中学数理化读物

# 数学习题集

（几何 三角部分）

北京出版社

中学数理化读物

# 数　学　习　题　集

（几何、三角部分）

《数学习题集》编写组



北　京　出　版　社

中学数理化读物
数学习题集
（几何　三角部分）
《数学习题集》编写组
*
北京出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷二厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　5.5印张　110,000字
1979年7月第1版　1979年7月第1次印刷
印数1—50,000
书号：7071·598　定价：0.39元

# 编 辑 说 明

为了帮助广大知识青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料，以及习题集等不同种类的数学、物理、化学等方面的书籍。

在编写时，从实际出发，参照了中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过学习这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

# 目　录

# 平面几何部分

## 一、直线形

**例 1** 如图 1，已知：$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，$E$ 是 $AD$ 上一点．求证：$\angle EBD=\angle ECD$．

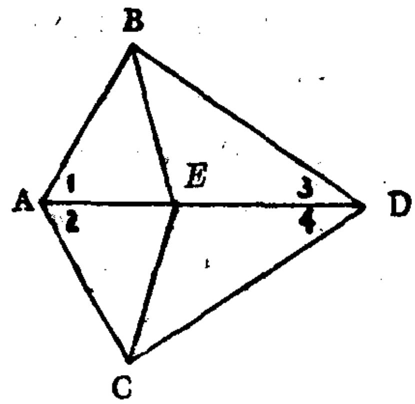


图 1

**证明** 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$\because$ $AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，

$AD=AD$，

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，

(边，角，边)

$\therefore$ $DB=DC$，$\angle 3=\angle 4$．

(全等三角形对应边、对应角相等)

又在$\triangle DBE$和$\triangle DCE$中，

$DB=DC$，$\angle 3=\angle 4$，$DE=DE$，

$\therefore$ $\triangle DBE\cong\triangle DCE$，(边，角，边)

$\therefore$ $\angle EBD=\angle ECD$．(全等三角形对应角相等)

此题亦可从$\triangle ABE\cong\triangle ACE$入手证明．

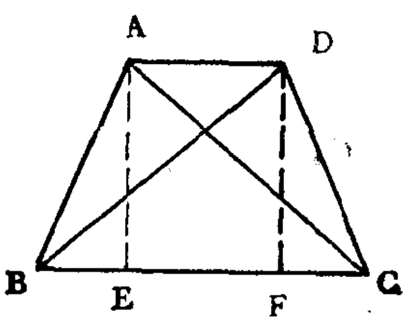


图 2

**例 2** 证明：对角线相等的梯形是等腰梯形．

**证明** 如图 2，过 $A$、$D$ 分别作 $BC$ 的垂线交 $BC$ 于 $E$、$F$．

在$\triangle AEC$和$\triangle DFB$中，

$\because$ $AD \parallel BC$，

$\therefore$ $AE=DF$.(平行线间的距离相等)

又$\because$ $AC=BD$，

$\therefore$ $\triangle AEC \cong \triangle DFB$，(直角边，斜边)

$\therefore$ $\angle ACE=\angle DBF$.

又在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，

$\because$ $AC=BD$，$\angle ACB=\angle DBC$，$BC=BC$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$，(边，角，边)

$\therefore AB=CD$，梯形$ABCD$等腰.

此题亦可自$D$作$DM \parallel AC$交$BC$延长线于$M$，以证明$\angle ACB=\angle DBC$，然后证$\triangle ACB \cong \triangle DBC$。

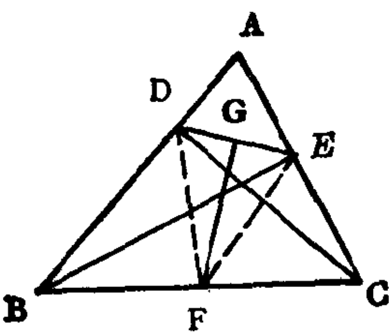


图 3

**例 3** 已知：$\triangle ABC$中，$CD$、$BE$是$AB$、$AC$边上的高，$F$是$BC$的中点，$FG \perp DE$于$G$。求证：$DG=GE$.(图 3)

**证明** 连接$DF$、$EF$，

$\because$ $CD \perp AB$，$BE \perp AC$，

$\therefore$ $\triangle DBC$和$\triangle ECB$都是直角三角形.

又$F$是$BC$的中点，

$$\therefore\ DF=\frac{1}{2}BC,\quad EF=\frac{1}{2}BC,$$

(直角三角形斜边上中线等于斜边的一半)

$\therefore$ $DF=EF$，$\triangle DFE$是等腰三角形.

又$FG \perp DE$于$G$，

∴　$DG=GE$.（等腰三角形底边上的高线也是底边的中线）

**例 4**　证明：以任意四边形各边中点为顶点的四边形是平行四边形.

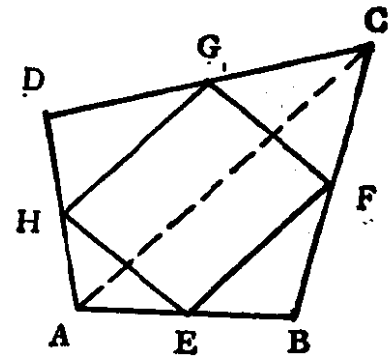


图 4

**证明**　如图 4，$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是四边形 $ABCD$ 中 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的中点.

连接 $AC$，在 $\triangle ABC$ 中，

∵　$E$、$F$ 分别是 $AB$，$BC$ 的中点，

∴　$EF \parallel AC$ 且 $EF=\frac{1}{2}AC$.

（三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半）

同理，在 $\triangle DAC$ 中，

$HG \parallel AC$ 且 $HG=\frac{1}{2}AC$.

∴　$HG \mathrel{\underline{\parallel}} EF$，

∴　$EFGH$ 是平行四边形.

（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）

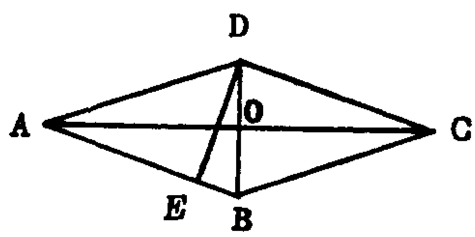


图 5

**例 5**　菱形两对角线的长等于 24 厘米和 70 厘米，求菱形的面积与高.（图 5）

**解**　在菱形 $ABCD$ 中，作 $DE \perp AB$ 于 $E$，$DE$ 就是菱形的高；设 $S$ 为菱形的面积. 又设菱形对角线交于点 $O$.

则　　$AC \perp BD$，$AO=OC$，$BO=OD$；

（菱形对角线互相垂直平分）

又　$AC=70$（厘米），$BD=24$（厘米），

∴　$AO=35$，$BO=12$.

∴　$S=2\,AO\times OB=840$（厘米$^2$）.

∵　$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=37$，

而　$S=AB\times DE=37\,DE=840$，

∴　$DE=22\frac{26}{37}$（厘米）.

答：菱形面积是 840 厘米$^2$，高是 $22\frac{26}{37}$厘米.

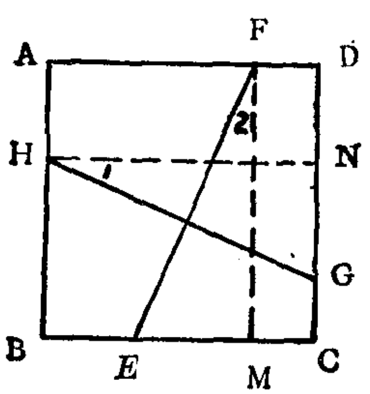


图 6

**例 6**　已知在正方形 $ABCD$ 中，两互相垂直的直线 $HG$、$EF$ 与正方形各边交于 $H$、$G$、$E$、$F$. 求证：$HG=EF$.（图 6）

**证明**　作 $FM\perp BC$ 于 $M$，$HN\perp CD$ 于 $N$.

∵　在正方形 $ABCD$ 中，

$AD \overset{\parallel}{=} BC$，$AB \overset{\parallel}{=} CD$，

而且 $AD\perp CD$，$DC\perp BC$，

∴　$HN=AD$，$FM=DC$.（平行线间距离相等）

∵　$HG\perp EF$，$FM\perp HN$，∴　$\angle 1=\angle 2$，

（一锐角两边和另一锐角两边分别垂直，则两角相等）

即　直角 $\triangle HNG\cong$直角 $\triangle FME$，

∴$HG=EF$.

此题亦可自 $A$、$B$ 分别作 $HG$、$FE$ 的平行线，再根据三角形全等的条件证得所需结论.

**例 7** 在$\triangle ABC$的两边$AB$、$BC$上各向外作正方形$ABDE$与$BCFG$. $BH$是$AC$边上的中线. 求证: $DG=2BH$.(图 7)

**证明** 延长$BH$至$M$，使$HM=BH$，连接$CM$.

$\because$ $CH=HA$, $BH=HM$, $\angle 1=\angle 2$,

$\therefore$ $\triangle BAH\cong\triangle MCH$,

$\therefore$ $CM=AB$, $\angle M=\angle ABH$.

$\therefore CM \parallel BA$, $\angle BCM+\angle ABC=180°$.

而$ABDE$和$BCFG$都是正方形,

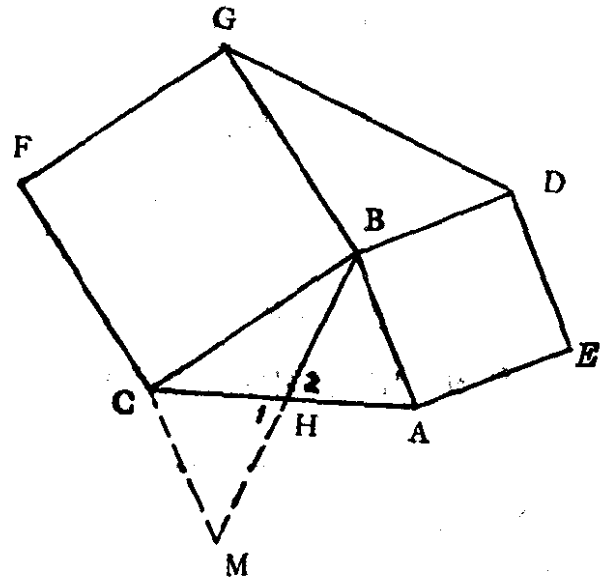


图 7

$\therefore \angle DBG+\angle ABC=180°$.

又 $\angle BCM+\angle ABC=180°$,

$\therefore$ $\angle BCM=\angle DBG$.

$\therefore$ $\triangle DBG\cong\triangle MCB$,

$\therefore$ $DG=BM=2BH$.

**例 8** 如图 8，已知四边形$ABCD$中，$AB=CD$，$E$、$F$分别为$BC$、$AD$的中点，$BA$及$EF$的延长线交于$M$，$CD$及$EF$的延长线交于$N$. 求证:

$\angle AMF=\angle DNF$.

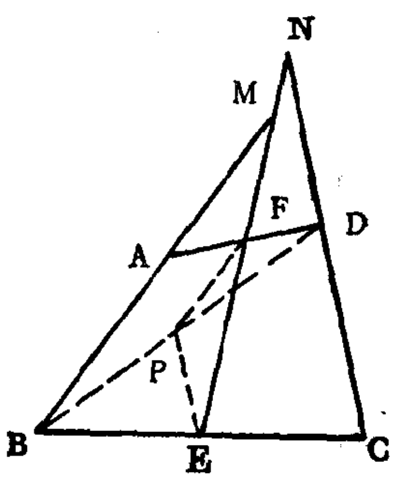


图 8

**证明** 连接 $BD$，取 $BD$ 中点 $P$，连接 $PF$、$PE$。

$\because$ $E$，$F$ 分别是 $BC$，$AD$ 的中点，

$\therefore$ $PE \parallel CD$ 且 $PE=\frac{1}{2}CD$；

$PF \parallel AB$ 且 $PF=\frac{1}{2}AB$。

又 $\because$ $AB=CD$，

$\therefore$ $PE=PF$，$\angle PFE=\angle PEF$.

又 $\angle PFE=\angle AMF$，$\angle PEF=\angle DNF$，

$\therefore$ $\angle AMF=\angle DNF$.

**例 9** 由矩形的顶点向对角线所作的垂线将对角线分为1:3的两部分；已知对角线的交点距大边为2米，求对角线的长及对角线与大边的夹角。(图 9)

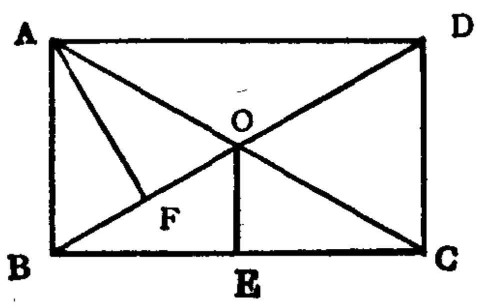

图 9

**解** 在矩形 $ABCD$ 中，$AF\perp BD$ 于 $F$，$OE\perp BC$ 于 $E$。

$\because$ $BF:FD=1:3$,

$\therefore$ $BF:BD=1:4$，即 $BF=\frac{1}{4}BD$。

又 $BO=\frac{1}{2}BD$,

$\therefore$ $BF=\frac{1}{2}BO$，即 $BF=FO$。

而 $AF\perp BO$ 于 $F$，$\therefore$ $AO=AB$。

又 $AC=BD$,

$\therefore$ $BO=AO=AB$, $\triangle AOB$是等边三角形，$\angle BAO=60°$,

$\therefore$ $\angle ACB=90°-60°=30°$.

$\because$ $O$ 是 $AC$ 中点，$OE \parallel AB$,

$\therefore$ $OE=\frac{1}{2}AB$, $AB=2OE$,

$\therefore$ $AB=OA=OB=2\times2=4$(米),

$\therefore$ $BD=AC=2OA=8$(米).

答：矩形对角线长 8 米，与大边的夹角为 30°.

**例 10** 在正方形 $ABCD$ 中，$E$ 在 $CD$ 上，且 $AE=EC+BC$，$M$ 是 $CD$ 的中点. 求证：$\angle BAE=2\angle DAM$.(图 10)

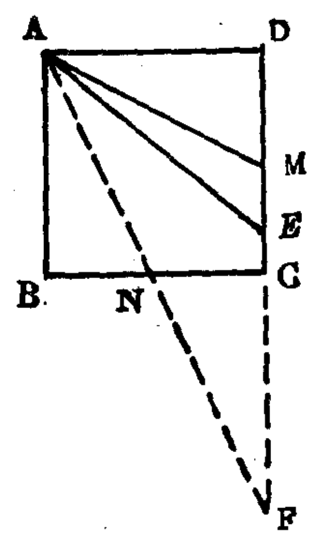


图 10

**证明** 作 $\angle BAE$ 的平分线，交 $BC$ 于 $N$，交 $DC$ 延长线于 $F$.

$\because$ $AB \parallel CD$,

$\therefore$ $\angle BAF=\angle F$, 又$\angle BAF=\angle FAE$,

$\therefore$ $\angle F=\angle FAE$,

$\therefore$ $AE=EF$.

而 $AE=BC+EC$,

$\therefore$ $EF=BC+EC$, $BC=CF$.

$\therefore$ $\triangle ABN\cong\triangle FCN$, $BN=NC$, $N$是 $BC$的中点.

又 $M$ 是 $CD$ 的中点，$ABCD$ 是正方形，

$\therefore$ $\triangle ABN\cong\triangle ADM$,

$\therefore\quad \angle BAN=\angle DAM,$

$\angle BAE=2\angle BAN=2\angle DAM.$

## 练 习 一

1. 证明：两条平行直线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行。
2. 证明：两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角的平分线互相垂直。
3. $\triangle ABC$ 中，$\angle B$、$\angle C$ 的平分线交于 $O$ 点，$\angle A=58°$，求 $\angle BOC$ 的度数。
4. 在锐角三角形 $ABC$ 中，$BD\perp AC$ 于 $D$，$CE\perp AB$ 于 $E$，$BD$、$CE$ 交于 $F$，$\angle BFC=129°$，求 $\angle A$ 的度数。
5. 将多边形的各边顺次延长，在各顶点处得一外角，求证这些外角的和恒为 360°。
6. (1) 已知一个正多边形的内角为 144°，这个正多边形是几边形？
   (2) 已知一个多边形的内角和等于外角和（每个顶点各取一个外角），求它的边数。
7. $\triangle ABC$ 是等边三角形，$D$是$AC$ 的中点，$E$是$BC$ 延长线上一点，且$CE=CD$. 求证：$\triangle BDE$是等腰三角形.
8. 等腰三角形的底边为 $a$，顶角是底角的 4 倍，求这个三角形各角的度数和腰上的高.
9. 求证：

(1) 等腰三角形两腰中点到底边的距离相等；

(2) 等腰三角形底边中点到两腰的距离相等.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $\angle A$ 的平分线，$DE \parallel AC$ 交 $AB$ 于 $E$，$EF \parallel BC$ 交 $AC$ 于 $F$. 求证：$AE = FC$.

11. 已知 $\square ABCD$ 中，对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于 $O$，直线 $EF$ 过 $O$ 点，交 $AB$ 于 $E$，交 $CD$ 于 $F$. 求证：$OE = OF$.

12. 已知正方形 $ABCD$，延长 $BC$ 到 $E$，在 $CD$ 上截取 $CF = CE$，延长 $BF$ 交 $DE$ 于 $G$. 求证：$BG \perp DE$.

13. 求证：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

14. $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，$E$、$F$ 分别是 $AB$、$AC$ 的中点. 求证：$AD$ 和 $EF$ 互相平分.

15. 求证：

(1) 顺次连接矩形四边中点组成的四边形是菱形；

(2) 顺次连接菱形四边中点组成的四边形是矩形.

16. 以 $\triangle ABC$ 的两边 $AB$ 和 $BC$ 作一边，各向三角形外作正方形 $ABFG$ 和 $CBDE$. 求证：$AD = CF$.

17. 求证：任意四边形对边中点连线必互相平分.

18. 求证：等腰三角形的底边与一腰上的高所夹的角，等于顶角的一半.

19. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于 $D$，$CF \perp AB$ 于 $F$，$AD$ 与 $CF$ 交于 $G$，且 $GC = AB$. 求证：$\angle ACB = 45°$.

20. $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 10$ 厘米，$\angle B = 15°$，自 $C$ 作 $CD \perp AB$，交 $BA$ 的延长线于 $D$，求 $CD$ 与 $BD$ 的长.

## 习 题 一

21．求证：正五角星的内角等于36°．

22．$\triangle ABC$中，$D$是$AB$的中点，$AD=AC$；又知$E$是$AD$的中点．求证：$EC=\frac{1}{2}BC$．

23．两个三角形中，两边及第三边上的中线对应相等，求证这两个三角形全等．

24．在$\square ABCD$中，$E$、$F$分别是$AB$、$CD$的中点，$DE$、$BF$与对角线$AC$交于$G$、$H$两点．求证：$AG=GH=HC$．

25．$\triangle ABC$中，$AB=AC$；在$AB$上取$D$点，在$AC$的延长线上取$E$点，使$CE=BD$，$DE$交$BC$于$F$．求证$DF=FE$．

26．在$\square ABCD$中，$O$为对角线$AC$的中点．过$O$作直线交$AB$于$G$，交$CD$于$F$，交$AD$延长线于$E$，交$CB$延长线于$H$．求证：$EF=GH$．

27．在直角梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AB\perp BC$，$E$是$CD$的中点．求证：$AE=BE$．

28．在直角三角形$ABC$中，$\angle A=90°$．$\angle B$的平分线交$AC$于$D$，自$A$作$AE\perp BC$交$BD$于$E$，自$D$作$DF\perp BC$于$F$．求证$AEFD$是菱形．

29．在直角三角形$ABC$中，$\angle A=90°$．$\angle C$的平分线交$AB$于$E$，交$BC$上的高$AD$于$O$，过$O$引$OF\parallel BC$交$AB$于$F$．求证$AE=BF$．

30．求证：矩形各内角平分线围成一个正方形．

31．求证：梯形 $ABCD$ 两对角线 $AC$、$BD$ 中点的连线 $FE$ 平行于底边 $BC$，且等于两底之差的一半．

32．在 $\square ABCD$ 中，平行于 $AB$ 的直线交 $BC$ 于 $P$，交 $AD$ 于 $Q$，$M$ 为 $AP$ 和 $BQ$ 的交点，$N$ 为 $DP$ 和 $CQ$ 的交点．求证：$MN \parallel AD$，且 $MN=\frac{1}{2}AD$．

33．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，$AD$ 平分 $\angle A$ 交 $BC$ 于 $D$，求证：$AB+BD=AC$．

34．$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，$AD \perp BC$ 于 $D$，$M$ 是 $BC$ 的中点．求证：$DM=\frac{1}{2}AB$．

35．三角形各边的比是 3:4:6，若连接各边中点，则得到周长为 5.2 米的三角形，求原三角形各边的长．

36．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$D$ 为 $AB$ 上一点且 $AD=CD=BC$，求 $\angle A$ 的度数．

37．直角三角形 $ABC$ 中，三边长成等差数列，周长为 24，求 $\triangle ABC$ 的面积．

38．等腰梯形的上底等于它的腰，而一条对角线垂直于一腰，试求梯形各内角．

39．$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$．在 $AC$ 上取一点 $E$，使 $\angle ABE=2\angle EBC$，过 $A$ 作 $AD \parallel BC$ 交 $BE$ 的延长线于 $D$．求证：$ED=2AB$．

40．分别以 $\triangle ABC$ 的各边为一边，作等边三角形 $ABD$、$ACE$、$BCF$，使其顶点都在 $BC$ 的同侧．求证四边形

$AEFD$ 是平行四边形。

41. 在 $\triangle ABC$ 的两边 $AB$ 和 $AC$ 上，向外各作正方形 $BAFE$ 和 $ACGH$，作高 $AD$ 的反向延长线交 $FH$ 于 $K$. 求证：$FK=KH$, $AK=\frac{1}{2}BC$.

42. 在 $\triangle ABC$ 的两边 $AB$、$AC$ 上各向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$，$H$、$K$、$L$ 分别是 $EB$、$BC$、$CG$ 的中点. 求证：$\triangle HKL$ 是等腰直角三角形.

43. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$；从两个顶点 $B$、$C$，分别作 $\angle A$ 的平分线的垂线 $BE$、$CF$，垂足为 $E$、$F$；$D$ 为 $BC$ 边的中点. 求证：$DE=DF=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

44. $P$ 为 $\square ABCD$ 的对角线 $AC$ 上任意一点，过 $P$ 作 $AB$ 的平行线，分别交 $DA$、$BC$ 于 $H$、$F$，过 $P$ 作 $BC$ 的平行线，分别交 $AB$、$CD$ 于 $E$、$G$. 求证：

$$S_{\square DHPG}=S_{\square BFPE}.$$

45. 在 $\square ABCD$ 中，作 $EF \parallel AC$，交 $AB$ 于 $E$，交 $BC$ 于 $F$. 连接 $DE$、$DF$，求证：$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$.

46. 求证：等腰三角形底边延长线上任意一点到两腰的距离之差等于腰上的高.

47. 求证：等边三角形内任意一点到三边距离之和等于此等边三角形的高.

48. 若四边形的两对角线互相垂直，求证对边中点的连线彼此相等.

49. 已知在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，对角线 $AC$、