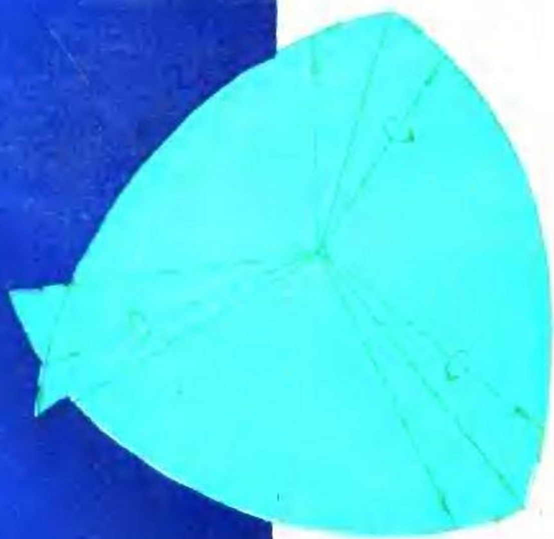
分析力学与多刚体动力学基础

边宇枢 编



机械工业出版社

分析力学与
多刚体动力学基础

边宇虹　编
杜国君　审

机 械 工 业 出 版 社

本书以高等学校工科理论力学教材为基础，对分析力学和多刚体系统动力学的基本内容进行较深入而又适度的介绍。

本书共分十一章，前七章系统地介绍了分析力学的基本概念，着重讲述了拉格朗日方程、正则方程、哈密顿原理、哈密顿-雅可比方程、正则变换及非完整系统的动力学方程。后四章介绍了矢量和张量的基本运算，讨论了刚体一般运动的运动学、动力学及多刚体动力学基础。

本书是为高等学校高年级学生和研究生讲授用的教材，亦可供有关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

分析力学与多刚体动力学基础/边宇虹编．—北京：机械工业出版社，1998.5

ISBN 7-111-06222-1

Ⅰ．分…　Ⅱ．边…　Ⅲ．①分析力学②刚体动力学　Ⅳ．031

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 06371 号

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街 1 号　邮政编码 100037）

责任编辑：吴曾评　版式设计：杨丽华　责任校对：孙美芳

封面设计：李　明　　责任印制：侯新民

北京市昌平精工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1998 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32·8⅝印张·222 千字

印数：0 001—1 000 册

定价：16.50 元

前　　言

本书是为高等学校理工科大学生和研究生讲授用的教材，它包括分析力学和多刚体动力学基础两部分。在编写过程中，力图注意对基本概念与基本理论的正确阐述。书中通过较多的例题介绍了运用分析力学的基本原理解决实际问题的一些分析技巧和方法。书中附有一定数量的习题，以便于巩固和加深对基本内容的理解与掌握,进一步培养和提高学生分析问题与解决问题的能力。

本教材可作为高等学校理工科高年级学生和研究生的教学用书，也可供有关工程技术人员参考。对于一般理工科专业的学生可按前四章的次序进行讲授，总学时数大致以 40 学时为限。对于工程力学专业的学生以及研究生则可把后七章的内容作为补充材料，总学时数以不多于 70 学时为宜。

在本书的编写和出版过程中，得到了多方面的支持、关心和帮助；杜国君同志审阅了书稿并提出了宝贵意见，在此谨表谢意。

由于编者水平所限，书中难免存在许多缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

编者对本书中所参考的有关书籍的作者表示深切的谢意。

编者

1997 年 11 月

目　　录

第一篇　分析力学

分析力学研究的对象和理论力学一样，仍然是宏观物质世界机械运动（远低于光速）的一般规律。一般说来，给分析力学下个比较完善而又和理论力学有严格区别的定义是相当困难的。为了使初学者对分析力学能有一个初步的了解，不妨把分析力学要讲的内容作一番介绍。分析力学的主要内容是：

（1）系统介绍力学中若干主要的基本原理，即力学中最基本的规律。和理论力学不同之处在于，在分析力学中所讲的那些基本原理不仅内容较深，而且有不少还是属于变分性质的原理。

（2）以基本原理为基础，进行数学演绎，从而推导出若干常用而又非常有效的力学方程，这是分析力学课程主要的内容之一。和理论力学的动力学微分方程相比，分析力学中的动力学方程（例如拉格朗日方程等）在使用时更为方便和优越。

（3）分析力学有时还把某一力学方程，或者某一动力学命题，如何从物理方面或从数学方面找出它的解（或部分解）作为课程的一个议题。即分析力学不仅局限于力学方程式或原理本身的讨论，而且对于某些可能的问题，还要从理论上阐述本命题解的存在性和找出解的办法。

分析力学的正式创立，可以从1788年拉格朗日(Lagrange)出版的《分析力学》(Mécanique Analytique）开始。在这部著作中，完全用数学分析的方法来解决所有的力学问题。在分析力学方面作出过贡献的，还有哈密顿、泊松、高斯、雅可比和莫培督等人。

和牛顿力学方法比较，分析力学具有一些显著的特点，主要表现在以下几个方面：①分析力学注重的物理量不是力和加速度，而是具有广泛意义的能量。能量是标量，所以相应的数学工具采用标量和数学分析。②牛顿力学研究的是系统的实际运动。分析

力学也是研究系统的实际运动，但它采用的方法是研究系统的许多可能的运动，从中挑选出系统真实的运动。这种思想方法是牛顿力学中没有的。③在牛顿力学中，研究对象不同，例如对质点、质点系以及不同运动类型的刚体等，求解它们运动规律的方法也是不同的。然而，在分析力学中得出的规律将具有高度的概括性和统一性，可用同一规律、同一方式去处理质点、质点系以及刚体的运动。④越是反映事物本质的普遍规律，往往更为抽象。和牛顿力学相比，分析力学令人感到十分抽象而不易理解。

长期以来，分析力学一直是天体力学、理论物理的工作者所感兴趣的对象，至于工程技术界则很少对它有兴趣。这种情况在一定程度上反映了本世纪初至30、40年代的力学发展水平。到了50年代，随着近代航空、航天、控制等工程技术的迅速发展，使得许多新的力学分支和其他一些非力学的技术科学同分析力学发生了跨边缘的联系（如：结构动力学、机电系统动力学、计算力学、运动稳定性理论、自动控制理论、非线性力学等），都或多或少地渗透了分析力学的一些原理和思想方法。所以说，从50年代后期开始，分析力学就已经越出了经典力学的圈子，逐步走向为工程技术服务的大门了。因此，当前许多工程专业的学生懂一点分析力学知识是有必要的。

第一章 分析静力学

在理论力学的静力学中，我们已经研究了应用平衡方程求解力系平衡的问题。用这种方法求解刚体系统的平衡问题比较麻烦，在一般情形下，对每个刚体可列出 6 个平衡方程，如有 n 个刚体，共可列出 $6n$ 个平衡方程。如刚体的数目多，则要求解多元的联立方程。实际上，在具体工程问题中，往往并不需要求出所有的未知约束反力。例如，在机器静力学问题中，就常常需要求出作用在系统上的主动力（如驱动力和工作阻力）之间的关系，这时要消去所有平衡方程中的约束反力，然后求出主动力间的平衡关系，显然是十分繁琐的。

理论力学中的静力学又称为**几何静力学**。在几何静力学中，以力的平行四边形法则和二力平衡条件为基础，用几何法建立了刚体平衡的必要和充分条件。这些条件对于由任意质点所组成的系统来说，则仅仅是必要的而并不总是充分的。几何静力学主要研究刚体或刚体系统的平衡问题。

这就对我们提出了一个新的任务，即如何去建立在最一般的情况下，对任意质点系统都普遍适用的平衡的必要和充分条件，以及如何使其在实际计算时又具有简捷方便的优点。本章将要介绍的就是这样一种简单而普遍有效的方法——分析静力学。这种方法的理论基础就是下面将要介绍的虚位移原理。它从更为广泛的功和能的概念出发，采用数学分析的方法，给出了任意质点系平衡的必要和充分条件。利用它，不仅可以研究任何刚体系统的平衡问题，而且还可以用来研究任意的非自由质点系（包括变形系统）的平衡问题。

分析静力学的重要意义还在于，将虚位移原理与达朗伯原理结合可导出非自由质点系的动力学普遍方程（又称为达朗伯-拉格朗日方程），这是求解非自由质点系动力学问题的重要方法。在此

方程的基础上，形成和发展了分析动力学。

为了阐明虚位移原理，先介绍一些有关的基本概念。

§1-1 约束及其分类

一、约束和约束方程

在几何静力学中，曾将限制某物体运动的周围其他物体称为约束。现在可将它作进一步的推广，**限制非自由质点系中各个质点的位置和运动的各种条件称为约束**。质点系可分为自由系统和非自由系统。不受约束作用的系统称为**自由系统**。如果把太阳系中各个星体简化为质点，则太阳系就可以视为自由质点系统。与此相反，受到约束作用的系统，则称为**非自由系统**。工程中所有的机器和机构都是非自由质点系统。

对于非自由系统来说，约束对系统中各个质点的运动提供了限制条件。这些限制条件可以用数学方程表示出来，我们把用数学方程所表示的约束关系称为**约束方程**。

二、约束的分类

根据约束对质点系限制作用的不同，可以把约束按其性质分为以下几种类型。

1. 稳定约束和非稳定约束

根据约束是否与时间参数 t 有关，可把约束分为稳定约束（又称定常约束）和非稳定约束（又称非定常约束）。所谓**稳定约束**，就是指约束的性质不随时间变化，即在这种约束的约束方程中，将不显含时间参数 t。稳定约束的约束方程一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1;\cdots;\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n)=0(j=1,2,\cdots,s) \tag{1-1}$$

式中 n 为质点系中质点的数目，s 为约束方程的数目。

所谓**非稳定约束**，就是指约束随着时间参数 t 而变化，反映在约束方程中，则是显含时间参数 t，非稳定约束的约束方程一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1;\cdots;\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n;t)=0(j=1,2,\cdots,s) \tag{1-2}$$

例如，被限制在某空间固定面上运动的质点 M，在选取了图 1-1 所示的空间直角坐标系后，质点的位置坐标（x，y，z）必须满足空间曲面方程

$$f(x,y,z)=0$$

这就是约束方程。由于方程中不显含时间变量 t，所以是稳定约束。

又如，被限制在铅直面内摆动的单摆，设单摆的原长为 l_0，若另一端拉动绳子的速度 v_0 为常数，如图 1-2 所示。在选取了图示的坐标系后，单摆中质点 M 的约束方程应为

$$x^2+y^2=(l_0-v_0t)^2$$

由于约束方程中明显地包含时间变量 t，所以是非稳定约束。

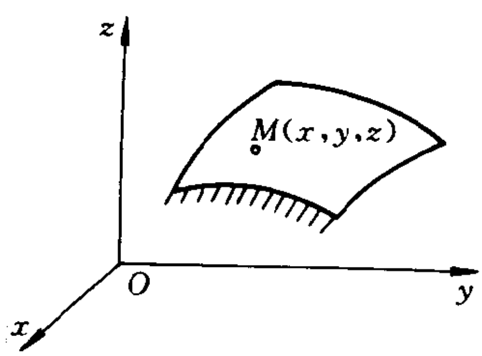


图 1-1

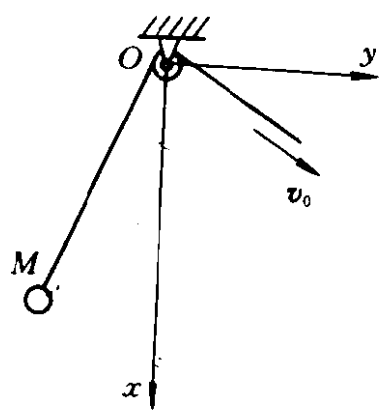


图 1-2

2. 几何约束和运动约束

根据约束方程中是否含有坐标的导数，约束可分为几何约束和运动约束。所谓**几何约束**，系指约束只限制系统中各个质点在空间的位置，即在约束方程中不显含质点坐标的导数。几何约束的约束方程一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_n,y_n,z_n;t)=0(j=1,2,\cdots,s) \tag{1-3}$$

所谓**运动约束**，系指约束对质点的运动参数（如速度、加速度等）进行限制，即在约束方程中，将显含质点坐标的导数。运

动约束的约束方程一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1;\cdots;\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n;t)=0(j=1,2,\cdots,s) \tag{1-4}$$

例如，图 1-3 所示的质点 M 由刚性杆连接，仅能在铅直平面内绕固定点 O 摆动，杆长 l 不变。取如图所示的平面直角坐标系后，这个约束条件可以表示为

$$x^2+y^2=l^2$$

这就是几何约束方程。

又如，半径为 R 的车轮沿固定直线轨道作纯滚动，取如图 1-4 的坐标系后，这个限制条件可以表示为：

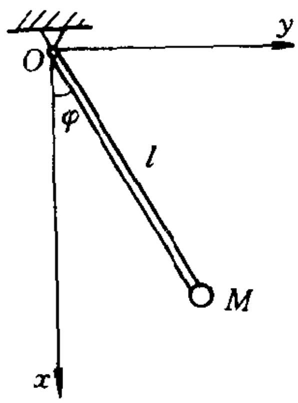


图 1-3

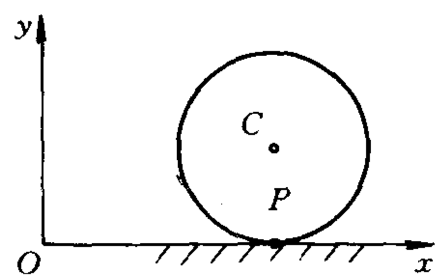


图 1-4

(1) 轮心 C 在 Oxy 平面内且与直线轨道的距离保持不变，即

$$y_C=R$$

(2) 每一瞬时，车轮上与地面的接触点 P 必为图形的速度瞬心，即

$$v_C-R\omega=0$$

或
$$\dot{x}_C-R\dot{\varphi}=0 \tag{1-5}$$

这里的第一个限制条件是几何约束，第二个限制条件就是运动约束。

在运动约束中，由于约束方程显含质点坐标的导数，因此，运动约束的约束方程是一个微分方程式（或微分方程组），如果该微分方程式（或组）是可积分的，那么，这种约束是属于**可积分的**，

例如方程式（1-5）。否则是不可积分的。而可积分的约束方程，通过积分可以转化为几何约束方程。

3. 完整约束和非完整约束

几何约束和可积分为有限形式的运动约束（这两种约束的数学形式不显含质点坐标对时间的导数），统称为**完整约束**。完整约束的约束方程一般形式如式（1-3）所示。所谓**非完整约束**，就是指不可积分的运动约束。非完整约束的约束方程一般形式如式（1-4）所示。

例如，上述单摆的约束就属于完整约束。至于前面讨论过的车轮作纯滚动时的运动约束方程 $\dot{x}_C-R\dot{\varphi}=0$ 虽是微分方程的形式，但它可以通过积分变化为 $x_C=R\varphi+K$，即可化为不显含坐标对时间导数的几何约束方程，因此，仍属于完整约束。

又如，半径为 r 的圆盘沿着水平面内某一曲线做铅垂滚动，如图 1-5 所示，下面写出圆盘的约束方程。

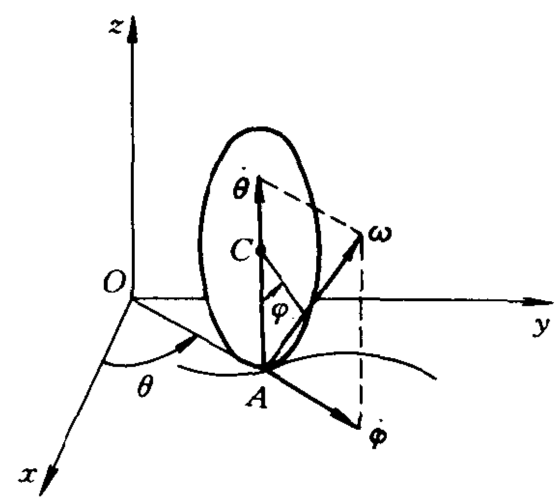


图 1-5

作直角坐标系 $Oxyz$，设 xy 平面为水平面，圆盘在运动过程中，由于盘面保持铅直，因此，圆盘中心 C（x_C，y_C，z_C）到水平面 xy 的距离保持常数，即有一个约束方程为

$$z_C=r$$

又因为圆盘做滚动，所以圆盘的瞬时转动轴恒通过圆盘和地面相接触的 A 点。而瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 有两个分量，其中一个分量为 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$，它的方向和圆盘平面垂直，且永远处于 Oxy 平面内，此分量表征圆盘滚动的快慢程度；另一个分量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$，它的方向沿着通过 A 点的直径，此分量表征圆盘滚动方向随时间的变化率。于是有

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j}+\dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

由于圆盘做纯滚动，根据圆盘上 A 点速度为零的条件，可得约束

方程如下：

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CA}=0$$

或

$$\boldsymbol{v}_C-r\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}=0$$

式中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x，y，z 轴正向的单位矢量，r 为圆盘半径。

将上式写成投影形式，即

$$\begin{cases}\dot{x}_C=r\dot{\varphi}\sin\theta\\ \dot{y}_C=-r\dot{\varphi}\cos\theta\end{cases}\tag{1-6}$$

式中，θ 角也是一个变量，它不能写成可积分的形式。所以，这是非完整约束。

非完整约束的约束方程实际上是一个常微分方程（或组）。它是系统在运动中所必须满足的运动条件，一个非完整系力学问题的定解，显然和这一组微分方程式的性质（或形式）直接有关。根据这一点，下面我们就微分方程结构形式的不同，来讨论几种非完整约束。

非完整约束按速度的幂次可分为线性非完整约束和非线性非完整约束。所谓**线性非完整约束**，就是指该非完整约束的约束方程可以展开为速度分量的线性函数。它的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ji}\dot{x}_i+b_{ji}\dot{y}_i+c_{ji}\dot{z}_i)+d_j=0(j=1,2,\cdots,s)\tag{1-7}$$

式中 a_{ji}，b_{ji}，c_{ji}和 d_j 是坐标和时间 t 的函数。例如方程式（1-6）所表示的约束就是线性非完整约束。工程中经常遇到的非完整约束，大多数都是线性非完整约束。线性非完整约束的约束方程还可以写成微分形式，即

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ji}\mathrm{d}x_i+b_{ji}\mathrm{d}y_i+c_{ji}\mathrm{d}z_i)+d_j\mathrm{d}t=0\tag{1-8}$$

所谓**非线性非完整约束**，就是指该非完整约束的约束方程不能展开为速度分量的线性函数。非线性非完整约束在工程中并不常见。

非完整约束也可以按坐标求导的次数分为一阶非完整约束和高阶非完整约束。所谓**一阶非完整约束**，是指在方程式（1-4）中，

只含有质点坐标对时间的一阶导数，而不含二阶或高阶导数。例如方程式（1-6）所表示的约束，就是一阶非完整约束。若方程式（1-4）中含有二阶或高阶导数，那么，这种约束称为**高阶非完整约束**。工程中经常遇到的非完整约束，大多数是一阶非完整约束。

一个力学系统，如果仅受到完整约束的作用，那么，这种系统称为**完整系统**。如果受到的约束有非完整约束，则这种系统称为**非完整系统**。以后我们可以看到，求解完整系统和非完整系统的力学问题，两者在方法上是不一样的，后者要困难得多。

4. 单面约束和双面约束

若质点系虽然受到约束，但在某些方向可以脱离约束的限制，则这类约束称为**单面约束**（又称**可解约束**、**非固执约束**）。单面约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1;\cdots;\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n;t)\geqslant 0(\text{或}\leqslant 0) \tag{1-9}$$

若质点系受到在任何方向都不能脱离的约束，则这种约束称为**双面约束**（又称**不可解约束**、**固执约束**）。双面约束方程的一般形式如式（1-4）所示，其约束方程是等式。

例如，一质点被限制在半径为 R 的固定球壳内运动，在选取如图 1-6 所示的坐标系后，约束方程为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$$

上式为不等式，所以是单面约束。

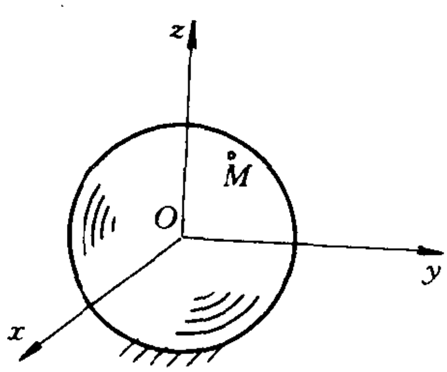


图 1-6

又如，图 1-1 中被限制在某一空间固定曲面上运动，但不能沿任何方向脱离曲面的质点 M，就是受到双面约束的限制。其约束方程为

$$f(x,y,z)=0$$

有关单面约束的力学问题，一般都可以分为双面约束和自由系统两种情况来处理。当系统在约束面上运动时，按双面约束情况进行研究；一旦系统脱离了约束的界面，则把脱离约束界面那

一瞬时以后的运动当作自由运动处理。

§1-2 自由度和广义坐标

一、完整系统的自由度

所谓某一力学系统的自由度数目，比较容易理解的就是指确定该系统位形所需的独立坐标数目。对于完整力学系统来说，其自由度数目不仅取决于系统所包含的质点的个数，而且还和系统所受的约束数目有关。例如，不受约束的单个质点，确定其位置需要三个独立坐标，即自由质点具有三个自由度。如果质点被限制在某个固定曲面 $z=f(x, y)$ 上运动，则三个坐标必须满足一个几何约束条件——曲面约束方程 $z=f(x,y)$，于是三个坐标中只有两个是独立的，即它具有两个自由度。又如，设由两个质点 M_1 和 M_2 所组成的质点系在空间运动，它们用一长为 l 的刚性杆连接，则这个质点系受到一个几何约束，其约束方程为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=l^2$$

由于这个约束的存在，使得决定整个质点系位形的六个坐标 x_1、y_1、z_1、x_2、y_2、z_2 中，只有五个可以自由地取值，即该质点系具有五个自由度。

对于 n 个质点组成的力学系统，如果系统是自由的，则位形的确定就需要 $3n$ 个独立坐标。如果系统受到 s 个完整约束的作用，在此情况下，由于这 s 个代数方程把 $3n$ 个坐标联系在一起，所以，在这 $3n$ 个坐标中独立坐标只有 $(3n-s)$ 个。因此，如果以 k 代表此系统的自由度数目，则有下述关系式成立，即

$$k=3n-s \tag{1-10}$$

式中，n 表示系统的质点数，s 表示系统的完整约束方程数。

二、广义坐标

在工程实际中所遇到的非自由系统，通常是质点的数目和完整约束的数目都比较多。这时，如果用 $3n$ 个直角坐标和 s 个完整约束方程联立来确定系统的位形将会很不方便。如果能够适当地选择 $k=3n-s$ 个独立的参数来确定系统的位形，则往往要简便得