 维欧氏空间，即 n 个实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体 $\boldsymbol{R}^n$，用下列运算构成一个实线性空间.

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)\ (\alpha\ 为实数).$$

例 3 复数的全体 $\boldsymbol{C}$，对通常的加、乘构成复线性空间.

例 4 记定义于 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的一切复值连续函数 $x(t)$ 的全体为 $C(a, b)$，用下列运算就构成复线性空间. 设 $x=x(t)\in C(a, b)$，$y=y(t)\in C(a, b)$，定义：

$$x+y=x(t)+y(t),$$

$$\alpha x=\alpha x(t)\ (\alpha 为复数).$$

例 5 在 $\boldsymbol{C}$ 上定义的一切有界连续复值函数所构成的集合，对于与例 4 相同的加、乘（α 为复数）运算是一个复线性空间.

例 6 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上定义的一切实系数多项式全体，对于与

例 4 相同的加、乘(α 为实数)运算构成一个实线性空间.

1.2 内积空间

设 X 为给定的线性空间. 对 X 中任意两个元 x, y, 若有满足下列条件的复数 (x, y) 与它相对应, 则称 X 为**内积空间**, (x, y) 称为**内积**. 设 $x, y, z \in X$,

(a) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$,

(b) $(x, y)=\overline{(y, x)}$,

(c) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$, ($\alpha$为纯量),

(d) $(x, x) \geqslant 0$,

(e) $x=\theta$ 当且仅当 $(x, x)=0$,

其中, $\bar{c}$(c 为复数)表示 c 的共轭复数.

条件(b)称为 Hermite 对称性.

由(b), (c)还可知 $(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y)$.

例 1 设 $X=\boldsymbol{R}^n$, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 其中, $\boldsymbol{R}^n$ 是第 1.1 节中例 2 所述的线性空间(往后, $\boldsymbol{R}^n$ 都是指第1.1 节中例 2 所述的线性空间).

现在, 设 $w_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$ 为确定的 n 个正数, 令

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i w_i, \tag{1}$$

则 $\boldsymbol{R}^n$ 就是实内积空间.

例 2 记 n 个复数组 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全体构成空间为 $\boldsymbol{C}^n$, 则引入通常的加、数乘就成为复线性空间. 现在设 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 为 $\boldsymbol{C}^n$ 的元, 定义

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i. \tag{2}$$

则它是内积, 从而 $\boldsymbol{C}^n$ 是内积空间.

例 3 在 $C(a,b)$ 中，定义 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 的内积为

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt, \tag{3}$$

则 $C(a,b)$ 是内积空间.

定理1.2.1 在内积空间中，有

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y). \tag{4}$$

(4) 中等号成立当且仅当存在不同时为 0 的复数 λ 与 μ，使得 $\lambda x+\mu y=\theta$.

(4) 称为 Schwarz 不等式.

证明 若 $y=\theta$，则 $(x,\theta)=0$（这是因为对任一 α，有 $(x,\theta)=(x,\alpha\theta)=\bar{\alpha}(x,\theta)$），故(4)成立. 因此，只需证明 $y\neq\theta$ 的情形即可.

对任一复数 μ，由公理(d)知

$$(x+\mu y,x+\mu y)\geqslant 0. \tag{5}$$

在左端应用公理(a), (b), (c)，可得

$$\begin{aligned}
&(x,x+\mu y)+(\mu y,x+\mu y)\\
&=\overline{(x+\mu y,\ x)}+\overline{(x+\mu y,\ \mu y)}\\
&=\overline{(x,x)}+\overline{(\mu y,x)}+\overline{(x,\ \mu y)}+\overline{(\mu y,\ \mu y)}\\
&=(x,\ x)+\bar{\mu}\overline{(y,x)}+(\mu y,x)+(\mu y,\mu y)\\
&=(x,x)+\bar{\mu}(x,\ y)+\mu\overline{(x,y)}+|\mu|^2(y,y).
\end{aligned}$$

从(5)知上式是非负的，特别取 $\mu=-(x,y)/(y,y)$ 时，有

$$(x,x)-\frac{(y,x)(x,y)}{(y,y)}-\frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)}+\frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)}\geqslant 0,$$

即

$$(x,x)(y,y)\geqslant(x,y)(y,x).$$

这就是(4).

此外，假定 $|(x,y)|^2=(x,x)\cdot(y,y)$ 成立. 此时若 $y=\theta$，则取 $\lambda=0$ 及任一 μ，可得 $\lambda x+\mu y=\theta$，从而可设 $y\neq\theta$. 于是我们令 $\mu=-(x,y)/(y,y)$，如上所述，有 $(x+\mu y,x+\mu y)=(x,x)-(x,y)\cdot$

$(y,x)/(y,y)$，且根据假定它等于 0. 因此，$x+\mu y=\theta$. 即令 $\lambda=1$ 以及 $\mu=-(x,y)/(y,y)$时，就得到 $\lambda x+\mu y=\theta$.

反之，设 $\lambda x+\mu y=\theta$，且$|\lambda|^2+|\mu|^2\neq 0$. 那末，对 $\lambda\neq 0$，有 $x=-\frac{\mu}{\lambda}y$. 令 $-\mu/\lambda=\alpha$，则

$$
\begin{aligned}
|(x,y)|^2=|(\alpha y,y)|^2=|\alpha|^2(y,y)^2&=(\alpha y,\alpha y)\cdot(y,y)\\
&=(x,x)\cdot(y,y).
\end{aligned}
$$

对 $\mu\neq 0$ 的情形也同样可得到上述等式.

1.3 距离空间，赋范空间

若对空间 X 中任意两个元 x,y，总可定义一实数 $\rho(x,y)$ 且满足下列条件，则称 X 为**距离空间**，$\rho(x,y)$ 称为 x 与 y 的**距离**.

(a) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

(b) $\rho(x,y)\geqslant 0$，

(c) $x=y$ 当且仅当 $\rho(x,y)=0$，

(d) 对任意 $x,y,z\in X$，有

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

例 1 设 X 为任一空间. 若 $x\neq y$，定义 $\rho(x,y)=1$，又 $\rho(x,x)=0$，则 X 就是距离空间.

例 2 在 $\boldsymbol{R}$ 中令 $\rho(x,y)=|x-y|$，则 $\boldsymbol{R}$ 是距离空间.

例 3 记 $\boldsymbol{Q}$ 为有理数全体，在其上定义 ρ 与例 2 相同，则 $\boldsymbol{Q}$ 是距离空间.

例 4 在 $-\infty<a\leqslant t\leqslant b<\infty$ 上的连续函数全体为 $C(a,b)$，在其上定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|. \tag{1}$$

$(x=x(t),\ y=y(t))$则 $C(a,b)$ 构成距离空间.

例 5 在 $C(a,b)$ 中，若定义

$$\rho(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt, \tag{2}$$

则它也是距离空间.

现在设X为线性空间. 若对X的每个元x, 可定义一个实数$\|x\|$并且满足下列条件, 则称此X为**赋范空间**.

(a') $\|x\|\geqslant 0$,

(b') $x=\theta$ 当且仅当$\|x\|=0$,

(c') $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$, ($\alpha$ 为纯量)

(d') $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

这里的$\|x\|$称为x的**范数**.

由(d')直接可以推出

$$|\,\|x\|-\|y\|\,|\leqslant\|x-y\|. \tag{3}$$

赋范空间当用$\rho(x, y)=\|x-y\|$来定义x与y的距离时, 是一个距离空间. 这一事实可从(d')导出的不等式

$$\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|$$

而得知.

设X是内积空间. 当用$\|x\|^2=(x, x)$来定义$\|x\|$时, 它就是一个范数. 这容易从下述推导得知.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y, x+y)\\&=(x, x)+(y, x)+(x, y)+(y, y)\\&\leqslant\|x\|^2+|(y, x)|+|(x, y)|+\|y\|^2\end{aligned}$$

(由定理 1.2.1)

$$\begin{aligned}&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

由此即得(d'). 而(a')～(c')是明显的.

1.4 Banach 空间, Hilber 空间

设X为赋范空间, 现在引入X中点列的收敛概念.

设$\{x_n, n=1, 2, \cdots\}$为X中的点列. 若有X的某一元x, 使得

$$\|x_n-x\|\to 0,\ n\to\infty, \tag{1}$$

则称$\{x_n, n=1, 2, \cdots\}$**收敛于**x.

当$\{x_n\}$收敛于x时, 因为

$$\|x_m-x_n\|\leqslant\|x_m-x\|+\|x_n-x\|,$$

所以有

$$\|x_m-x_n\|\to 0,\ m, n\to\infty. \tag{2}$$

然而反之, 由(2)却推不出(1). 例如, 设P为$[a, b]$($-\infty<a<b<\infty$)上的多项式全体(多项式的系数设为实数). 对$x=x(t)\in P$, 令$\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$, 则$P$是赋范空间. 根据 Weierstrass 定理(此定理在微积分学中是熟知的, 我们在第 5.5 节中还要给予证明)可知, 对任一连续函数$f(t)$, 存在一致收敛于$f(t)$的多项式列. 即存在$x_n(t)\in P$, 使得$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-f(t)|\to 0$. 由此得$\|x_m-x_n\|\to 0$. 但是在$P$中不存在$x=x(t)$使得$\|x_n-x\|\to 0$, 因为此时$f(t)$可以是非多项式的连续函数.

我们称使(2)成立的点列$\{x_n, n=1, 2\cdots\}$为 **Cauchy 列**. 于是上述事实可陈述如下:

收敛列是 Cauchy 列, 反之不然.

若空间中 Cauchy 列必为收敛列, 则称此空间是**完备的**.

完备的赋范空间称为 **Banach 空间**. 另外, 完备的内积赋范空间, 即在内积空间中, 根据$(x, x)=\|x\|^2$定义范数而完备的空间叫做 **Hilbert 空间**.

例 1 C^n(第 1.2 节的例 2)是 Hilbert 空间, 其中内积如第

1.2 节的例 2 中所述. $\boldsymbol{R}^n$ 也是 Hilbert 空间.

例 2 在 $C(a,b)$中, 对$x=x(t)\in C(a,b)$, 令$\|x\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|$, 则易证 $C(a,b)$是 Banach 空间.

例 3 设$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. 记满足$\int_a^b|x(t)|^2dt<\infty$ 的复值函数 $x=x(t)$的全体为 $L^2(a,b)$. 对于 $x(t),y(t)\in L^2(a,b)$, 令

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \tag{3}$$

这就定义了内积, 且 $L^2(a,b)$就成为内积空间. 因此, 令$(x,x)=\|x\|^2$时又成为赋范空间. 而且 $L^2(a,b)$是完备的, 从而又是 Hilbert 空间. 关于 $L^2(a,b)$的完备性后文再讲(定理 3.1.2).

1.5 L^p 空间

先谈谈扩大了的实数系. 在实数系$\boldsymbol{R}$中附加两个元$-\infty$, ∞后构成的集合称为**广义实数系**, 其中, $-\infty$, ∞由下列运算公理所确定.

对任一 $x\in\boldsymbol{R}$ 有$-\infty<x<\infty$. 又对任一实数 x 有

$$x+\infty=\infty,\quad x-\infty=-\infty,$$

$$x\cdot\infty=\infty(x>0),\quad x\cdot\infty=-\infty(x<0),$$

$$x\cdot(-\infty)=-\infty(x>0),\ x\cdot(-\infty)=\infty(x<0).$$

而且

$$\infty+\infty=\infty,\ -\infty-\infty=-\infty,$$

$$\infty\cdot(\pm\infty)=\pm\infty,\ -\infty\cdot(\pm\infty)=\mp\infty.$$

另外, 为方便起见, 规定

$$0\cdot\infty=0.$$

但是$\infty-\infty$是没有定义的.

记此广义实数系为$\overline{\boldsymbol{R}}$. $\overline{\boldsymbol{R}}$中的元, 或是实数, 或是扩大了的实数$\pm\infty$. 因而说到广义的正实数, 非负数等, 其意义是自明的.