量子力学习题集

（增订第三版）

D 特哈尔　选编　王正清　李光惠　李文博　译

高等教育出版社

量子力学习题集

（增订第三版）

D. 特哈尔 选编

王正清 李[illegible][illegible] [illegible]文博 译

高等教育出版社

内容简介

本书根据D. 特哈尔（ter Haar）选编的《量子力学习题集》1975年增订第三版译出。本习题集包括习题和解答两部分；可与L.I.席夫、H. A. 克拉默斯、Л.Д. 朗道和E.M. 栗弗席兹、A. 梅西亚、A. C. 达维多夫等分别所著《量子力学》教科书配合使用；可作为高等学校理工科物理专业及有关专业高年级学生或研究生学习量子力学课的参考书，也可供有关专业的教师及科研人员参考。

Problems in Quantum Mechanics
editor D ter Haar
Pion Limited 1975

量子力学习题集
（增订第三版）
D.特哈尔 选编 王正清 李光惠 李文博 译
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
重庆印制一厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 440 000
1990年7月第3版 1990年7月第1次印刷
印数 0 001—9 000
ISBN 7-04-002303-2/O·785
定价 4.90 元

译者说明

D.特哈尔选编的量子力学习题集初版（1960年）的中译本于1965年与读者见面，并于1981年再次印刷，都受到读者欢迎．在本习题集的第三版中，原作者根据实际需要重新调整和增补了相当一部分习题，并且增选了关于密度矩阵、产生算符和湮没算符、相对论性波动方程等方面的习题．这一版比前两版有较大改进，选题目的更明确，解题思路和物理概念清楚，取材更加全面系统．因此，我们将本习题集的第三版重新翻译出版，希望它能对读者有更大的裨益．本书序言部分和一、二、三章由王正清翻译；四、五、六、七章由李文博翻译；八、九、十、十一章和索引部分由李光惠翻译．

本书的出版得到了曲孝先工程师热情的赞助和高等教育出版社的大力支持，译者向他们表示衷心的感谢．

本书译文不当之处，欢迎读者批评指正．

第三版序

在第三版的编写过程中，我删去一些习题，重新编排了某些习题的次序；对原有几章增加了新的习题；还增选了关于密度矩阵、产生算符和湮没算符、相对论波动方程方面的习题。除此之外，本书的宗旨和范围与前一版基本相同。为了方便读者，对较复杂的习题加了星号。

D.特哈尔

1974年9月于牛津

第 二 版 序

本书实质上是原习题集的修订和增订版.原习题集包括戈利德曼(И.И.Гольдман)和克里夫琴科夫(В.Д.Кривценков)的教科书中的全部习题，以及选自科甘(В.И.Коган)和加利茨基(В.И.Галицкий)的类似的书中的习题.

在这一版的编写过程中，我修改了第一版的某些习题和少数解答，并使全书的符号既统一，又符合英语习惯.此外，我们还从伊罗多夫(Иродов)的习题集中增选了一些关于原子物理的问题和某些新习题，这些新习题主要取自牛津大学的考题.我在此感谢牛津大学出版社允许我将这些考题收入此习题集.

本习题集可与任何一本近代量子力学教科书配合使用，例如L.I.席夫(Schiff)、H.A.克拉默斯(Kramers)、Л.Д.朗道(Ландау)和E.M.栗弗席兹(Лифшиц)、A.梅西亚(Messiah)或A.C.达维多夫(Давыдов)所著量子力学.对于已从初等教科书中熟悉了量子力学基本概念的读者，本书可作为进一步的读物.

D.特哈尔

1963年9月于牛津

目　录

习　　题

§1. 一维运动

1．设粒子的势能为

$V=\infty$，当$x<0$及$x>a$时；

$V=0$，当$0<x<a$时．

试求在这“势阱”中粒子的能级和归一化波函数．

2．试证明对于“势阱”中的粒子（见上题），下列关系式成立：

$$\bar{x}=\frac{1}{2}a,\quad \overline{(x-\bar{x})^2}=(a^2/12)(1-6/n^2\pi^2)$$

并证明，当n大时，上面的结果与相应的经典结果一致．

3．当粒子在“势阱”中处于第n个能态时，试求出其动量的几率分布函数．

4．设有一粒子处在无限深的矩形势阱中，它所处的态由下面的波函数描写：

$$\psi(x)=Ax(a-x),$$

其中a为阱宽，A为常数．

求粒子取不同能量的几率分布以及能量的平均值和方均根偏差．

5．在宽为a的势阱中的粒子处于基态．在$t=0$时，$x=a$处的阱壁突然移动到$x=2a$，试就下列两种情况，计算$t>0$时的几率：

（a）粒子的能量与$t=0$之前相同；

（b）粒子的能量小于$t=0$之前的．

6.* 设有一粒子，被限制在具有无限高壁的一维矩形势阱内，试计算这粒子作用在阱壁上的平均力。

7. 试求在不对称的势阱中（见图1）粒子的能级和波函数，并讨论$V_1=V_2$的情况。

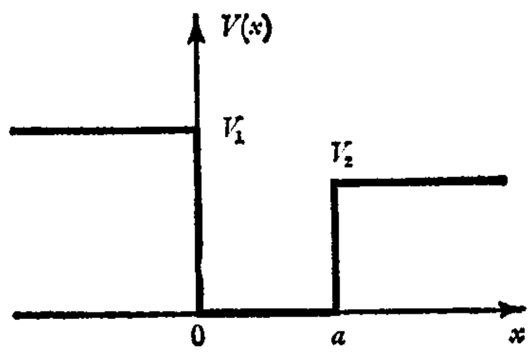

图 1

8. 振子的哈密顿量为$\hat{H}=\hat{p}^2/2\mu+\mu\omega^2\hat{x}^2/2$，其中$\hat{p}$和$\hat{x}$满足对易关系$\hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p}=-i\hbar$。在下面的计算中，为了避免写$\mu$，$\omega$和$\hbar$，我们引进新的变量$\hat{p}$和$\hat{Q}$，①

$$\hat{P}=\hat{p}/\sqrt{(\mu\hbar\omega)}\text{，}\hat{Q}=\sqrt{(\mu\omega/\hbar)}\,\hat{x}$$
$$(\hat{P}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{P}=-i)$$

并且将能量E以$\hbar\omega$为单位表出（$E=\epsilon\hbar\omega$）。用新的变量表示时，振子的薛定谔方程将是

$$\hat{H}'\psi=\frac{1}{2}(\hat{P}^2+\hat{Q}^2)\psi=\epsilon\psi$$

（a） 利用对易关系$\hat{P}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{P}=-i$，证明

$$\frac{1}{2}(\hat{P}^2+\hat{Q}^2)(\hat{Q}\pm iP)^n\psi=(\epsilon\mp n)(\hat{Q}\pm i\hat{P})^n\psi.$$

（b） 求出振子的归一化波函数和能级。

（c） 确定算符$\hat{a}=(1/\sqrt{2})(\hat{Q}+i\hat{P})$和它的厄密共轭算符$\hat{a}^+=(1/\sqrt{2})(\hat{Q}-i\hat{P})$的对易关系。利用算符$\hat{a}$，将第$n$个激发态的波函数用基态波函数表示出来。

（d） 确定算符$\hat{P}$和$\hat{Q}$在能量表象中的矩阵元。

提示：$\hat{P}^2+\hat{Q}^2-1=(\hat{P}+i\hat{Q})(\hat{P}-i\hat{Q})$。

9. 利用上题结果，用矩阵直接相乘的办法证明，对于处在第n个定态的振子，有

① 算符都冠以尖帽号∧。

$$\overline{(\Delta x)^2}=\overline{x^2}=(\hbar/\mu\omega)\left(n+\frac{1}{2}\right);$$

$$\overline{(\Delta p)^2}=\overline{p^2}=\mu\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

对于任何定态，证明x的方均根值与同样能量下经典振子的x的方均根值相同。

10．有一粒子在势场$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$中运动。若粒子处在基态，试求出发现它在经典界限之外的几率。

11．设一粒子在如下形式的势场中运动：

$V(x)=\infty(x<0)$；$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2(x>0)$。求该粒子的能级。

12．试写出“p表象”中振子的薛定谔方程，并求出其动量的几率分布函数。

13．求在势场$V(x)=V_0(a/x-x/a)^2\quad(x>0)$（见图 2）中粒子的波函数和能级，并证明其能谱与振子的能谱相同。

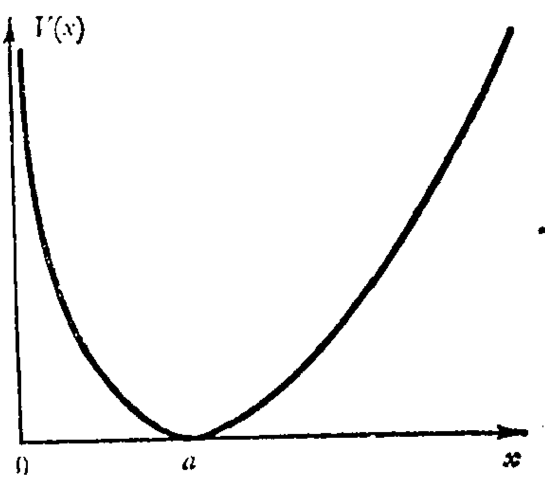

图 2

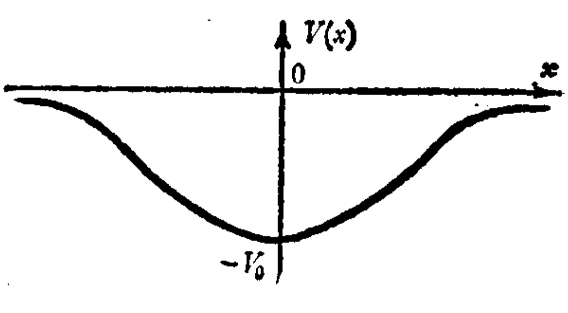

图 3

14*．试确定在势场$V=-V_0/\cosh^2(x/a)$（见图 3）中粒子的能级。

15*．试求出在势场$V=V_0\cot^2(\pi x/a)\quad(0<x<a)$（见图4）

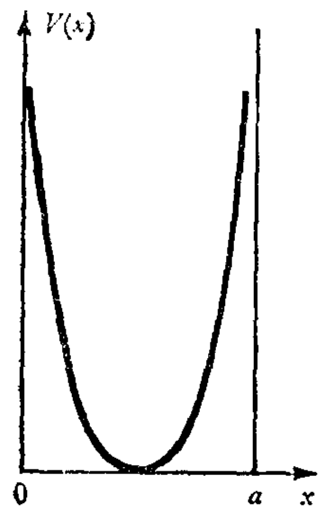

图 4

中粒子的能级和波函数，并求出基态波函数的归一化常数。

考虑 V_0 值很大和很小这两个极限情况。

16．试确定在如下势场中粒子的能级

$$V(x)=D(1-e^{-ax})^2$$

17．一质量为μ的电子在一维势场

$$V(x)=-(\hbar^2P/\mu)\delta(x^2-a^2)$$

中运动，其中 P 是一个正的无量纲常数，$\delta(x)$是狄拉克 δ 函数，a 为常数，表示长度。将势场作为P的函数讨论其束缚态。

18*．一维“氢原子”是指这样的原子，其中一个电子被限制在x轴上。电子所受的力反比于它到原点距离的平方。求这个体系的能量本征值和本征函数。

19．试求在均匀场$V(x)=-Fx$中带电粒子的波函数。

20*．一质量为μ的粒子，在均匀重力场 g 中运动，运动区域被限制在一个完全反射平面之上，求粒子的定态波函数和能级。（我们可以取一个在金属板上上下跳动的重刚球，作为这一体系的经典类比。注意，本题的全部计算和结果，对于一个带电荷e的粒子在均匀电场$\mathscr{E}$中运动、且存在一反射平面的情况来说，显然也是正确的，只要在所有的方程中将g换为（e/m）ε即可。）试过渡到经典力学的极限。

21*．利用半经典近似导出在势场 $V(x)$ 中运动的粒子的波函数的表达式。给出这个近似适用的条件，并确定量子化条件。

22．利用半经典近似，导出在给定势场中运动的粒子的分立能级数目的表达式。

23．在半经典近似情况下，求在下列势场中粒子的能谱：

（a）　$V=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$（振子）；

(b) $V=V_0\cot^2(\pi x/a)$ $(0<x<a)$。

24．一质量为μ的粒子在势场中运动，这势场在$x=0$处为$-V_0$，随x线性变化到$x=\pm a$，而在$|x|\geqslant a$时为零（见图5）。运用半经典近似确定束缚态能级，并确定分立能级的总数。

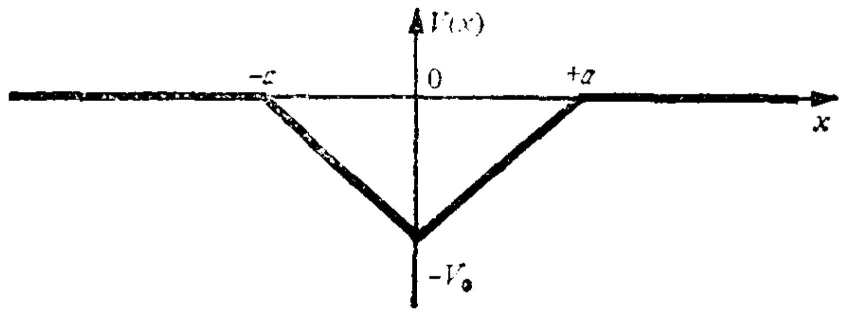

图 5

25．在半经典近似下，确定定态中动能的平均值。

26．利用上题结果，在半经典近似下，求出处于下列势场中粒子的平均动能：

(a) $V=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$；

(b) $V=V_0\cot^2(\pi x/a)$ $(0<x<a)$ （见23题）

27．利用半经典近似和维里定理，确定在势场$V(x)=ax^\nu$中粒子的能谱形式。

28．设一粒子在均匀重力场中运动，运动区域被限制在一个完全反射平面之上，求粒子能级的半经典表达式。

29．一个粒子在一维势场中，在两个转折点$x=a$和$x=b$之间振动，前一个转折点是由于竖直的势阱壁，而后者是$\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$有限的一般形式的阱壁．利用WKB方法求在这势场中粒子的定态的量子化条件。

30*．在半经典近似下，试对给定的能谱E_n求出势能$V(x)$的形式。可假设$V(x)$为偶函数$V(x)=V(-x)$，且当$x>0$时，$V(x)$单调上升。

31*．在动量表象中求出薛定谔方程的半经典解。

试证明：从通常的半经典坐标波函数出发，由“x表象”变换到“p表象”，能得到同样的半经典解。

32．求出转动惯量为I的平面转子的定态波函数和能级。

所谓转子，是指在平面上（或空间中）转动的两个刚性连接的粒子所组成的系统。转子的转动惯量$I=\mu a^2$，式中μ是两个粒子的约化质量，a是它们之间的距离。

33．设在$t=0$时刻，平面转子的波函数给定为$\psi(\varphi, 0)=A\sin^2\varphi$，其中$A$是归一化常数，试求$t$时刻的波函数$\psi(\varphi,t)$？

34．一个质量为μ的小球，穿在一根细金属丝上，此金属丝做成半径为a的刚性圆环。试求当此体系处于定态时，金属丝中张力的表达式。假定小球加在金属丝上之前，金属丝不受应力。

35．设一粒子在周期势场$V(x)=V_0\cos bx$中运动，试写出它在“p表象”中的薛定谔方程。

36．设一粒子在周期势场$V(x)=V(x+b)$中运动，试写出它在“p表象”中的薛定谔方程。

37*．设一粒子在图 6 所示的周期势场中运动，试求出它的允许能带。研究$V_0\to\infty$，$b\to 0$而$V_0 b=$常数的极限情况。

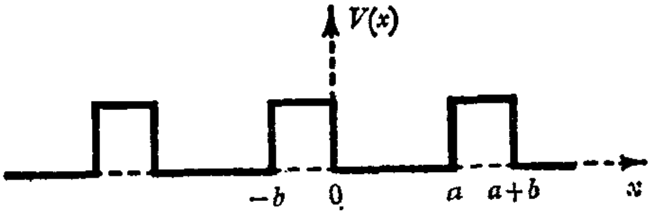

图 6

38*．金属中电子能级的一个简单模型是采用如下一维势场：

$$V(x)=\hbar^2 p/2\mu a\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x+na)$$

其中μ是电子的质量，a是晶格常数，p是一个正的无量纲常数，而$\delta(x)$则是狄拉克δ函数。试求在能带上界的有效质量的表达

式.

39*. 一粒子在周期势场$V(x)$中运动：

$$V(x+a)=V(x)$$

利用适当的半经典近似，求出确定容许能带的超越方程，并讨论之.

40. 设粒子被复势场$V(x)(1+i\xi)$散射，证明几率流密度

$$j=(\hbar/2\mu i)[\psi^*(\partial\psi/\partial x)-\psi(\partial\psi^*/\partial x)]$$

和几率密度$\rho=\psi^*\psi$满足"连续性"方程：

$$\partial j/\partial x+\partial\rho/\partial t=2V(x)\xi\rho/\hbar.$$

41. 利用变分法证明，任何纯吸引的一维势场至少有一个束缚态.

42. 一个质量为μ的粒子在一维势场$\lambda V(x)$中运动；$V(x)$满足条件

$$V(x)=0,\ x<0;\ V(x)=0,\ x>a;\ \lambda\int_0^a V(x)\mathrm{d}x<0.$$

试证：当λ充分小时，存在一个束缚态，其能量E近似地为

$$E=-(\mu\lambda^2/2\hbar^2)\left[\int_0^a V(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

§2. 隧道效应

1. 在研究金属电子发射时，必须考虑以下事实：具有足够能量能从金属中跑出来的电子，可能在金属表面被反射。

考虑一个势场为V的一维模型。当$x<0$时（在金属内），V等于$-V_0$；当$x>0$时（在金属外），V等于0（见图7）。试求能量$E>0$的电子在金属表面的反射系数。

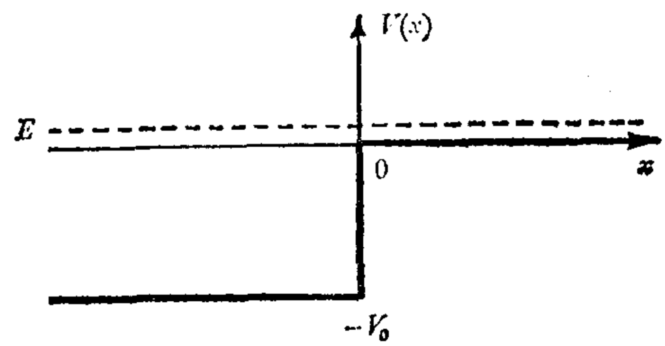

图 7

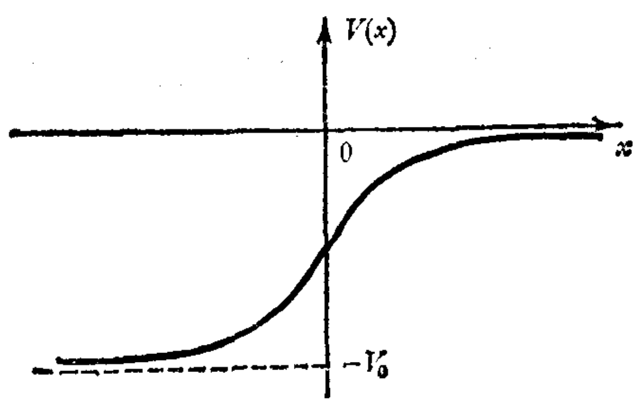

图 8

2*. 在上题中曾假设势场在金属表面是不连续变化的。在实际金属中，在大小约为金属中原子间距的范围内，势场的变化是连续的。设金属表面附近的势可近似地表为

$$V=-V_0/(e^{x/a}+1) \text{（见图8）}$$

试求能量$E>0$的电子的反射系数。

3． 试求粒子穿过矩形势垒的透射系数（见图9）。

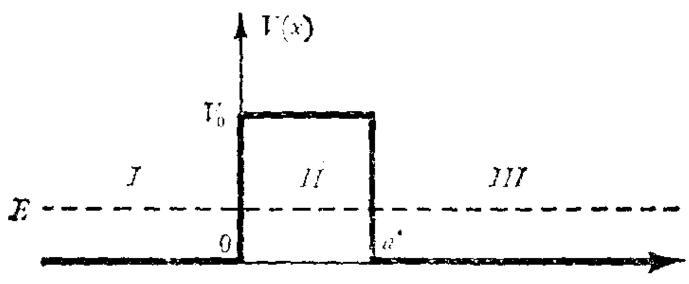

图 9

4 在能量$E>V_0$的情况下，求矩形势垒对粒子的反射系数（在势垒之上的反射）．

5． 设一个粒子沿x轴运动．试求该粒子在原点处穿过δ函数势垒的透射几率．

6． 近似地求出图10所示的对称势阱中粒子的能级和波函数。设$E \ll V_0$，并且势垒穿透性很小（$2\mu V_0 b^2/\hbar^2 \gg 1$）。

7*． 试求粒子穿过三角形势垒的透射系数（见图11）。考虑穿透性很小和很大这两种极限情况．

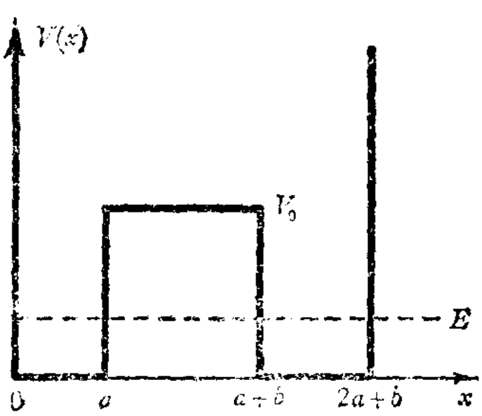

图 10

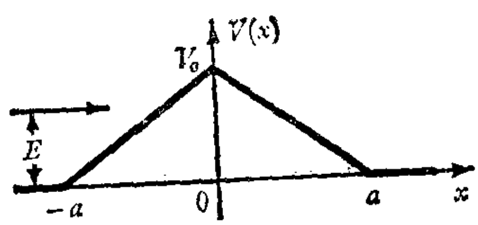

图 11

8*． 试计算粒子穿过势垒$V(x)=V_0/\cosh^2(x/a)$（见图12）的透射系数。粒子的能量$E<V_0$．

9． 在半经典近似下，试计算如下形式的抛物形势垒（见图13）的透射系数，

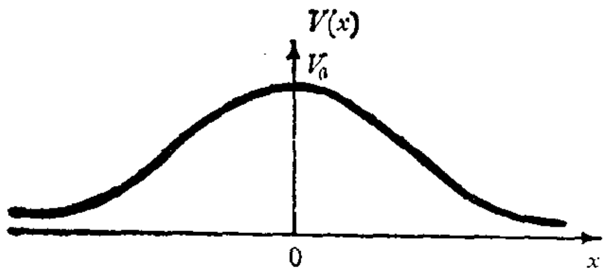

图 12

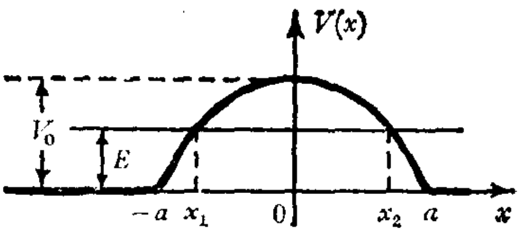

图 13

$$V(x)=\begin{cases} V_0(1-x^2/a^2), & \text{当} -a\leqslant x\leqslant a \\ 0, & \text{当} |x|\geqslant a \end{cases}$$

试给出所得结果的适用条件。

10．在半经典近似下，计算电子在强度为F的强电场作用下，穿过金属表面的透射系数（见图14），并求出这个计算的适用

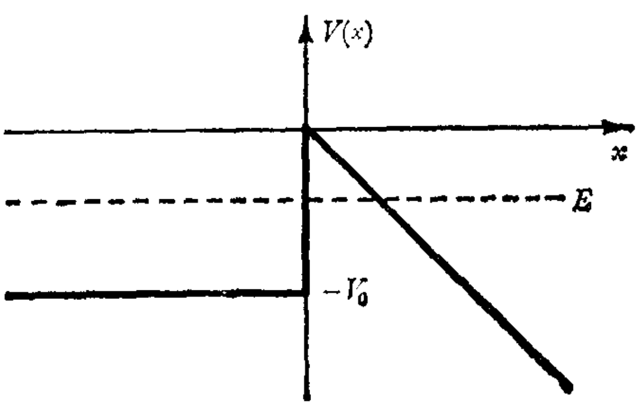

图 14

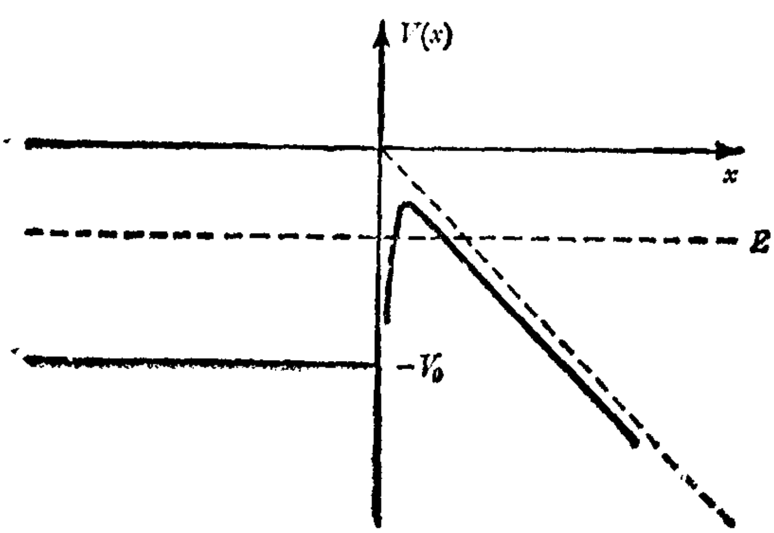

图 15