数学故事丛书

无限中的有限

——极限的故事

张 远 南

上海科学普及出版社

（沪）新登字第 305 号

责任编辑　毕淑敏

无限中的有限
——极限的故事
张　远　南
上海科学普及出版社出版
（上海曹杨路 500 号　邮政编码 200063）

新华书店上海发行所发行　　常熟高专印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 4.5　插页 2　字数 108000
1990 年 4 月第 1 版　　1996 年 4 月第 4 次印刷
印数 152501—175500

ISBN　7-5427-0184-3/O・6　　定价：4.50 元

内 容 提 要

本书系数学故事丛书中的一册。全书用24篇生动有趣的小故事叙述了有限与无限的辩证关系，从中可了解数学中极限的概念。这些故事生动有趣，通俗易懂，寓数学知识于趣味之中。是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识而作。

本书可供中学生、中学数学教师以及广大数学爱好者阅读。

序

本世纪最伟大的数学家之一，德国的希尔伯特，曾经把数学定义为“关于无限的科学”。在数学家的眼里，经验的提示并不是数学，只有当经验寓于某种无限之中，才是数学。

“无限”常使人感到迷惘，“有限”却使人觉得实在！人们总把“无限”作为一种特殊性加以看待. 其实，这是一种习惯的偏见，“无限”同样有其极为丰富的内涵。借助于康托的理论，我们甚至可以比较它们的大小！大多数的“有限”，正因其寓于无限之中而表现出更加充实的含义。诸如：无限过程的有限结果；无限步骤的有限推理；无限总体的有限个体；等等，等等。这种无限中的有限，恰是数学科学的精华所在！

这本书既不打算，也不可能对无限的理论作全面的叙述。作者的目的只是希望激起读者的兴趣，并由此引起他们自觉学习这一知识的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中，有感于普通教学的局限和不足，希望能通过

非数学的手段，实现人类智慧接力棒的传递。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立的趣味数学读物。它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等故事。作者心目中的读者，是广大的中学生和数学爱好者，他们是衡量本书最为精确的天平。

本书中介绍的许多知识，曾是数学中极为精采的篇章。作者力图把这些内容叙述得生动有趣，通俗易懂，但每每感到力不从心。因此，对初学者来说，有些章节可能依然会十分艰辛。不过，如能多看几遍，定然会有收获的！

由于作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者不吝指出。

但愿本书能为人类智慧的传递，铺桥开路！

张远南

1987 年 4 月

再版前言

数学教育在文化教育中所占比例相当大，它不仅是数学知识与方法的传授，也是思维能力与思想方法的训练。对于青少年学生，开发智力的途径是多方面的，数学训练却是一种不可替代的特殊的思维训练。当前，科学的数学化浪潮正席卷着自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，数学作为科学技术的语言和思想的工具，越来越被科学家所重视。古代的科学家伽俐略说，大自然的书是数学写成的。现在人们普遍认为：科学的本质是数学。

数学充满了辩证法，正数与负数，常量与变量，数与形，微分与积分，直观与抽象，有限与无限，分析与综合，等等，都是客观世界矛盾运动与数量空间形式上的反映。解数学应用题的过程，是将实际问题转化为数学问题，又用数学方法解决实际问题的过程。

数学是一门优美的科学，从形式到内容，从理论到实践，都体现着美的特征，展现着独特的风格。一位伟人曾赞美是一首数学的诗。数学具有形态美，和谐、整洁、对称、有序；思维美，思路清晰、多向传导、构思巧妙；作用美，数学是人类最高超的智力成就，人类心灵最独特的创作；历史美，每一个重要公式、定理，每一个重要方法，都

隐载着一个美好的历史故事。若说音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌可以动人心弦，科学可以改善物质生活，则数学可以提供以上的一切。

福建省南平市教师进修学校校长、特级教师张远南编著的《数学故事丛书》，以引人入胜的故事把学生导入数学乐园，是青少年启迪智慧灵感、步入科学殿堂的好伙伴。

南平地处建溪与剑溪汇合处，两溪在这里汇流成闽江向东注入东海。当地志书说："南平自晋雷焕之携剑成龙，从此剑州、镡州名播海内"。传说晋焕之得二剑于津城，一与张华，留一自佩。华死，失剑所在。其后焕子佩剑经此，跃入水，化为龙，剑溪由此得名，又曰剑津。据地方志记载，南剑州（今南平市）在天圣三年（1025 年）就以官办的形式创办剑学，设置学田，以助学子。该地"遥望双溪入海，仰观九迭摩云"。现尚存宋碑《南剑州重建州学记碑文》立于现南平第二中学校园内。这样算起来，南平二中有九百六十多年的办学历史了。张远南曾长期在该校执教数学。运笔得山川之灵秀，可谓山美水美书也美了。

马长冰

一九九一年三月于福州

目 录

1. 记数史上的繁花 …………………… (1)
2. 大数的奥林匹克 …………………… (6)
3. "无限"的诞生 …………………… (11)
4. 关于分牛传说的析疑 ………… (17)
5. 奇异的质数序列 ……………… (23)

6. "有限"的禁锢 …………………… (29)
7. 康托教授的功绩 ……………… (35)
8. 神奇的无限大算术 …………… (40)
9. 青出于蓝的阿列夫家族 ……… (45)
10. 令人困惑的"连续统"之谜 … (51)

11. 从"蜻蜓咬尾"到"两头蛇数" … ………………………………… (55)
12. 斐波那契数列的奇妙性质 …… (62)
13. 几何学的宝藏 ………………… (68)
14. 科学的试验方法 ……………… (74)
15. 中国数学史上的牛顿 ………… (80)

16. 实数的最佳逼近 ……………… (86)

17. 漫话历法和日月蚀 ……………… (93)
18. 群星璀璨的英雄世纪 …………… (99)
19. 无聊的争论与严峻的挑战 … (104)
20. 快速鉴定质数的方法 ………… (109)

21. 秘密的公开和公开的秘密 … (113)
22. 数格点，求面积 ……………… (119)
23. 一个重要的极限 ……………… (125)
24. 人类认识的无限和有限 …… (132)

1.

记数史上的繁花

我们中华民族一向具有乐观旷达的性格。古往今来，那广为传闻的笑话艺术，便是这一优秀品格的佐证。下面一则脍炙人口的故事出自《笑府》，其流传之远久，少说也已数百年！故事的大意如下：

从前有个财主，自个儿目不识丁，于是请了个先生，教他儿子读书。

先生来了以后，先教财主孩子描红。描一笔，先生就教道："这是'一'字"；描两笔，先生便教道："这是'二'字"；描三笔，先生又教道："这是'三'字"。

"三"字刚一写完，但见财主的儿子把笔一扔，一蹦一跳地找父亲去了，说："爹！这字可太容易认了。我已都会了，用不着再请先生了！"财主听了很高兴，便把先生辞掉了！

不久，财主准备请一个姓万的亲戚喝酒，便叫儿子写张请帖。不料过了许久，还不见儿子把请帖拿来，于是只好亲自上房去催。

儿子见父亲来，便埋怨说："天下姓氏多得很，为什么偏拣姓万？我一早到现在，写得满头大

汗，也才描了五百多划，离一万远着哩！”

对于文明的人类，上面的故事自然是笑话。但读者可能未曾想到，这一令人捧腹的办法，在人类的记数史上，曾有一度相当先进！

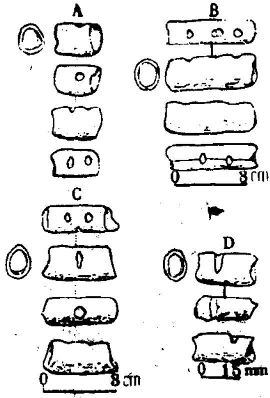
人类最初数的概念是“有”和“无”。在经历了漫长的岁月之后，才开始出现数字“一”、“二”、“三”，对大于“三”的数，则一概回答为“许多”。

我们这个星球上的文明，有着惊人的类似。无论是东方还是西方，都有过结绳记数的历史。传说古波斯王一次打仗命令将士们守一座桥，要守六十天。为了把“六十”这个数准确地表示出来，波斯王用一根长长的皮条，在上面系了六十个扣。他对将士们说：“我走后你们一天解一个扣，什么时候解完了，你们的任务便就完成，可以回家了！”我国春秋时期古书《易经》，也记载了上古时期我们祖先“结绳而治”的史实。左图是甲骨文中的“数”字，它的右边表示右手，左边则是一根打了许多绳结的木棍。瞧！它多像一只手在打结呀！

公元 1937 年，人们在维斯托尼斯发现了一根大约四十万年前的幼狼挠骨，七吋长，上面刻有 55 道深痕。这是至今为止最早的刻痕记数的历史资料。下图是我国北京郊区周口店出土的，大约一万年前“山顶洞人”用的刻符骨管。骨管上的点圆形洞，代表着数目“一”，而长圆形洞，则很可能代表“十”。如果考古学家最终确证是这样的话，那么下页图中的 A、B、C、D，就分别表示数目“3”、“5”、“13”、“10”。

在记数史上，继绳结刀刻之后最为光辉的成就，莫过于用记号代表一个数目。罗马数字就是这种进步的早期产物，这一数字系统如今已经废弃了大约五百年！

大概由于人长着两只手，而每只手有着五个指头的缘故吧！古罗马人采用了以下的符号来表示数：



I ＝ “1”　II ＝ “2”

III ＝ “3”

V ＝ “5”　X ＝ “10”

L＝ “50”　C＝ “100”

D＝ “500”　M＝ “1000”

记数时，采用加法和减法法则：即当数值较小的符号位于数值较大的符号后头时，则两个符号数值相加；反之，则数值相减。例如，“VI”表示“五加一”，即“六”；而“IV”则表示“五减一”，即“四”；等等。这样，罗马符号

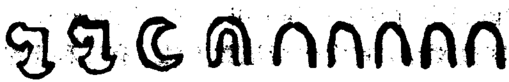
MCMLXXXVIII；

MMCXV；

MCXLII。

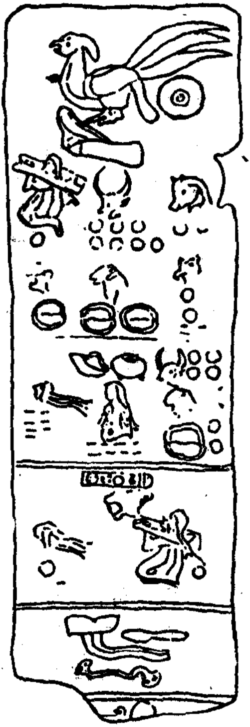
即代表着数：1988，2115，1142。

尽管上述符号有点令人肃然起敬，但就实用而言，却远比古印度和古埃及人的发明来得逊色。后者是用专门的符号反复书写一定次数的办法表示数。例如，“2115”在古埃及人写来则是：



这种古老的记号显然是十进制的：一个“𓆼”相当于十个“𓍢”；一个“𓍢”相当于十个“𓎆”；而一个“𓎆”则相当于十个“∩”。从右到左，各类符号“逢十进一”。这已经接近于

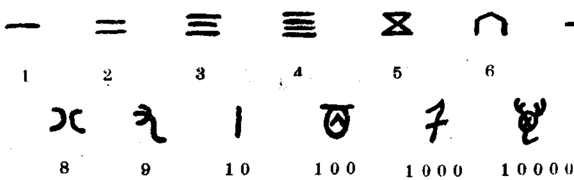
十进制数位法。难怪一当先进的阿拉伯数字系统传到欧洲，那种由罗马数字构筑起来的记数堡垒，便立即土崩瓦解，并近于消声匿迹。



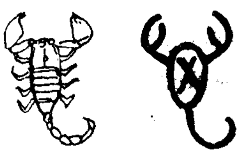
随着社会的发展和数范围的不断扩大，人们不得不想出更加简便的办法，以表示大数。有不少记号在历史上只是犹如昙花，显现一时。上图是公元一千年左右，俄国一些学者手稿中采用的记号，称为“斯拉夫数”。每个大数单位用一个字母表示，而在它的四周加上不同的边饰，以示区别。不过，自从用 10 为底指数表示的科学记数法诞生以来，人类的记数道路便就一马平川了！

类似于古埃及的记数方法，也同样出现在古代东方的中国。上图是我国云南省晋宁石寨山出土的一块青铜片。方形，下残，上有图画文字，其中包括记数方法。有三种记数符号，即“—”、“○”和“◎”，分别代表个、十和百。例如，最上一段画着一个带枷的人，下面有一个“○”和三个“—”，它表示这种带枷的人 13 个。这大约是我国少数民族创造的一种记数制。

比起罗马人和古埃及人，我们的祖先确实可以引为自豪！早在四千年前，当我国刚刚进入奴隶社会时期，就已出现了相当完善的十进制记数系统。在三千五百年前殷商时期的甲骨文中，便有从 1 到 10 的文字表示，以及“百”、“千”、“万”等相应的符号：



可以看出，上面 13 个符号中的最后三个，与中文原体字“百”、“千”、“万”的书写，已很接近。只是代表“一万”的符号，为什么如此之像一只蝎子，实在令人难以捉摸！莫非史前有一个时期，这种其貌不扬的小动物，曾经极度繁衍，肆虐一时。为此，上古人书其形，表其多，称之为“万”。事实究竟如何，只好留待史学家们去细细查考了！



2.

大数的奥林匹克

上一个故事我们讲过，原始人对数的认识是极为粗糙的。就计数本领而言，即使那时的部落智者，也难以与当今的幼儿园小朋友相抗衡！

到了上古时期，人们仍满足于一些不大的数，因为这些数对于他们的日常生活，已经是足够了！罗马数字中最大的记号是M，代表着1000。倘若古罗马人想用自已的记数法，表示如今罗马城人口的话，那可是一项极为艰巨的劳动。因为，无论他们在数学上是何等地训练有素，也只能一个接一个地写上数以千计个的M才行！

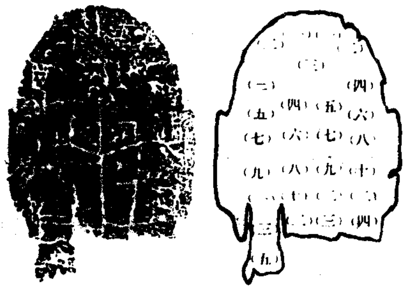
不过，罗马数字后来随社会发展的需要而有所扩大。人们在某数字的上方加一条短横，用以表示该数的一千倍。例如，$\overline{\mathrm{V}}$表示五千，$\overline{\mathrm{XC}}$表示九万等等。一天有八万六千四百秒，86400这一数字便可用上述记号写为：

$\overline{\mathrm{LXXXVI}}\mathrm{CD}$。

在三、四千年前的古埃及和古巴比伦，10^4已是很大的数。那时的人认为，这样的数已经模糊得难以想像，因而称之为“黑暗”。几个世纪以后，界限放宽到10^8，即“黑暗的黑暗”，并认为这是人类智慧所能达到的顶点！

在我们古老的国度，从约三千五百年前殷墟的考古中，人们在兽骨和龟板上的刻辞里，发现了许多数目，其中最大的竟

达“三万”。右图为出土的殷墟甲骨文字，右面是其间的数字对照。



很明显，大数的奥林匹克纪录是很难长时间地保持。历史车轮的前进是怎样影响着人类的计数史，只要看一看下面的例子就足够了！

这是历史学家鲍尔记述的有关“世界末日”的古老传说：

在世界中心贝那勒斯(印度北部的佛教圣地)的圣庙里，安放着一块黄铜板，板上插着三根宝针，细如韭叶，高约腕尺。梵天在创造世界的时候，在其中的一根针上，从下到上串上由大到小的六十四片金片。这就是所谓梵塔。当时梵天授言：不论黑夜白天，都要有一个值班的僧侣，按照梵天不渝的法则，把这些金片在三根针上移来移去，一次只能够移一片，并且要求不管在哪根针上，小片永远在大片的上面。当所有的六十四片，都从梵天创造世界时所放的那根针，移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，梵塔、庙宇和众生，都将同归于尽！这，便是世界的末日。……。

在以后的章节我们将会看到，要把梵塔上的64片金片全都移到另一根针上去，需要移动的总次数大约是：

$$1.84\times10^{19}\text{次}$$

这需要夜以继日地搬动5800亿年！想必梵天在预言的当初，也未必认真计算过。不过，上面的数字和我们将要遇到的大数相比，可的的确确小得令人悲哀！

大约公元前三世纪，大名鼎鼎的古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前287～前212），曾用他那智慧超群的脑袋，想出了一种书写大数的办法，并为此上奏当时叙拉古国王的长子格朗。这篇流芳千古的奏本，开头是这样写的：

“王子殿下：有人认为无论是叙拉古还是西西里，或其他世上有人烟和无人迹之处，砂子的数目是无穷的。另一种观点是，这个数目不是无穷的，但想要表达出比地球上砂粒数目还要大的数字是做不到的。显然，持这种观点的人肯定认为，如果把地球想象成一个大沙堆，并将所有的海洋和洞穴统统装满砂子，一直装到与最高的山峰相平。那么，这样堆起来的砂子总数是无法表示出来的。但是，我要告诉大家，用我的方法，不但能表示出占地球那么大地方的砂子数目，甚至还能表示出占据整个宇宙空间的砂子总数……”

阿基米德并没有言过其实，他果真算出了占据整个宇宙空间的砂粒总数为：10^{63}

这在当时可是一个大得足以使人吓出梦魇的数字！不过，那时阿基米德所认识的宇宙与现实的宇宙有很大不同。那个时代的天文学家错误地认为，恒星是固定在一个以地球为中心的大球面上。这个球的半径照阿基米德的数据推算，大约为1.2光年。而今天人们已经确切知道，可观察宇宙的半径在1.3×10^{10}光年以上。这一天文学上称为“哈勃”的宇宙半径，要比阿基米德的宇宙半径大大约10^{10}倍，即100亿倍。所以实