

高等学校教学参考书

桥梁结构动力分析

曹雪琴

上海铁道学院 刘必胜 编

吴鹏贤

北方交通大学 陈英俊审

中国铁道出版社

~~1987年·北京~~

院土木系使用多次。在付印过程中，承北方交通大学陈英俊教授审阅全书并提出许多宝贵意见，特此致谢。限于编者水平，错误或不当之处请读者给予指正。本书也可以作为有关工程技术人员参考之用。

本书由曹雪琴（编写第一、三、五、六、七章）、刘必胜（编写第二、四章）、吴鹏贤（编写第八章）三人编写。

编 者

1986年6月

内 容 简 介

本书主要介绍移动荷载通过桥梁时,桥梁结构的振动问题。介绍各种不同跨度定型设计桥梁的自振频率和阻尼值,并提供实用的经验公式。还着重讨论当考虑活荷载质量时,单轮过桥的动力分析问题,并用基尔公式逐次推进法求解。介绍实际列车过桥的分析方法,当内燃机车以及货物列车过桥时,桥梁的竖向振动问题。同时对桥梁的横向振动问题也作了概述,并附有桥梁竖向振动分析算例、列车过桥横向振动实测成果介绍和单轮过桥电算程序等。

本书是铁道工程、桥梁结构专业研究生和本科大学生的选修课教材,也可供土木工程技术人员参考。

高等学校教学参考书

桥 梁 结 构 动 力 分 析

上海铁道学院 曹雪琴 刘必胜 吴鹏贤 编

中国铁道出版社出版

责任编辑 刘桂华 封面设计 刘景山

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

北京市华东印刷厂印

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 4.875 字数: 109 千

1987年10月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—4,000册 定价: 0.88元

前 言

本书是铁道工程，桥梁结构专业研究生以及本科生的选修课教材，书中讨论铁路列车通过桥梁时，车体和桥梁的振动问题。在分析中，将车体、轮轨以及桥梁作为一个联合动力体系，分别列出车体、桥梁的动力平衡方程以及轮轨间联系方程，并用电子计算机进行求解。

自铁路开始修建至本世纪六十年代，在这一百多年中，尽管曾做了不少研究工作，但是关于移动荷载过桥问题，主要还是依靠现场的试验成果。近二十年来，由于计算机的广泛采用以及高速铁路的兴建，才使得“桥梁结构的动力分析”这个问题逐步进入理论分析阶段。

在学习过程中，对未选修过“结构动力学”课程的读者，本书第二章内容可以作为必要的基础理论知识。在学习第五章内容后，要求读者自编单轮过桥计算机程序并能上机操作。这样对于以后遇到列车通过桥梁时的问题就能迎刃而解。在第六章第七节内容中，介绍了用模拟随机过程的方法解随机振动方程，希望读者在学习本节之前，先学习“概率论”书中关于随机过程的理论，然后再学习本书内容就很容易理解了。

关于列车通过时桥梁横向振动的研究，在大跨度单线桥梁的设计中，如何定出合理的桥梁宽度问题，是设计中常常遇到的难题，本书只介绍目前所研究的成果以及现场实测资料，以供读者进一步研究时参考。

本书作为研究生及本科生选修课教材，曾在上海铁道学

目 录

第一章 移动荷载动力分析简史	1
第二章 梁的自由振动	14
第一节 单跨梁自由振动的动力平衡方程	14
第二节 等截面单跨梁的自振频率及主振型函数	17
第三节 单跨梁主振型函数的正交性	23
第四节 当有活载质量时梁的自振频率	24
第三章 梁式桥的竖向自振频率和阻尼值	33
第一节 梁式桥的竖向自振频率	33
第二节 阻 尼 值	36
第三节 蒸汽机车过桥时的临界速度	38
第四章 单轮过桥振动计算	40
第一节 不计活载质量的移动荷载动力分析	40
第二节 单轮过桥动力分析	44
第三节 单轮并附有弹簧上质量过桥的动力分析	50
第四节 单轮过桥算例	53
第五节 单轮并附有弹簧上质量过桥的算例	56
第五章 动力方程的数值解—逐步推进法	60
第一节 函数离散化和欧拉方法	60
第二节 朗格—库脱 (Runge—Kutta) 方法	61
第三节 基尔 (Gill) 公式	64
第四节 基尔过程计算机程序	67
第六章 列车过桥时桥梁竖向振动分析	70
第一节 引起振动的原因及振动分析的主要内容	70

第二节	机车及货车动力学计算图式·····	72
第三节	动力平衡方程·····	76
第四节	动力方程的解·····	79
第五节	中小跨度桥梁竖向振动分析算例·····	83
第六节	钢桁梁桥竖向振动分析算例·····	87
第七节	轨面不平顺对桥梁结构竖向振动的影响·····	91
第八节	桥梁振动实测资料及规定·····	98
第七章	列车过桥时桥梁横向振动概述 ·····	104
第一节	引起桥梁横向振动的主要原因·····	104
第二节	桁梁桥横向振动分析概要·····	108
第三节	桁梁桥横向自振频率·····	111
第四节	列车过桥横向振动实测成果介绍·····	112
第八章	桥梁振动测试 ·····	117
第一节	振动测试基本原理·····	117
第二节	振动测试方法·····	131
第三节	试验资料的分析计算·····	139
附录 1	单轮过桥计算程序 ·····	143
附录 2	确定桥上车轮号码程序 ·····	147
参考文献	·····	148

第一章 移动荷载动力分析简史

当列车以一定速度通过桥梁时，桥梁要产生振动。从车辆动力学的角度来看，铁路机车或车辆是由车体、转向架、轮对以及相互联系的两系弹簧所组成（图 1—1）。当列车在线路上运行时，由于机车的振动、轮轨间的蛇行运动以及路基变形等影响，车体、转向架及轮对要产生竖向及横向振动。列车带着

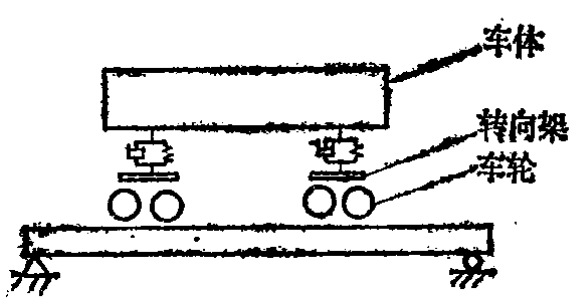


图 1—1 铁路车辆动力分析图式

这种初始振动状态进入桥梁，在桥梁上，车体、转向架、轮轨以及桥梁结构一起构成一个综合的动力体系。

列车过桥引起振动的原因可以归结为几个方面：（1）机车动力作用，如蒸汽机车动轮偏心块的动力作用；（2）轮轨相互作用，如轨面不平顺以及轮轨间蛇行运动；（3）移动荷载对桥跨结构所产生的振动。

关于工程结构的振动问题，远在一百多年前（即铁道工程出现以前）就曾被人们所注意。18世纪下半叶，欧拉（L·Euler）曾对梁的横向振动进行过研究，他分析了悬臂、简支以及固端等各种不同边界条件梁的横向振动，提出梁的横向振动自振频率计算公式如下：

$$f = m \sqrt{\frac{\pi^4 c g}{\omega l^4}} \tag{1—1}$$

式中 ω ——梁单位长度重量；

g —— 重力加速度;

l —— 跨度;

m —— 根据两端支点条件而确定的常数。

限于当时的理论及技术水平, 欧拉只能断定式中 c 的因次是力乘长度的平方, 没有进一步得出正确的答案。

(一) 现场实测

1825年, 英国第一条铁路建成。随着铁道工程的发展, 提出了关于移动荷载对桥梁结构的动力作用问题。当时的工程技术界, 对这个问题有两种不同的看法: 一种认为, 与静荷载相比, 移动荷载会对桥梁结构带来一个附加的冲击作用; 另一种则认为, 当车辆高速通过桥梁时, 移动荷载可能没有充分时间能下垂到桥梁挠度那么大, 因此动挠度可能小于静挠度。

为了研究这个问题, 当时英国的铁路建筑物铁料利用研究委员会, 在朴茨茅斯造船厂组织了一次动荷载试验。从这次试验中得出的结果是, 动荷载所引起的挠度和应力比静荷载作用大。在此应当指出, 从目前振动测试及理论分析的成果来看, 上述第二种意见并非不正确, 确实也存在这种可能, 即当车辆以高速度通过小跨度桥梁时, 由于车体的自振频率比较低, 过桥时间又很短, 可能在车辆驶过桥梁时, 车体正处于平衡位置向上的状态, 对桥梁起减载作用, 在实际现场试验中反映, 确实有这种情况, 即由移动荷载所引起的桥梁结构动挠度或动应力比静挠度或静应力小。

十九世纪中叶是铁道工程的初建阶段, 这个时期由于火车的速度不快, 又因为当时力学理论及试验设备水平比较低, 尽管对于移动荷载动力问题做了一些研究工作, 但仍然进展不大。

十九世纪末到二十世纪初, 资本主义国家的筑路达到高

潮。据统计自1870年到1930年间，世界铁路营业里程由21万km发展到128.3万km，上升达6倍，车速加大，机车的重量也有增加。为了保证交通运输的安全，迫切要求了解关于移动荷载的动力作用问题。然而由于当时的力学理论以及计算技术尚无法作出精确的分析，因此主要工作是现场实测或作一些近似的理论分析。

1907年到1910年间，美国第一次进行了规模比较大的现场实测工作，其中包括21座钢板梁桥（跨度15.24m到30.48m）和24座桁梁桥（跨度超过30.48m），有40种机车，机车重量由104~190t，当时实测车速从16km/h（爬行）到105km/h，个别车次达160km/h。通过这次实测，得出了跨度、车速和冲击作用间的关系，制订了冲击系数曲线（见图1—2），并得出了明确的概念是：对于蒸汽机车来说，移动荷载的动力作用主要是由动轮偏心块的周期力所引起。此外，还有如线路不平顺、轮箍不圆、车辆速度以及桥梁挠度等其它次要因素的影响。

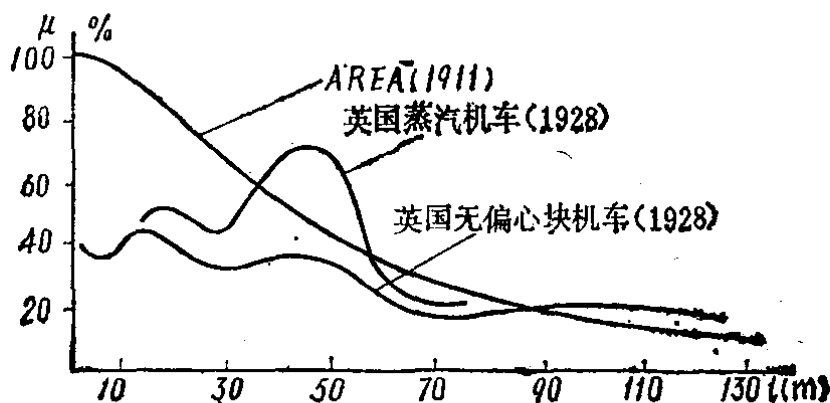


图 1—2 早期的冲击系数曲线

1919年，英国在其本土以及印度、巴基斯坦等地进行了大量的现场测试工作，实测了52座桥梁。这些现场测试工作

的特点除了进行测试外，在英格利斯（C.E.Inglis）教授指导下还进行了理论分析研究，因此现场测试工作更加科学化。对于每一座桥梁，除了测量列车在不同车速下桥梁的挠度和应力外，还用测定桥跨结构刚度的办法，判断桥梁的承载能力，用激振器测定桥跨结构的自振频率和加载后的自振频率，并利用列车通过时的自由振动振幅衰减来测定阻尼。

根据实测和理论分析，1928年英国提出了两根冲击系数曲线，其中一根适用于蒸汽机车，另一根则适用于无偏心块的机车。这种按冲击原因不同而提出不同冲击系数的做法，现在不少国家的规范中还是这样规定的（图1—2）。

1931~1934年间，美国又进行了大量的动载试验。试验是在克利夫兰、芝加哥等铁路上进行的，总共试验了37座桥梁，跨度由11.73m~165.62m。根据现场测试的结果，并运用了一般理论分析，得出结论是：对于蒸汽机车，是当动轮偏心块的频率与桥梁（加载后）自振频率相等时的冲击系数为最大。美国从1935年开始，也将蒸汽机车及其它无偏心块机车分别用两根冲击系数曲线表示。

在1935年制订规范时，由于要考虑活载频率与桥梁自振频率相接近时的共振情况，发现阻尼值对冲击系数的影响很大，因此要求继续进行现场测试工作。

1947年，美国进行了第三次规模比较大的试验，这次现场试验主要是小跨度钢梁，在量测技术上首次采用了电阻应变片，可记录动应力值。

由6.09m~10.36m的小跨度钢梁实测表明，无论蒸汽机车或内燃机车，当车速从0到64km/h时，冲击系数值逐步增大，以后速度再提高，冲击系数值基本上保持不变。

跨度为12.19m~42.68m的钢板梁实测表明，对蒸汽机车，当车速为30~40km/h时是临界速度，冲击系数达到最

大，以后即使车速增大至140km/h，也不可能达到此值。当内燃机车通过时，冲击系数随着速度的增加而增加，直至速度增加到100km/h，以后车速再提高，冲击系数基本上不再增加。

由于采用了电阻应变片，明显地反映出，当列车高速通过时，由于机车的侧滚振动，桥梁结构除了出现竖向振动外，还出现横向弯扭振动。

图 1—3 表示1905年~1948年间美国铁路桥梁冲击系数与跨度 l 的关系曲线。

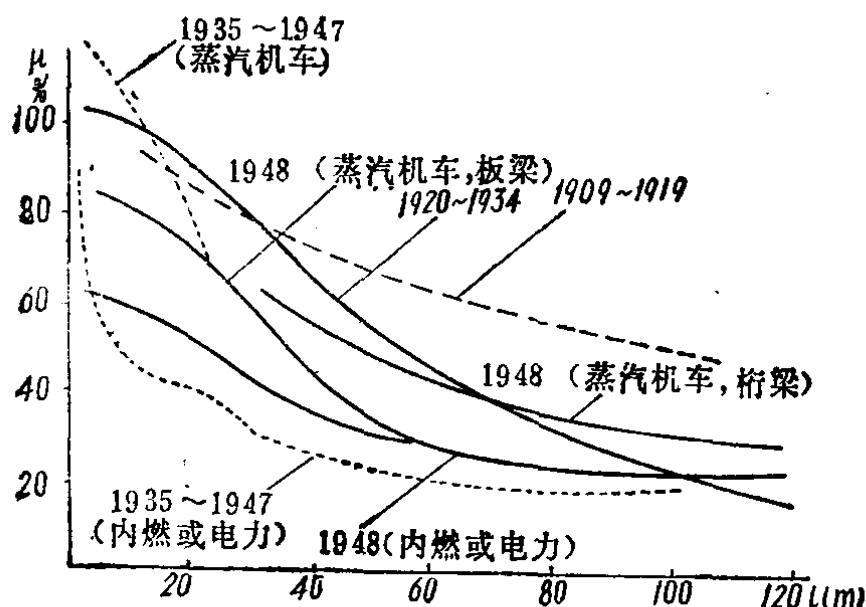


图 1—3 美国历年来的冲击系数曲线

苏联对于移动荷载冲击作用的系统研究，是在十月革命后才开始。1919年苏联科学技术委员会，以斯特利列茨基教授（С.С.Стрелеский）为首，开始进行桥梁结构动力学研究，于1921年提出钢桥冲击系数计算公式

$$1 + \mu = 1 + \frac{0.625}{1 + 0.02\lambda} \quad (1-2)$$

式中 λ ——荷载长度。

以后于1936年，苏联又曾开展对铁路桥跨结构动力学的

试验和理论研究。第二次大战后，由于装配式钢筋混凝土桥大量发展，1953年苏联运输结构物科学研究院，开始对铁路钢筋混凝土桥的动力作用进行研究，在试验室内对100座不同跨度和构造的钢筋混凝土桥进行试验。

（二）理论分析

自铁路开始修建起，为适应生产的需要，除了进行现场实测外，关于移动荷载动力作用的理论研究方面，是不断地自简单到复杂、自近似向精确理论改进。

早期的近似理论，主要是分析单个车轮过桥时的动力作用。对这个动力问题，采用下列两种不同的近似假定：第一种假定是不考虑桥

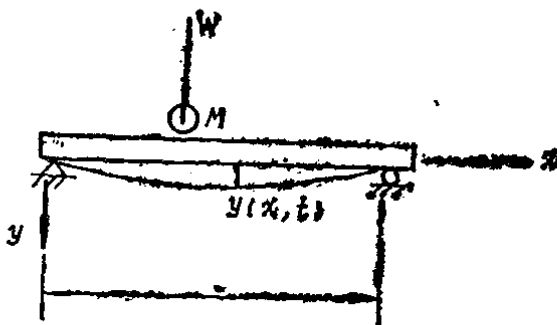


图 1—4 移动荷载过桥

梁的本身质量，单考虑轮子的质量；第二种假定则相反，即不计轮子质量，单考虑桥梁的本身质量。

如图 1—4 所示，当移动荷载 W 以速度 v 过桥时，荷载 W 对桥梁所作用的压力 R 可表示为：

$$R = Mg - M \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1-3)$$

$$y = y(x, t)$$

上式中 M 表示移动荷载的质量，式 (1—3) 右端的第二项表示惯性力。当荷载 W 以等速度 v 通过桥梁时，式 (1—3) 可进一步表示为：

$$R = Mg - M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} v + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v^2 \right) \quad (1-4)$$

1849年，威利斯 (R·Willis) 以第一种假定对上式作了近似解。他把式 (1—4) 近似地表示为：

$$R = Mg \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (1-5)$$

利用简支梁挠度公式:

$$y = \frac{Rx^2(l-x)^2}{3lEI} = \frac{x^2(l-x)^2 W}{3lEI} \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (1-6)$$

式(1-6)是 y 的变系数微分方程式, 威利斯为取近似解, 将括弧内 y 的两阶导数按下列方式表达。即设:

$$y = \frac{x^2(l-x)^2 W}{3lEI},$$

$$\text{因而 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2W}{3lEI} \cdot (l^2 - 6lx + 6x^2) \quad (1-7)$$

将式(1-7)代入式(1-6), 并取跨中, 可以得到当单轮行至跨中时对梁的压力为:

$$R = W \left(1 + \frac{16\delta_0 v^2}{gl^2} \right) \quad (1-8)$$

桁
梁

$$\text{式中 } \delta_0 = \frac{Wl^3}{48EI}$$

同年, 斯托克斯 (G. G. Stokes) 用级数对式(1-6)作了精确解, 并制成了图表。

1905年~1908年, 克雷洛夫 (А. Н. Крылов) 和铁木辛柯 (S. Timonshenko) 分别从后一种假设出发进行分析, 即假定移动荷载的质量比桥梁本身质量小很多, 可以忽略不计。以后, 1922年铁木辛柯又提出了由于机车动轮偏心块冲击作用的分析方法。

既计及桥梁本身质量又考虑活载质量的动力分析是非常复杂的。1937年, 许兰开普 (A. Schallenkamp) 是第一个将两种质量都考虑进去而分析单轮过桥问题的, 他将桥的挠度和车轮的集中荷载都展开为福里哀级数, 然后求系数间相互关

系。

英格利斯于1934年发表的论文《铁路桥梁振动的数学分析》(A mathematical treatise on vibration in railway bridge)，是当时用来解决实际生产设计问题的一篇比较突出的文献。英格利斯根据现场试验(英国1919年)的资料，假定桥梁挠曲线为正弦分布，并作了若干个其它假定，对生产实践中遇到的动力问题作了比较详细的研究，如动轮偏心块的作用，簧上质量问题，轨道不平顺等，他所提出的近似理论解与实测资料对照比较接近。

1953年，符奇尼库夫(В.М.Мучинников)用积分方程方法，纳列茨基维(J.J.Naleszkiewicz)用迦利金(Galerkin)方法，对既考虑桥梁本身质量又考虑活载质量的问题进行了比较严格的分析。

在结构体系方面，除了简支梁外，艾尔(R.S.Ayre)、福特(G.Ford)、库洛基克(ЦКоломичек)等研究了连续梁在移动荷载作用下的动力分析，在分析中均不考虑活载质量，利用连续梁自由振动振型函数来解单轮以及带有周期力的过桥问题。凡坦沙斯(A.S.Vetetsos)，温(R.K.Wen)研究了悬臂梁的动力问题，文中不考虑活载质量，假定恒载集中于几点，取恒载振型曲线来分析。从研究结果表明，一般悬臂梁的挠度或应力冲击系数要比简支梁或连续梁大。

总观自铁道工程开始修建起，至本世纪60年代，在这100多年中，应生产建设的需要，在移动荷载动力分析领域内曾作了不少理论分析，但正如叶夫格拉弗夫(Т.К.Евграфов)在《铁路桥跨结构的动力计算》一书序言中所指出的“至1960年，在移动荷载对桥梁结构的动力作用问题上，尚未得到一个精确的解”。

当时分析移动荷载动力问题的基本特点是：没有将车体、轮轨与桥梁三部份当作联合的动力体系，而把车体的质量简单地当成单轮或均布荷载。

（三）近20年来的发展

本世纪60年代开始，在几个资本主义国家出现了一个新的筑路时期。为了与航空、公路竞争，铁路要向高速化发展，其中如日本，1969年建成时速210km的东海道新干线，法国1978年进行时速260km的高速铁路试验，英、法、西德等国都着手研究高速的地面运输。从铁路运输方面，提出了新的要求，要求解决高速列车过桥的动力分析问题，其中不单是指桥梁结构的动力问题，特别还包括过桥时，车体振动和轮轨相互作用问题的研究。

在计算技术方面，电子计算机的出现，是计算技术领域的一大革命，是提供分析复杂结构以及分析复杂的数学力学问题的有力工具。

由于生产建设的需要及在计算技术方面提供的可能，在这两个前提下，近20年来，在移动荷载动力分析方面有了很大发展，主要表现为如下几个方面：

（1）以车体、轮轨和桥梁三者综合的动力体系为对象，研究当车辆高速过桥时，车体的振幅及加速度（保证司机及旅客的舒适度），研究轮轨间相互作用（保证车轮不出轨的安全度）以及研究桥梁结构的安全及耐久性。

（2）与现场测试相配合，用电子计算机编制程序，进行理论分析。如多轮荷载体系，不同初始条件的影响（桥头线路影响）以及轮轨间蛇行运动等，使移动荷载过桥动力问题逐步从完全依靠实验转化为半实验半理论的阶段。

（3）配合可靠度理论，开始研究用随机理论来分析桥梁结构动力可靠度问题。各国均结合其国内铁路建设（或公

路)的具体情况进行研究。

1957年,比格斯(J.M.Biggs)配合美国高速公路建设,在台式电子计算机上,用单项正弦级数解分析具有簧上质量的单轮过桥问题。经模型以及现场测试(跨度为26.22 m),证明这种计算图式有足够精度,可以用来模拟计算单辆汽车过桥问题。

1960年,温(R.K.Wen)用能量法以及拉格兰奇(Lagrange)方程研究了双轴车辆(汽车)的过桥问题(图1—5),他假定动力挠曲线的形状与静力挠曲线相似,文中还讨论了路面不平顺的影响。

温是第一个研究多轴移动车辆过桥动力问题的人,以往都是从单轮或用均布荷载来模拟移动车辆的。

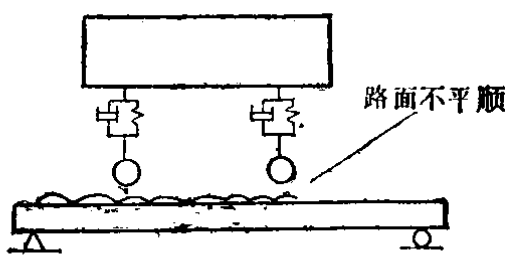


图1—5 双轴车过桥

日本于五十年代末,结合东海道以及东北新干线的修建,对高速列车过桥的动力问题作了大量的理论研究、现场测试及模型试验。日本铁道技术研究所松浦章夫、伊腾文人、大羊地三^{[9][10][11]}等人,结合东海道新干线上所采用的电动车组以及正在拟制的超高速磁浮列车,对铁路车辆和桥梁的动力作用进行研究。从他们的理论分析中表明,在车速为200km/h范围内,桥梁的冲击系数一般不超过目前蒸汽机车的冲击系数值。这个现象,在实际桥梁现场测定中也得到证实,因此日本国铁建造物设计标准中所列冲击系数值基本上还是按老规定。松浦章夫从理论分析表明:如车速超过300km/h,则桥梁的冲击系数将随着车速的增加明显地增大。

松浦章夫还对桥梁的刚度值进行了研究,以多孔简支梁

为研究对象，发现当车辆高速通过桥梁时，由于相邻桥跨结构下挠，在桥墩处钢轨表面出现转折角，引起车体竖向加速度以及使轴重产生变化。根据这个现象，松浦章夫认为应按不同的车速规定桥梁的容许最大挠度值。

具体数值如下：

$$\text{当车速 } v = 160 \text{ km/h,} \quad \text{容许挠度 } f \leq \frac{l}{1000}$$

$$\text{当车速 } v = 210 \text{ km/h,} \quad \text{容许挠度 } f \leq \frac{l}{1400}$$

$$\text{当车速 } v = 260 \text{ km/h,} \quad \text{容许挠度 } f \leq \frac{l}{1800}$$

在日本国铁建造物设计标准中规定，对于普通线路桥梁容许最大挠度为 $\frac{l}{1000}$ ，对于高速铁路则为 $\frac{l}{1800}$ 。

欧洲，国际铁路联盟试验研究所（ORE）对铁路桥梁的动力性能作了大量研究，把冲击系数表示为与车速以及线路不平顺有关的函数公式。至于桥梁刚度值，当车速超过 200 km/h 时，最大容许值规定如下：

$$\text{桥梁垂直挠度 } f \leq l/800$$

$$\text{桥梁端部转角不大于 } 1/200$$

$$\text{水平挠度 } f < l/4000$$

$$\text{桥梁歪斜应小于 } 1 \text{ mm/m}$$

由于移动荷载所引起的桥梁振动大都是属于随机的（如轨道不平顺、轮箍不圆，轴重不一致、轮轨间蛇行），因此，为了进一步从动力可靠度来定出桥梁结构的安全及列车通过的舒适度，近年来开始研究用随机振动理论来分析移动荷载下的桥梁振动问题。

1968年，诺尔斯（J. K. Knowles）研究了无穹长梁上作用一集中力，当集中力的位置为随机分布时的动力问题。