高等学校试用教材

核物理中的群论方法

于祖荣 编著
潘桢镛 审校

原子能出版社

高等学校试用教材

核物理中的群论方法

（初　版）

于祖荣　编著
潘桢镛　审校

原　子　能　出　版　社

(京)新登字 077 号

内 容 简 介

本书前四章介绍了群和群表示论的基本知识，鉴于核物理的需要，仅介绍置换群、Lie 群和 Lie 代数方面的内容。其中，关于用双陪集技术计算置换群 CG 系数和外积约化系数的方法、线性 Lie 群的混合张量表示和它的应用，以及用 Schur 函数方法导出经典 Lie 群的分支规则等方面的系统讨论作为一本书的内容尚属首次。后两章介绍群论在核物理中的应用，特别介绍了广义相干态的应用；在此，我们还详细讨论了算符的 Dyson 实现及其 Holstein-Primakoff 实现间的变换理论，澄清了文献上某些含混的陈述。

本书可作为核物理专业教材，亦可供从事核物理、凝聚态物理和理论物理研究的人员参考。

本书由潘桢镛主审，经原子核物理教材委员会核理论课程组于 1990 年 2 月由吴治华主持召开的审稿会审定，同意作为高等学校试用教材。

高等学校试用教材
核物理中的群论方法
(初版)
于祖荣 编著
潘桢镛 审校
原子能出版社出版
(北京 2108 信箱)
北京地质印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行・新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16・印张 21・字数 524 千字
1993 年 5 月北京第一版・1993 年 5 月北京第一次印刷
印数 1—1000
ISBN 7-5022-0677-9
TL・413(课)定价：5.60 元

前　言

这本书主要是向核物理学工作者显示群表示论在核物理领域有广阔的应用而写的。当然也可供想知道群表示论这一有力的理论方法和结果的其它领域的工作者参考。关心群论的物理学家实际只对与应用有关的一些问题感兴趣。例如：

（a）什么是合适的群或群链？

（b）一给定群存在什么样的表示？

（c）群G的一个表示Γ如何约成子群H的不可约表示γ_1？

（d）Kronecker 乘积$\Gamma_1\otimes\Gamma_2$如何约成不可约表示$\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\cdots\oplus\gamma_n$？

（e）$\Gamma_1\otimes\Gamma_2$的 Clebash-Gordan 系数如何计算？等等。

这些也就是写这本书的基本思路和选材的基本依据。当然，限于我的知识，在行文未必很好地体现了这些要点。

虽然我的意愿是数学上力求严密，但一本书既要在数学上很严密，物理应用又十分广泛，的确是很困难的。因此，故意略去了许多证明以及行文太长而又不会影响对主题发展理解的技术细节，代之以用许多例子和应用来印证结果。

书中对下述内容作了比较系统地介绍：用双陪集技术计算置换群的 CG 系数和外积约化系数的方法，系统地叙述经典线性 Lie 群混合张量表示的理论和应用，用 Schur 函数法导出经典 Lie 群的分支规则等等。

在应用领域中，本书除一般地讨论了量子理论中的对称性问题外，还特别介绍了广义相干态理论在核物理上的应用；还详细讨论了算符的Dyso'n实现与 Holstein-Primakoff 实现之间的变换，对文献上的某些陈述作了说明。

至今，群论书已有许多，近来国内也出版了一些好书，例如：韩其智、孙洪洲的《群论》，陈金全的《群表示论的新途径》，陶瑞宝的《物理学中的群论》以及马中骐、戴安英的《群论及其在物理学中的应用》等等。它们都各有长处与特色，都是写这本书的很好的借鉴。

本书的材料主要是我在南京大学和同济大学多年使用的讲稿的基础上写成的。在初稿完成后曾送胡济民教授和金星南教授等审阅。

在此，我要感谢周孝谦、孙洪洲、王国荣、潘桢镛、吴治华、施义晋、裘志洪、傅德基和曹雨芳诸教授，他们在阅读初稿时提出了许多批评和建议。特别是潘桢镛教授，他耐心详细地阅读了全部手稿，订正了许多错误和不妥之处。所有这些对于修改初稿都给予了很大帮助。

限于作者水准，书中难免会有许多错误和不妥之处，热忱欢迎大家批评指正。

最后，还要感谢胡济民教授、吴治华教授、核工业总公司的贺兴章同志以及原子能出版社的同志，他们为出版本书做了许多有益的工作。

于祖荣
上海同济大学
1993 年 2 月

目　录

前言
第一章　群和群表示论的基本知识 …… 1
1.1　抽象群的定义 …… 1
1.1-1　物理学中的对称性原理 …… 1
1.1-2　抽象群的定义 …… 3
1.2　群的重要概念 …… 7
1.2-1　子群和陪集 …… 7
1.2-2　共轭元素类和不变子群 …… 9
1.2-3　同构与同态 …… 13
1.2-4　直乘积群 …… 14
1.3　矢量空间和线性算符 …… 14
1.3-1　矢量空间 …… 14
1.3-2　内积空间 …… 16
1.3-3　线性算符 …… 23
1.4　群表示论的基本概念 …… 24
1.4-1　群表示的定义 …… 24
1.4-2　可约表示和不可约表示 …… 25
1.4-3　有限群表示的定理和群表示的特征标 …… 25
1.4-4　群论与量子力学 …… 28
1.5　有限群的投影算符和 CG 系数 …… 30
1.5-1　投影算符 …… 30
1.5-2　有限群的 CG 序列和 CG 系数 …… 32
1.5-3　不可约张量和 Wigner-Eckert 定理 …… 38
1.5-4　Racah 分解定理 …… 39
1.5-5　外直积群的表示 …… 40
1.6　群代数 …… 40
1.6-1　定义 …… 40
1.6-2　有限群的正则表示 …… 41
1.6-3　群代数的分解 …… 42
1.6-4　幂等元素 …… 44
1.6-5　简单矩阵代数 …… 45
1.6-6　群代数双边理想的性质 …… 46
本章提要 …… 48
习题 …… 54
第二章　置换群 …… 56
2.1　置换群的正则表示 …… 56
2.1-1　循环置换 …… 56

2.1-2 置换群的类 ……56
2.1-3 Young 算符和正则表示 ……58
2.1-4 计算S_n群不可约表示的特征标 ……66
2.2 置换群的 CG 系数 ……68
2.2-1 置换群的内积 ……68
2.2-2 置换群的 CG 系数 ……68
2.2-3 $S_n \supset S_{n-1}$的约化系数的计算 ……69
2.2-4 CG 系数的性质 ……72
2.3 置换群的外积和非正则表示 ……75
2.3-1 Littlewood 规 则 ……75
2.3-2 表象变换 ……77
2.3-3 置换群的外积耦合系数 (OPCC) ……79
本章提要 ……85
习题 ……86
第三章 Lie 群基础 ……87
3.1 Lie 群概念 ……87
3.1-1 Lie 群的定义 ……87
3.1-2 一般线性群 $GL(n,C)$ 及其子群 ……89
3.1-3 Lie 群参数空间的连通性和紧致性 ……92
3.1-4 紧致 Lie 群的不变积分 ……94
3.2 线性变换群$Gl(n,C)$的张量表示 ……95
3.2-1 一般线性群 $GL(n,C)$ 的张量表示 ……95
3.2-2 酉群的张量表示 ……102
3.2-3 正交群的张量表示和旋量表示 ……105
3.2-4 辛群的张量表示 ……111
3.2-5 经典 Lie 群的约化规 则 ……112
3.3 U群的正则和非正则子群链 ……118
3.3-1 U群的正则子群链 ……118
3.3-2 U群的 Kronecker 乘积和 CG 系数 ……120
3.3-3 $SU(n)$群的约化系数和母分系数 ……122
3.3-4 $SU(nm)\downarrow SU(n)\otimes SU(m)$和$SU(n+m)\downarrow SU(n)\times SU(m)$的约化系数 ……124
3.4 Lie 群的局部性质 ……130
3.4-1 Lie 群的无穷小生成元素 ……130
3.4-2 Lie 群的结构常数 ……138
本章提要 ……145
习题 ……148
第四章 Lie 代数概要 ……150
4.1 Lie 代数的基本概念 ……150
4.1-1 Lie 代数的定义 ……150
4.1-2 Lie 代数的一般概念 ……151
4.1-3 Lie 代数与 Lie 群的关系 ……156

4.2 复半单 Lie 代数的结构 …… 157
4.2-1 复半单 Lie 代数的标准形式 …… 157
4.2-2 复半单 Lie 代数的根系和根图 …… 160
4.2-3 复半单 Lie代数的素根和 Dykin图 …… 165
4.2-4 Chevalley 基 …… 173
4.3 半单 Lie 代数的表示 …… 175
4.3-1 权和权空间 …… 175
4.3-2 半单 Lie 代数的基础权系 …… 176
4.3-3 Kronecker 乘积表示和 CG 系数 …… 183
4.3-4 半单 Lie 代数 Casimir 算符的本征值 …… 193
4.4 Lie 代数的物理应用举例 …… 196
4.4-1 三维谐振子 …… 196
4.4-2 Coulomb 问题 …… 200
本章提要 …… 211
习题 …… 217
第五章 群论与核模型 …… 218
5.1 群论在核壳模型计算中的应用 …… 218
5.1-1 核壳模型概要 …… 218
5.1-2 壳模型态的 U 群分类 …… 220
5.1-3 $U(4r)\supset U(r)\otimes U(4)$ 的分类基 …… 226
5.2 谐振子壳模型 …… 229
5.2-1 谐振子壳模型中的核态 …… 229
5.2-2 粒子-空穴组态 …… 234
5.3 Elliott 模型 …… 240
5.3-1 四极-四极相互作用 …… 240
5.3-2 Elliott 波函数 …… 242
5.4 群论与 Bohr-Mottelson 模型(BBM) …… 245
5.4-1 BBM 的基本思想 …… 245
5.4-2 BBM 的群论处理 …… 249
5.5 相互作用玻色子模型(IBM) …… 251
5.5-1 IBM-1(不区分中子和质子 Boson) …… 251
5.5-2 IBM-2(质子-中子 IBM) …… 260
5.5-3 IBM 的微观基础 …… 264
本章提要 …… 268
第六章 相干态理论及其在核物理中的应用 …… 271
6.1 Glauber 相干态 …… 271
6.1-1 Glauber 相干态的定义和性质 …… 271
6.1-2 Glauber 相干态的应用举例 …… 274
6.2 广义相干态 …… 281
6.2-1 广义相干态的定义和性质 …… 281
6.2-2 广义相干态与 Boson 展开 …… 287
6.3 矢量相干态(VCS)理论 …… 296

6.3-1 矢量相干态定义和性质 …… 296
6.3-2 $SU(3)$群的 VCS 理论 …… 298
6.4 量子动力学方程的相干态实现 …… 302
6.4-1 定态 Schrödinger 方程的相干态实现 …… 302
6.4-2 与时间有关的 Schrödinger 方程的相干态实现 …… 306
本章提要 …… 311
符号表 …… 315
主要名词英汉对照 …… 318
参考文献 …… 321
索引 …… 325

第一章　群和群表示论的基本知识

1.1　抽象群的定义

1.1-1　物理学中的对称性原理

物理学，包括核物理学在内为什么需要群论知识？对此，先作一概要叙述。

先看看经典物理。经典物理的态是由坐标 $\boldsymbol{r}$ 和动量 $\boldsymbol{p}$ 的瞬时值确定的，而物理量则是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的函数 $F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$，$t$ 是时间。从数学观点看，这些都是数，所以经典物理包含的内容是研究数与数之间的函数关系

$$\text{数}\xrightarrow{\text{函数}}\text{数} \tag{1.1}$$

研究这类函数关系的数学工具主要是微积分学。

但是量子力学中的态，由于满足叠加原理，故它的完备组可以生成一线性矢量空间(态矢量空间)，于是对量子力学态的性质的研究等价于对线性空间的结构和性质的研究。

另外，从量子力学的态的知识可以得到力学量测量值的分布几率，后者当然是‘数’。所以，态与物理量之间的关系已不再是简单的函数关系了。而可认为这两者间的关系是一种泛函关系。所以，量子力学的数学问题可归纳为：

$$\text{线性空间}\xrightarrow{\text{算符}}\text{线性空间} \tag{1.2a}$$

$$\text{线性空间}\xrightarrow{\text{泛函}}\text{数} \tag{1.2b}$$

(1.2)式是量子力学的基本数学框架，而构造这一框架的全过程与我们要讨论的主题——“群论”密切相关。

为说明这一点，令 $|\phi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 是态矢量空间的两个态，(1.2a)则可具体表为

$$|\phi\rangle=\hat{Q}|\psi\rangle$$

由于考虑到叠加原理和几率流守恒，要求算符 $\hat{Q}$ 是线性的和幺正的，

$$\hat{Q}(c_1|\psi_1\rangle+c_2|\psi_2\rangle)=c_1\hat{Q}|\psi_1\rangle+c_2\hat{Q}|\psi_2\rangle,\quad c_1,c_2\in\mathscr{C}$$

$$\hat{Q}^+\hat{Q}=\hat{Q}\hat{Q}^+=1$$

这里 $\mathscr{C}$ 代表复数域。假定 $\hat{Q}$ 还满足

$$[\hat{\boldsymbol{H}},\hat{Q}]=0 \tag{1.3}$$

则称 $\hat{Q}$ 是对称操作(对称变换)。这一类操作在物理学上是主要操作。

例如考虑时空变换下量子力学系统的变换性质。假定讨论的是单粒子系统，$\boldsymbol{r}$ 是粒子的位置矢量，设存在一个变换 $\boldsymbol{S}$ 使

$$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{S}\boldsymbol{r} \tag{1.4}$$

假定 $\boldsymbol{S}$ 是非奇异的，则存在逆变换 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}'$。

令 $\psi(\boldsymbol{r})$ 是单粒子的波函数。显然，对应变换(1.4)，我们有

$$\psi'(\boldsymbol{r}')=\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.5}$$

另外，也可以定义一个算符 $\hat{\boldsymbol{P}}_s$，使

$$\psi'(\boldsymbol{r}')=\hat{\boldsymbol{P}}_s\psi(\boldsymbol{r}') \tag{1.6}$$

比较(1.5) 和 (1.6)式，我们有$\hat{\boldsymbol{P}}_s\psi(\boldsymbol{r}')=\psi(\boldsymbol{r})$， 再用逆变换 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}$，则$\hat{\boldsymbol{P}}_s\psi(\boldsymbol{r}')=\psi(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}')$。或

$$\hat{\boldsymbol{P}}_s\psi(\boldsymbol{r})=\psi(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}) \tag{1.7}$$

这是一个重要的等式，它决定了当坐标按(1.5)式变换时，波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$的变换规则。

例 1.1 考虑无限小平移 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{a}$，则

$$\psi(\boldsymbol{r}-\delta\boldsymbol{a})=\psi(\boldsymbol{r})-(\delta\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\psi(\boldsymbol{r})=(1-\delta\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\psi(\boldsymbol{r})$$

因此(1.7)式中的 $\hat{\boldsymbol{P}}_s$ 现为

$$\boldsymbol{T}_{\delta a}=1-\frac{i}{\hbar}(\delta\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}) \tag{1.8}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 为动量算符。若为有限移动 $\boldsymbol{a}$，则有

$$\boldsymbol{T}_a=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})\right] \tag{1.9}$$

如果空间是均匀的，则有

$$[\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{T}_a]=0 \quad 或 \quad [\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{p}}]=0 \tag{1.10}$$

(1.10)式后一等式即为量子力学中的动量守恒的内容。

例 1.2 考虑无限小空间转动

$$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r} \tag{1.11}$$

这里矢量 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的长度代表转角 $\delta\varphi$，方向代表转轴方向。

由$\psi(\boldsymbol{r}-\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r})=(1-\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot(\boldsymbol{r}\times\nabla))\psi(\boldsymbol{r})$，立即可知

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\delta\varphi}=\left[1-\frac{i}{\hbar}(\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})\right] \tag{1.12}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 为角动量算符。

对有限转动，容易导得

$$\boldsymbol{R}_n(\omega)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})\right] \tag{1.13}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{\omega}$ 为有限转角，$\boldsymbol{n}$ 为沿转轴的单位矢量。

如果空间是各向同性的，则有

$$[\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{L}}]=0 \tag{1.14}$$

即系统角动量守恒。

例 1.3 令N个全同粒子系统的Hamiltonian为

$$\hat{\boldsymbol{H}}=-\frac{\hbar^2}{a\mu}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}V(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|) \tag{1.15}$$

令 $\hat{p}$ 代表粒子之间的任意置换，则显然有

$$[\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{p}}]=0 \tag{1.16}$$

即全同粒子系统在置换操作下是不变的。

从考虑对称性入手往往可以不直接求解 Schrödinger 方程就可得到一些甚至全部所必要的知识，这样可避免或减轻繁重的计算任务。

例 1.4　(1.16)式表示哈密顿量 $\hat{H}$ 与置换算符之间有共同的本征函数，设为 $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$。显然，$|\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots \boldsymbol{r}_N)|^2$对任意置换是不变的。因此

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{ij}\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\boldsymbol{r}_N)=\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_N)$$
$$=\lambda\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\boldsymbol{r}_N)$$

λ 是模为 1 的常数。重复置换 i，j 一对坐标

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{ij}^2\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}\cdots\boldsymbol{r}\cdots\boldsymbol{r}_N)=\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\cdots\boldsymbol{r}_N)$$
$$=\lambda^2\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\boldsymbol{r}_N)$$

所以 $\lambda^2=1$，或 $\lambda=\pm1$。于是

$$\boldsymbol{p}_{ij}\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\boldsymbol{r}_N)$$
$$=\pm\psi(\boldsymbol{r}_1,\cdots\boldsymbol{r}_i\cdots\boldsymbol{r}_j\cdots\boldsymbol{r}_N) \tag{1.17}$$

上式后方取正号时，称 ψ 为对称的，取负号时，称 ψ 为反对称的。即是说全同粒子系统的波函数不是对称的就是反对称的，可用 ψ_s 和 ψ_A 分别标记它们。这就是说全同粒子系统波函数是按置换对称性进行分类的。

显然 ψ_s 和 ψ_A 也是 $\hat{H}$ 的本征函数。

例 1.5　令 $\hat{I}$ 代表坐标空间反演算符

$$\hat{I}\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_N)=\psi(-\boldsymbol{r}_1\cdots-\boldsymbol{r}_N) \tag{1.18}$$

如果哈密顿量对空间反演是不变的，即$[\hat{H},\hat{I}]=0$，则 $\hat{H}$ 和 $\hat{I}$ 有共同本征函数，设为 $\psi(\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_N)$。显然 $\hat{I}\psi$ 也是H的本征函数，且与 ψ 有相同本征值。将 ψ 和 $\hat{I}\psi$ 重新组合成

$$\begin{aligned}\psi_e&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi+\boldsymbol{I}\psi)\\ \psi_0&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi-\boldsymbol{I}\psi)\end{aligned} \tag{1.19}$$

易知

$$\hat{I}\psi_e=\psi_e,\quad \hat{I}\psi_0=-\psi_0 \tag{1.20}$$

ψ_e 和 ψ_0 分别称为具有偶和奇宇称的波函数。于是波函数按其空间反演对称性实现了分类。

例 1.6　我们知道电偶极跃迁的几率与矩阵元$\left|\left\langle\psi_f\left|\sum\limits_i e\boldsymbol{r}_i\right|\psi_i\right\rangle\right|^2$有关。因此如果初态和末态同时为正宇称态或负宇称态，则电偶极跃迁几率为零。即对称性提供了精确的跃迁选择定则。

从上面的例子，可以看出对称操作（式对称变换）在量子物理中的重要作用。下面可看到同类操作集合成“群”。因此群编成了量子物理的重要的数学工具。

1.1-2　抽象群的定义

设G为一组元素 a，b，c，…的集合，记为$G=\{a,b,\cdots\}$。对集合中任意一对元素 a 和 b 定义乘积$a\circ b$，在这样定义的乘积下，如果集合 G 满足下列四条公理则构成一个群。

（1）封闭性。若 $a\in G$，$b\in G$　则 $a\circ b\in G$

（2）结合律。若 $a,b,c\in G$；则 $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$；

（3）存在唯一的单位元素 e（恒等元），使

$$e\circ a=a\circ e=a,\ a\in G$$

（4）对应于群中每一个元素 a，$a\in G$，必存在唯一的逆元素 a^{-1}，$a^{-1}\in G$，使

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$$

$a,b,c\cdots$ 称群元素（群元）。在 1.1-2 中列举的诸对称操作显然都满足群定义的四条公理，因此都构成了一个群，称为对称群。详细再看后面**例 1.11** 和**例 1.12**。

例 1.7 实数的加法群和乘法群

若规定数的普通加法为群的“乘法”，则包括数零在内的全部实数构成实数加法群：零为单位元素，$-a$ 为实数 a 的逆元素。

除去数零，且规定数的普通乘法为群的“乘法”，则全体实数构成实数乘法解：数 1 为单位元素，数 $1/a$ 为实数 a 的逆元素。

例 1.8 矩阵群

考虑矩阵集合

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_4=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}_5=\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}_6=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} \tag{1.21}$$

规定普通的矩阵乘法为群的乘法，则上述集合构成矩阵群：$\boldsymbol{M}_1$ 为单位元素，逆矩阵（$\boldsymbol{M}_i$ 的行列式不为零，故逆矩阵存在）$\boldsymbol{M}_i^{-1}$，$i=1,2,\cdots,6$ 为逆元素。容易验证 $\boldsymbol{M}_i^{-1}=\boldsymbol{M}_i(i=1,2,3,4)$，$\boldsymbol{M}_5^{-1}=\boldsymbol{M}_6$，$\boldsymbol{M}_6^{-1}=\boldsymbol{M}_5$。

例 1.9 D_3 群：保持正三角形 $\triangle ABC$ 不变的纯转动*集合。D_3 群的元素有，

例 1.10 空间反演群

在**例 1.5** 中已详细讨论过，它的元素为$\{e,\hat{\boldsymbol{I}}\}$。

例 1.11 实三维转动群。一般转动操作记为（见 1.13 式）

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_n(\omega)\boldsymbol{r} \tag{1.22}$$

其中 ω 为转角，$\boldsymbol{n}$ 为通过原点的转轴方向的单位矢量。容易导出

$$\boldsymbol{R}_n(\omega)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cos\omega+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})(1-\cos\omega)+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}\sin\omega \tag{1.23}$$

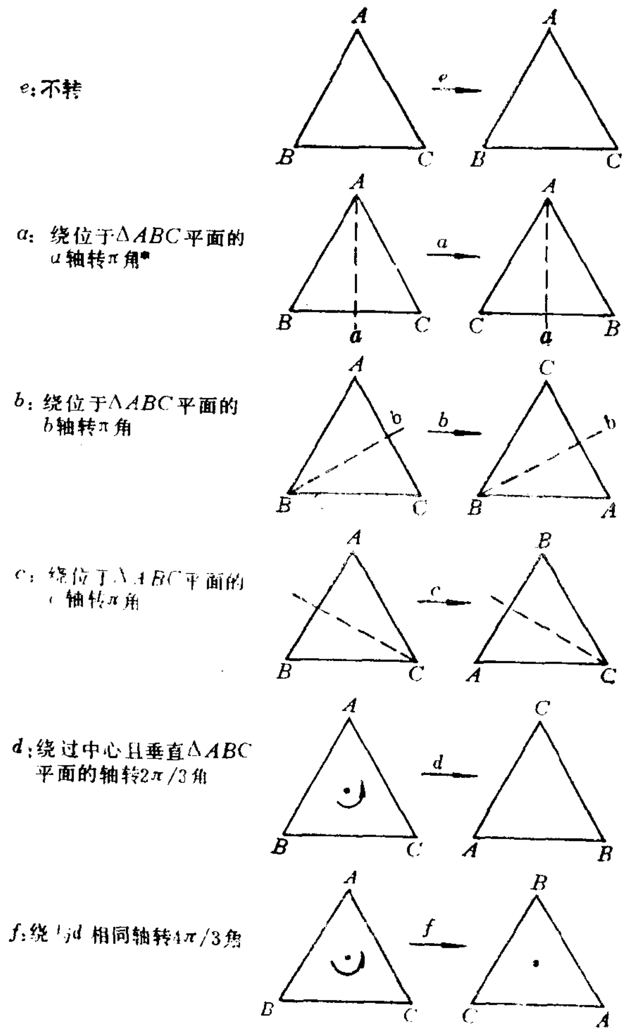
$\boldsymbol{R}_n(\omega)$ 的逆转动为绕 $\boldsymbol{n}$ 轴转 $-\omega$ 角的转动（即顺时针方向转 ω 角），它等价于绕 $-\boldsymbol{n}$ 轴的正转动 ω 角，

$$\boldsymbol{R}_n^{-1}(\omega)=\boldsymbol{R}_n^{-1}(-\omega)=\boldsymbol{R}_{-n}(\omega) \tag{1.24}$$

若将先实行绕 $\boldsymbol{n}$ 轴转 ω 角，接着绕 $\boldsymbol{n}'$ 轴转 ω' 角的合操作 $\boldsymbol{R}_{n'}(\omega)\boldsymbol{R}_n(\omega)$ 作为群乘法的定义，则绕通过 O 点所有轴线的转动构成一个群，称为三维转动群：单位元素是 $\omega=0$ 的转动，即不转，逆转动为 $\boldsymbol{R}_n(\omega)$。代表三维转动群的符号，记作 $SO(3)$ 或 $R(3)$。

---

* 规定以右手法则为正转动，即以大姆为转轴方向，其余手指所示的逆时针方向的转动为正转动，以后若不另作说明均指正转动。



定轴转动是它的特殊情形，设 u 是定轴．此时有

$$\boldsymbol{R}_u(\omega)\boldsymbol{R}_u(\omega') = \boldsymbol{R}_u(\omega+\omega') = \boldsymbol{R}_u(\omega')\boldsymbol{R}_u(\omega)$$

即是说对定轴转动有$[\boldsymbol{R}_n(\omega), \boldsymbol{R}_n(\omega')]=0$　而一般转动$[\boldsymbol{R}_n(\omega), \boldsymbol{R}_{n'}(\omega')]\neq 0$。

例 1.12　置换群 S_n

在**例 1.3** 中已指出全同粒子系统有置换对称性。若有 n 个粒子，则共有 $n!$ 个置换，它们全体构成置换群 S_n。下面仔细讨论 S_n 的定义．

设有 n 个数$\{1,2\cdots n\}$，按先后次序将它们排成$(1,2,3\cdots n)$。现通过置换将它们重新编排成$(p_1,p_2\cdots p_n)$，这里的 p_i，$i=1$，$2\cdots n$，是$\{1,2\cdots n\}$中的某一个数，而 p_1，$p_2\cdots p_n$是全不相同的。这类重新编排次序的操作称为置换操作，记为

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ p_1 & p_2\cdots p_n \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

它的含义是将数 1 换为 p_1，2 换为p_2 等等。显然

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\cdots n \\ p_1 & p_2 & p_3\cdots p_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & n\cdots 2 & 1 \\ p_3 & p_n\cdots p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

即在 p 中只要保持 i 和 p_i 之间的对应关系，次序是不重要的。设 q 是另一个置换操作，

$$q=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ q_1 & q_2\cdots q_n\end{pmatrix}$$

定义乘积 pq 为

$$pq=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ p_1 & p_2\cdots p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ q_1 & q_2\cdots q_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}q_1 & q_2\cdots q_n\\ p_{q_1} & p_{q_2}\cdots p_{q_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ q_1 & q_2\cdots q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ p_{q_1} & p_{q_2}\cdots p_{q_n}\end{pmatrix}$$

在这样定义的乘法下，$n!$ 个置换操作构成置换群 S_n：单位元素是恒等置换$\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ 1 & 2\cdots n\end{pmatrix}$，元素 p 的逆元 素 $p^{-1}=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\cdots p_n\\ 1 & 2\cdots n\end{pmatrix}$。

一般$[p,q]\neq 0$，例如 S_3 群的元素为

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

直接验算可知 $p_1p_2=p_4$，但 $p_2p_1=p_5$。

从群的定义和上面列举的例子，可进一步作如下一些说明：

1．群元素的数目可能是有限的也可能是无限的。

前者称有限群，后者称无限群。有限群元素的数目称为群的阶（order），记为$|G|$。如例1.8，例 1.9，例 1.10 和 例1.12 为有限群，它们的阶分别为 6，6，2 和 $n!$；例 1.7 是可数无限群；例 1.11 是连续群，因为我们总可以选择一个过原点 O 的右手坐标系 $OXYZ$，在此坐标系中用二个角度（φ,ϕ）标记转轴 $\boldsymbol{n}$ 的空间方位：$(n_1,n_2,n_3)=(\sin\varphi\cos\phi,\sin\varphi\sin\phi,\cos\varphi)$，则$SO(3)$群的元素 $\boldsymbol{R}_n(\omega)=\boldsymbol{R}(\varphi,\phi,\omega)$ 将随三个参数（φ,ϕ,ω）连续变化，所以是一个连续群。

实际上一个群 G 的元素总可以用符号 g_α 来标记。对 n 阶有限群，指标 $\alpha=1, 2,\cdots, n$；对可数无限群，α 取无限个分立值；对连续群，α 为连续变化的参数，此时群元素可改记为 $g(\alpha)$。显然，α 可以代表一个或多个连续参数，如 $SO(3)$ 群的元素 $R(\varphi,\phi,\omega)$ 就有三个参数。

2．一般群的乘法不满足交换律$[g_\alpha,g_\beta]\neq 0$，如 $SO(3)$ 群和 S_n 群。

如果群 G 中任意两个元素恒有$[g_\alpha,g_\beta]=0$，则称它为 Abel 群。最简单的 Abel 群是所谓循环群，它是由单位元素 e 和一个确定元素 a 的幂次组成。如果 m 是使 $a^m=e$ 的最小正整数，则该循环群是有限阶的，它的元素集合为$\{e,a,a^2,\cdots,a^{m-1}\}$ 若这样的 m 不存在则它是可数无限阶群。例如空间反演群是 2 阶循环群。

3．对有限群总可以列出一张记载每对元素乘积的表，从这张表可以了解群结构的全貌。

例如空间反演群和 D_3 群的乘法表如下：

表 1.1 空间反演群的乘法表

	e	I
e	e	I
I	I	e

表 1.2 D_3 群的乘法表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

注意：**例 1.8** 的乘法表与 D_3 群是相同的，只要作替换：$e \longrightarrow M_1$，$a \longrightarrow M_2$，$b \longrightarrow M_3$，$c \longrightarrow M_4$，$d \longrightarrow M_5$ 和 $f \longrightarrow M_6$，表 1.2 变为**例 1.8** 中矩阵群的乘法表。

从表 1.1 和 1.2 看到，表中每一行（列）中的元素是全不相同的，这是一般规则，可表述为下列定理：

定理 1.1 （群的重排定理）设 $g \in G$ 是 G 中任一元素，则 $g \circ G = G$ 和 $G \circ g = G$。这里记号 $g \circ G = \{g \circ x | x \in G\}$ 和 $G \circ g = \{x \circ g | x \in G\}$。

证 由 $g \in G$ 及 $x \in G$ 知 $g^{-1} \in G$ 及 $g^{-1} \circ x \in G$，所以存在 $y \in G$ 使得 $g^{-1} \circ x = y \Rightarrow x = g \circ y \in g \circ G$，即是说 G 中任何元素都包含在 $g \circ G$ 中，亦即 $G \subset g \circ G$。另若 $g \circ x \in g \circ G$，则由于 $g \in G$，$x \in G \Rightarrow g \circ x \in G$，所以 $g \circ G \subset G$，$\Rightarrow g \circ G = G$，同理可证 $G \circ g = G$。

对有限群我们可将群元素进行编号 $\{g_1 g_2 \cdots g_n\} = G$，那么该定理表示 $g \circ G$ 和 $G \circ g$ 只是把原来顺序重新编排成 $\{g \circ g_1, g \circ g_2 \cdots g \circ g_n\}$ 和 $\{g_1 \circ g, g_2 \circ g, \cdots g_n \circ g\}$，所以称为重排定理。

1.2 群的重要概念

1.2-1 子群和陪集

1. 子群

设 H 是群 G 的一个子集，$G \supset H$。若在群 G 定义的乘法下 H 也构成一个群，则称 H 为 G 的子群，记为 $G \supset H$。

按定义，单位元素及 G 本身是群 G 的显然子群，也称平庸子群。除平庸子群之外的子群称真子群。在以后的讨论中均指后者。

定理 1.2 群 G 的非空子集 H（即 H 至少有一个元素）成为子群的充要条件是：(1)

如果 $h_\alpha, h_\beta \in H$，则 $h_\alpha \circ h_\beta \in H$；（2）如果 $h \in H$，则 $h^{-1} \in H$。

证 如果H是子群，则条件（1）和（2）显然成立。反之假定群G的非空子集H满足条件（1）和（2），则H满足群的公理。实际上条件（1）和（2）相当于前面讲到的公理（1）和（4），而公理（2）自然满足。因为结合律在G中成立。所以在H中也成立。最后，看看公理（3）。因H是非空的，所以存在 $h \in H$，因此由条件（2）应有 $h^{-1} \in H$。再用条件（1）又得出 $h \circ h^{-1} = e \in H$，可见H也满足群公理（3）。于是定理得证。

例 1.13 从乘法表（1.2）易知 $H = \{e, d, f\}$ 是 D_3 群的子群。

例 1.14 定轴转动群 $SO(2)$是 $SO(3)$的子群

2. 陪集

设H是G的子群 $G \supset H$，又设 $g_\alpha \in G$ 但 $g_\alpha \notin H$，则称集合 $g_\alpha H = \{g_\alpha \circ h \mid h \in H\}$ 为子群H的左陪集，而 $Hg_\alpha = \{h \circ g_\alpha \mid h \in H\}$为子群$H$的右陪集。一般 $g_\alpha H \neq Hg_\alpha$。

例 1.15 D_3 群的子群 $H = \{e, d, f\}$，它的左陪集为 $aH = \{a, b, c\}$，右陪集 $Ha = \{a, c, b\}$。所以此时左陪集与右陪集相等。

定理 1.3 （陪集定理）子群H的两个右陪集（左陪集），或者有完全相同的元素，或者完全没有公共元素。

证 设 $g_a, g_b \in G$，但 $g_a, g_b \notin H$。考虑两个右陪集 Hg_a 和 Hg_b，假定它们有一个公共元素 $h_\alpha \circ g_a = h_\beta \circ g_b$，$\rightarrow g_b \circ g_a^{-1} = h_\beta^{-1} \circ h_\alpha \in H$，按群的重排定理，$h_\gamma \circ g_b \circ g_a^{-1}$ 当 h_γ 取遍H所有元素时将给出群H的所有元素一次且仅仅一次，所以右陪集 $(h_\gamma \circ g_b \circ g_a^{-1}) \circ g_a = h_\gamma \circ g_b$ 与 $h_\gamma \circ g_a$ 重合，即若陪集 Hg_a 和 Hg_b 相交必全等，除非不相交。

定理 1.4 （Lagrange 定理）有限群G的子群H的阶$|H|$一定整除G的阶$|G|$。

证 取 $g_1 \in G$ 但 $g_1 \notin H$，作左陪集 $g_1 H$，如果 H和 $g_1 H$ 未穷尽整个群G，则再取 $g_2 \in G$ 但 $g_2 \notin H$ 和 $g_2 \notin g_1 H$，作左陪集 $g_2 H$。由陪集定理知 $g_2 H$ 与H和 $g_1 H$ 不相交。如此继续下去，因群G是有限阶的，所以经有限步骤后手续必能终止，使群G的所有元素分属于左陪集串$\{H, g_1 H, g_2 H, \cdots, g_l H\}$，即

$$G = \sum_{i=1}^{l} \oplus g_i H, g_i \in G, g_1 = e \tag{1.26}$$

所以$|G|/|H| = l$（正整数）。同理可证

$$G = \sum_{i=1}^{l'} \oplus H g'_i, g'_i \in G, g'_1 = e \tag{1.27}$$

而$|G|/|H| = l'$

例 1.16 $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$，$H = \{e, d, f\}$所以

$$\begin{aligned} D_3 &= e\{e, d, f\} \oplus a\{e, d, f\} \\ &= \{e, d, f\} \oplus \{a, b, c\} \end{aligned}$$

3. 双陪集

设 H_1 和 H_2 是群G的两个子群，则集合$\{h_\alpha \circ g \circ h'_\mu \mid h_\alpha \in H_1, h'_\mu \in H_2, g \in G\}$ 称为群G的双陪集，记为 $H_1 g H_2$（参阅 E.M.Loebl, Group Theory and Its Application）

双陪集 $H_1 g H_2$ 有如下一些重要性质：

（1）任意 $g \in G$ 的元素必属于一个且仅仅一个双陪集 $H_1 g H_2$

证 首先可注意到 $g\in H_1gH_2$，这是因为 $e\circ g\circ e=g$，而 e 是 H_1 和 H_2 的单位元素，其次考虑，若 $g_2\in H_1g_1H_2$，则存在元素 $h_\alpha\in H_1$ 和 $h'_\mu\in H_2$ 使 $g_2=h_\alpha\circ g_1\circ h'_\mu$。因此

$$H_1g_2H_2=H_1h_\alpha\circ g_1\circ h'_\mu H_2=H_1g_1H_2$$

即是说所有包含 g_2 的双陪集全同于 $H_1g_2H_2$。亦即，如果 $g_1,g_2\in G$，$g_1\notin H_1g_2H_2$，$g_2\notin H_1g_1H_2$，则

$$H_1g_1H_2=H_1g_2H_2 \text{ 或者 } H_1g_1H_2\cap H_1g_2H_2=0 \qquad (1.28)$$

（2）任一有限群 G 可按不相交的双陪集串展开

$$G=\sum_i\oplus\frac{1}{d(g_i)}H_1g_iH_2 \qquad (1.29)$$

$d(g_i)$ 称重复频率；即 G 中的元素在 $H_1g_iH_2$ 中重复出现的次数。亦即是说双陪集 H_1gH_2 中不同元素的数目是

$$|H_1gH_2|=|H_1||H_2|/d(g) \qquad (1.30)$$

其中 $|H_1|$ 和 $|H_2|$ 分别是子群 H_1 和 H_2 的阶，重复频率 $d(g)$ 实际就是交 $H_1\cap gH_2g^{-1}$ 的阶，即

$$d(g)=|H_1\cap gH_2g^{-1}|=|H_1g\cap gH_2|=|g^{-1}H_1g\cap H_2| \qquad (1.31)$$

证 显然对固定的 $g\in G$ 元数 $h_\alpha\circ g\circ h'_\mu\in H_1gH_2$ 的总数是 $|H_1||H_2|$，其中许多是相同的。所以先要找出每种相同元素的数目 $d(g)$。令乘积 $h_\alpha\circ g\circ h'_\mu=h_\beta\circ g\circ h'_\nu$，$h_\alpha,h_\beta\in H_1$，$h'_\mu,h'_\nu\in H_2$，则 $g=h_\alpha^{-1}\circ h_\beta\circ g\circ h'_\nu\circ h'^{-1}_\mu=h\circ g\circ h'$，$h\in H_1$，$h'\in H_2$，于是

$$\begin{aligned}d(g)&\equiv|\{h\circ g\circ h'=g\,|\,h\in H_1,h'\in H_2\}|\\&=|\{g\circ h'\circ g^{-1}=h^{-1}\,|\,h\in H_1,h'\in H_2\}|\\&=|H_1\cap gH_2g^{-1}|\end{aligned}$$

所以，$|H_1gH_2|=|H_1||H_2|/d(g)$。

例 1.17 S_n 群的双陪集 $S_{n-1}gS_{n-1}$ 分解为

$$S_n=\frac{1}{d(e)}S_{n-1}es_{n-1}\oplus\frac{1}{d(p_{n-1,n})}S_{n-1}p_{n-1,n}S_{n-1}$$

而

$$d(g_1=e)=(n-1)!,\quad d(g_2=p_{n-1n})=(n-2)!$$

1.2-2 共轭元素类和不变子群

1. 共轭元素

设 g_α 和 g_β 是群 G 的两个元素，$g_\alpha,g_\beta\in G$，若 G 中存在另一个元素 x 使

$$x\circ g_\alpha\circ x^{-1}=g_\beta \qquad (1.32)$$

则称元素 g_β 共轭于 g_α。反之亦然，即元素 g_α 和 g_β 互为共轭，称此为共轭对称性。显然，群中每个元素与自身共轭。

共轭具有传递性即若 g_α 与 g_β 共轭，g_β 与 g_γ 共轭，则必有 g_α 与 g_γ 共轭。

2. 共轭元素类

群中所有相互共轭的元素的集合称群 G 的一个类。

由于共轭有对称性与传递性，所以一个类就由类中任意一个元素 g 完全决定。这是因为给定了 g，可按 $x\circ g\circ x^{-1}$（$\forall x\in G$）得到整个类。这里符号 $\forall x\in G$ 代表所有元素 x 属