高等数学简介

# 无穷小分析

WUQIONGXIAO FENXI

〔[illegible]〕[illegible] 著 [illegible] 译

吉林人民出版社

高等数学简介

# 无穷小分析

〔苏〕Л. С. 庞特里亚金 著

李万年 译

吉林人民出版社

Лев Семенович Понтрягин

ЗНАКОМСТВО С ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКОЙ

АНАЛИЗ БЕСКНЕЧНО МАЛЫХ

ИЗД.НАУКА,М.,1980

高等数学简介

# 无穷小分析

〔苏〕Л.С.庞特里亚金 著

李万年 译


*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

东北师范大学印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 8.125印张 179,000字

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数：1—4,890册

统一书号：13091 · 163 定价：0.94元

# 内 容 提 要

本书专门讲述数学分析的某些问题。虽然其中的讲述不是容易的，但是预计它仍可以作为醉心于数学的青年读者容易弄懂的书。同时讲述实变函数理论和复变函数理论是本书突出的特点。

# 目　录






此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor

# 序

我以“高等数学简介”的冠题出版了四本比较通俗的书，本书是其中的第二本。第一本书《坐标法》已于1977年完成了，这第二本书专门讲述数学分析的基本事实。

本书的讲述处处同时考察实的和复的两种情况，这是可能的。首先把这一点列入数列和级数收敛性的定义之内，特别列入幂级数收敛性的定义之内。正是这样，对实变函数和复变函数同时给出导数的定义，因为对这两种情况来说它在形式上是一样的。原函数的概念对实变函数和复变函数也是同样定义的。还同时证明原函数精确到被加常数的唯一性。这样的叙述方法可能比较容易给出本书中所包含的复变函数论的基本结果，并构成本书的第四章。这一章是本书的一部份重要成果，直到引出象罗朗级数和孤立奇点附近函数的性状那样的比较复杂的结果。

我认为组成实变函数论的那些分析问题最没有趣味，没力把它们移到以后的计划中去。我没有取消它们的地位，而是分散在有必要讲述它们的小册子中。

复变数$z$的函数exp（$z$）的研究占据了第一章的中心位置。这个函数用幂级数

$$\exp(z)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad (1)$$

给出。证明在实数值$z=x$处我们有等式

$$\exp(x)=e^x,$$

而对纯虚数值 $z=iy$ 有公式

$$\exp(iy)=\cos y+i\sin y.$$

这样一来，不用微分学，我们立刻得到基本超越函数 $e^z$，$\cos y$，$\sin y$ 的幂级数展开式。

应该注意以下情况。当我们证明某一个随便什么样的已知函数展开为幂级数时，为此则只要证明级数收敛于某一个确定的数——函数值。如果我们还想用级数（见（1））确定函数本身，为此则需要证明级数收敛，对此必须利用柯西收敛准则并给出数的确切定义。所有这些资料均在第一章中阐述。

第二章专讲微分学的基本结果。首先对实变函数和复变函数同时定义导数，并引入作为微分法运算的逆运算的积分法的概念。证明带有积分型余项的泰勒公式作为本章的完成。

第三章专讲积分学，在这一章中积分首先直观地定义为由图形所围成的面积的值，并证明这样定义的积分是给出图形的函数的原函数。其次十分确切又精细地把积分定义为有穷和序列的极限。

这就是本书的基本内容。

引言分为两部分。在第一部分中提示能够从《坐标法》一书中获得的某些最简单的概念。在第二部分“历史的探索”中，给出数学分析发展史的十分简略而又不完整的描述。阅读本书并不要求具有中学毕业的数学水平。在这里所用到某些重要的初等数学公式——几何级数的和，牛顿二项式——书中都被证明，所以高年级中学生能够弄懂这本书。但是本书不是容易阅读的，它需要不少数学技巧。我希望本书能够作为在集合论“毒害”中的解毒剂。灌输集合论的作者

断言，集合论对科学技术的进步是重要的，又是数学的最新成就。实际上，集合论与科学技术的进步没有任何共同点，也不是数学的最新成就。比如说，集合论体系导出象用术语“合同”代替术语几何图形“全等”以及把向量定义为“空间的平行移动”那样的奇怪现象。

最后，我对 B. P. 捷列斯尼娜在本书的编写中所给予的帮助表示感谢，也对出版社的正式评论者 E.M. 尼基希娜表示感谢，我采用了她对本书所提出的绝大部分意见。

# 引　　言

这里首先给出需要牢记的为数不多的数学事实，这些数学事实可以在我的小册子《坐标法》中找到．其次给出历史的探索，十分简略而又不完整地叙述数学分析产生的历史过程．

## 牢记平面笛卡儿直角坐标

在某一平面 $P$ 内，我们选取两条互相垂直的直线，用 $O$ 表示它们的交点．为确定起见，我们认为平面 $P$ 是我们的图形（图 1）所在的平面，所选取的直线中的一条是水平的，而另一条是竖直的．水平直线称为横坐标轴，而竖直直线称为纵坐标轴．这一对轴简称为坐标轴，而点 $O$ 称为坐标原点．

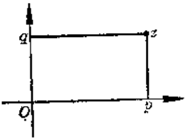

图 1

现在设 $z$ 是平面 $P$ 上的某一点．利用所选取的坐标轴，给这一点对应两个数 $x$ 和 $y$：$x$是它的横坐标，$y$ 是它的纵坐标．为此，由点 $z$ 作横坐标轴的垂线 $zp$ 和纵坐标轴的垂线 $zq$．如果点 $p$ 位于坐标原点 $O$ 的右边，那么我们用 $x$ 表示线段 $Op$ 的长，即正数．如果点 $p$ 位于坐标原点 $O$ 的左边，那么用 $x$ 带上负号表示线段 $Op$ 的长，即 $x$ 为负数．如果点 $p$ 与坐标原点$O$重合，那么$x=0$．类似地，如果点 $q$ 位于坐标原点的

上面，那么我们用 $y$ 表示线段 $Oq$ 的长，即为正数。如果点 $q$ 位于坐标原点的下面，那么用 $y$ 表示线段 $Oq$ 的长带上负号，即为负数。如果点 $q$ 与坐标原点重合，那么 $y=0$。这样一来，平面 $P$ 上的每一点 $z$ 在选定的坐标系下就与数对 $x$ 和 $y$ 相对应，$x$ 为点的横坐标，$y$ 为点的纵坐标。以公式形式把这一点记为

$$z=(x,\ y). \qquad (1)$$

数 $x$ 和 $y$ 称为点 $z$ 的坐标。

如果给定的两个任意的数 $x$ 和 $y$，那么在平面 $P$ 上容易作出唯一的点 $z$，它的横坐标等于给定的数 $x$，而纵坐标等于给定的数 $y$。

如果点 $z$ 沿着横坐标轴从左向右运动，那么它的横坐标是递增的。所以说，横坐标轴的指向从左向右。在同样的意义下，纵坐标轴的指向从下往上。

设 $z_1=(x_1,\ y_1)$ 和 $z_2=(x_2,\ y_2)$ 为平面 $P$ 上的两点，分别用自己的坐标给定。点 $z_1$ 和 $z_2$ 之间的距离我们用 $l(z_1,\ z_2)$ 表示，它由公式

$$l(z_1,\ z_2)=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2)$$

确定。

现在适宜转到考察向量，许多公式的记法利用向量远比用坐标简单。

设 $a$ 和 $b$ 是平面 $P$ 上的两点。照例说，确定了方向的线段 $ab$，即方向为从 $a$ 到 $b$ 的线段 $ab$ 是向量 $ab$。点 $a$ 称为向量的起点，而点 $b$ 称为向量的终点。也说向量 $ab$ 附着于点 $a$。如果 $c$ 和 $d$ 是平面 $P$ 上另外两个无论什么样的点，若线段 $ab$ 等于线段 $cd$：1）长相等，2）平行，3）方向相同，那么就认为向量 $ab$ 等于向量 $cd$。



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor

显然，对于每一个向量$ab$，都可以找到从坐标原点出发的与它相等的向量。我们用 $z$ 表示它的终点，因此向量 $ab$ 和 $Oz$相等。我们大体上将局限于考察起始于坐标原点 $O$ 的向量。这样的向量我们将用一个字母表示，即向量 $Oz$ 将用一个字母 $z$ 简单表示。这本身就建立了从坐标原点出发的向量和平面 $P$ 上的点之间的一一对应，即使每一个向量 $Oz$ 与它的端点 $z$ 相对应。

现在，我们定义两个向量的加法运算。考察平面$P$上的两个向量 $z_1$ 和 $z_2$。这里所指的是 $z_1$ 和$z_2$ 为起始于点 $O$ 的向量的终点（图 2）。为了定义向量的和 $z_1+z_2$，我们从点 $z_1$ 引向量$z_1z_3$等于向量$z_2$。向量 $Oz_3$ 或者同一个向量$z_3$就是向量$z_1$和$z_2$根据定义的和：

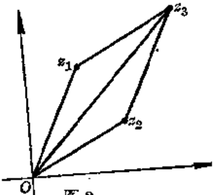

图 2

$$z_3=z_1+z_2.$$

在和 $z_1+z_2$ 的构造中，向量 $z_1$ 和 $z_2$ 是不平等的，但是容易证明

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

向量的减法定义为加法的逆运算。

在所有的向量中，有一个起点和终点都在点 $O$ 的零长度的向量。它用 0 符号标记。这个向量具有以下性质：

$$z+0=z.$$

确定向量的线段的长称为这个向量的模，并用专门的方式标记，就是

$$|z|=l(O,\ z).$$

成立重要的不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (3)$$

考察三角形 $Oz_1z_2$（见图 2）应得出这个不等式.

除了向量的加法和减法运算以外，还存在一个重要的向量运算，即向量乘以数. 如果$\alpha$为某一个数，$z$ 为向量，那么为了定义积

$$z'=\alpha z$$

我们引出过点$O$和 $z$ 的直线 $L$. 如果$\alpha$是正数，那么在直线 $L$ 上从点$O$开始截取线段 $Oz'$，其长度等于$\alpha|z|$，其方向在点 $O$ 的同一边，即线段 $Oz$ 所在的一边. 这条线段的终点 $z'$ 就是向量$\alpha z$. 如果数$\alpha$是负的，那么在直线 $L$ 上从点 $O$ 开始截取长为 $|\alpha||z|$ 的线段 $Oz'$，但截取的方向和线段 $Oz$ 所在的方向相反. 这条线段的终点 $z'$ 就是向量 $\alpha z$. 如果 $\alpha=0$ 或者 $z=0$，那么向量 $\alpha z$ 是零向量.

现在我们引入向量坐标的概念. 因为对我们来说 $z$ 同时既是点又是向量，那么自然认为点 $z$ 的坐标同时也是向量 $z$ 的坐标. 所以，我们能够记为

$$z=(x,\ y),$$

其中 $z$ 是向量，而$x$，$y$是它的坐标，即点$z$的坐标.

现在我们用坐标写出上述向量的运算，这些运算仅是纯几何地定义的. 除了向量 $z$ 以外，我们记为坐标形式的还有两个向量

$$z_1=(x_1,\ y_1),\ z_2=(x_2,\ y_2).$$

那么我们有

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2), \qquad (4)$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2), \qquad (5)$$

$$|z|=+\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (6)$$

$$\alpha z=(\alpha x,\ \alpha y). \qquad (7)$$

这些公式是容易证明的。

**极坐标**．在我们的平面 $P$ 上，我们已经有笛卡儿直角坐标系，即横坐标轴、纵坐标轴和坐标原点．与这个坐标系紧密联系的是极坐标系．设 $z=(x, y)$ 是平面 $P$ 上由自己的笛卡儿坐标给定的任意一点．现在使这一点 $z$ 对立两个另外的数——它的极坐标，即数 $\rho$，等于线段$Oz$的长，$\rho=l(O, z)$，和数 $\varphi$，等于横坐标轴的正半轴和线段 $Oz$ 之间的角值，并且角按逆时针方向计算（图 3）．我们将记

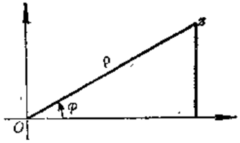

图 3

$$z=[\rho, \varphi].$$

数 $\rho$ 称为点 $z$ 的极径，而数 $\varphi$ 称为它的极角。

点 $z$ 的极径是唯一确定的．点 $z$ 的极角 $\varphi$ 当 $z$ 与坐标原点重合时是不确定的．但是在那样的情况下，当点 $z$ 不与坐标原点重合时，极角 $\varphi$ 也不是唯一确定的．就是说，如果 $\varphi$ 是点 $z$ 的极角，那么 $\varphi+4kd$ 也是点 $z$ 的极角，其中 $k$ 为任意整数，而 $d$ 为直角值．

同时利用笛卡儿坐标和极坐标，我们应该不可避免地提出它们之间的关系问题．点 $z=(x, y)=[\rho, \varphi]$ 的笛卡儿坐标和极坐标之间通过下述公式相联系（见图 3）：

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi. \tag{8}$$

利用两个向量$z_1=[\rho_1, \varphi_1]$和$z_2=[\rho_2, \varphi_2]$的极坐标，可以定义它们的数量积 $z_1\cdot z_2$．根据定义

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\rho_1\rho_2\cos\gamma, \tag{9}$$

其中 $\gamma$ 是向量 $z_1$ 和 $z_2$ 之间的夹角，数 $\gamma$ 的符号不起作用．利用极坐标和笛卡儿直角坐标之间的联系公式（8），我们

得出表达式

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{10}$$

它给出用向量的笛卡儿坐标表示的数量积。

**复数的几何表示**。笛卡儿坐标还给出一种确定点和数之间的联系的可能性，就是说，它们能够几何地表示复数并进行运算。

大家知道，复数是因为不能够得出负数的平方根而产生的。所以形式地引入新的数 $i$，满足方程

$$i^2 + 1 = 0.$$

因此

$$\sqrt{-1} = \pm i,$$

且用公式

$$z = x + iy \tag{11}$$

定义复数 $z$，其中 $x$ 和 $y$ 为通常的数，我们已经习惯于这种数，但现在这种数不同于复数，我们将称为实数。我们开始导入复数的一般运算——加法，乘法以及它们的逆运算：减法和除法。在所有这些计算中都用 $-1$ 代替 $i^2$，这样一来，得到进行复数运算的可能性，所有这些运算象以前的实数运算那样不受约束。

我们更加形式地定义复数的运算。设

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

为两个复数，那么它们的和由公式

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{12}$$

定义。两个复数 $z_1$ 和 $z_2$ 的积由公式

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned} \tag{13}$$

定义。

记为形式（11）的复数 $z$，其本身已经允许在我们的平面 $P$ 上引入笛卡儿坐标。可以把它表示为具有坐标 $(x, y)$ 的点 $z$，或者同样的表示为具有坐标 $(x, y)$ 的向量 $z$，即 $z=(x, y)$。在平面 $P$ 上给复数 $z$ 以点的形式，这样的平面 $P$ 称为复变数 $z$ 的平面。

形如

$$z=x+i0=x$$

的复数现在合理地称为实数。它们全部处在横坐标轴上，因此复变数 $z$ 的平面的横坐标轴我们称为实轴。形如

$$z=0+iy=iy$$

的复数我们称为纯虚数或者简称为虚数，它们处在纵坐标轴上。因此，复变数 $z$ 的平面的纵坐标轴我们称为虚轴。复数 $z=0+i0$ 落到坐标原点上。实数 $+1$ 和 $-1$ 分别在实轴的右边和左边，到零点的距离为一个单位。虚数 $+i$ 和 $-i$ 分别在虚轴的上边和下边，到零点的距离为一个单位。

现在我们用点 $z$ 的极坐标表示复数 $z$，因为由公式（8）

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

那么公式（11）确定的复数 $z$ 记为

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{14}$$

复数 $z$ 的这种表示称为三角形式。非负数 $\rho$ 称为复数 $z$ 的模，而角 $\varphi$ 称为它的辐角。数 $\rho$ 是由复数 $z$ 唯一确定的，并用专门符号

$$|z|=\rho=+\sqrt{x^2+y^2}$$

表示。应该重新提醒，复数 $z$ 的辐角 $\varphi$ 不是唯一确定的，就是说当 $|z|=0$ 时它总是不确定的，而如果 $|z|\neq 0$ 且 $\varphi$ 是复

数 $z$ 的辐角，那么除这个 $\varphi$ 值以外，数 $\varphi+4kd$ 也是辐角，其中 $k$ 为任意整数。

利用公式（12）和（13），我们给出复数的加法和乘法运算的几何解释。

要把两个复数$z_1$和$z_2$相加，由公式（4）和(12) 可得，只要把表示它们的向量 $z_1$ 和 $z_2$ 相加。这时得出的向量和 $z_3=z_1+z_2$ 就表示复数的和$z_1+z_2$。因为对向量存在着加法的逆运算即减法运算，所以对复数也存在加法运算的逆运算即减法运算。我们通过复数加法的几何解释导出重要的不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

为了给出复数 $z_1$，$z_2$ 的乘法的几何解释，我们把这两个数和它们的积 $w$ 记为三角形式，即

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$

$$z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

$$z_1z_2=w=\sigma(\cos\phi_2+i\sin\phi).$$

我们利用已知的三角公式计算三角形式的积．现在我们得到

$$\begin{aligned}w=z_1z_2=\rho_1\rho_2[(&\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]\\=\rho_1\rho_2[&\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\end{aligned}$$

或者最后得到

$$\begin{aligned}&\sigma(\cos\phi+i\sin\phi)\\&=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\end{aligned}\tag{15}$$

这样一来，

$$\sigma=\rho_1\rho_2,\quad \phi=\varphi_1+\varphi_2\tag{16}$$

这就是说，当复数 $z_1$ 和 $z_2$ 相乘时，它们的模 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 相乘，而它们的幅角 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 相加。



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor