理科研究生丛书

李明忠 侯宗义 徐振远 编著

椭圆型方程组理论和边值问题

复旦大学出版社

● 理科研究生丛书

李明忠 侯宗义 徐振远 编著

椭圆型方程组理论和边值问题

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书除介绍有关泛函空间和积分算子的预备知识外，主要介绍广义解析函数的基本理论；一阶椭圆型方程组的基本边值问题；二阶椭圆型方程组的分类和各种基本边值问题；非线性边值问题；广义超解析函数论及边值问题。

本书可作为理工科大学数学系、力学系等有关专业高年级学生的选修课或研究生课教材。

椭圆型方程组理论和边值问题

李明忠　侯宗义　徐振远

复旦大学出版社出版

（上海国权路 579 号）

新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 10　字数 458,000

1990 年 9 月第 1 版　　1990 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

ISBN 7-309-00350-0/O·61

定价：4.00 元

编 辑 说 明

自恢复研究生招生以来，我校广大的研究生指导教师及担任研究生教学工作的同志，结合教学任务，编写讲稿，编印讲义，在研究生的教材建设方面进行了大量的工作，但由于种种条件的限制，目前正式出版的研究生教材为数很少。为了进一步提高研究生的教学质量，方便广大研究生和有志深造的同志学习或自学，并有利于学术交流，都有必要迅速改变这一状况，大力加强研究生的教材建设。

这套研究生丛书，正是适应为国家培养高层次人材这一需要而编辑出版的。本丛书分文科及理科两大类，目前将主要出版硕士研究生专业基础课的教材，同时也酌情出版一些适应面较广、并具有较高质量的硕士研究生选修课教材及博士研究生专业基础课教材。我们的目标，是逐步地建设起一套比较完整的研究生教材，使它们不仅可用作研究生专业基础课或选修课的教材或参考书，部分内容也可用作大学高年级学生的选修课教材或补充读物，同时也可用作有关的自学和课外阅读材料。

收入本丛书的教材大都是在编成讲义后经过教学实践，再修改定稿。但由于我们对编辑工作缺乏经验，仍可能存在某些不妥和不足的地方，热忱欢迎广大读者提出宝贵意见，以便将来再版时改正。

复旦大学研究生院

1989年5月

序　言

苏联著名数学家 И.Н.Векуа 院士和美国著名数学家 L. Bers 教授创建的广义解析函数理论的研究领域，在苏联、美国、德国及西欧等世界各地得到广泛而深入地发展，并在物理学、力学和工程技术中得到了有效的应用。在我国也有不少数学工作者在从事这方面的研究，并取得了可喜的成果，受到国际上同行的重视。从五十年代末开始，我们在陈传璋教授主持的科学讨论班内，以广义解析函数、超广义解析函数理论，一阶、二阶椭圆型方程组的基本理论与边值问题作为我们长期攻读和研究的主要方向，同时也作为数学系、应用力学系高年级学生及研究生选读和研究的重要内容。

本着有利于培养科技人才和促进科学研究的精神，结合多年来从事科学研究和教学工作的实践体会，我们编写了这本书，力求让有志于从事有关这方面的理论研究与实际工作的读者，尽快地掌握这方面的基本理论和方法，同时对近代研究的发展方向有所了解。为此，在全书中我们既注意系统而又扼要地介绍广义解析函数、超广义解析函数和椭圆型方程组的基本理论，同时又着重介绍椭圆型方程组的一些基本边值问题的求解，包括介绍近年来比较活跃的非线性边值问题研究的最新成果。全书力求做到内容精练，论证严谨，语言表达通俗易懂，便于读者自学。

在本书中，我们也集中介绍了自己的科学研究成果，它们都分别刊登在许多国内外的数学杂志上，有些成果曾获得国家教育委员会1985年科学技术进步优秀成果奖，和1987年科学技术进步奖二等奖。在国家科技委员会编辑出版的《科学技术研究成果公报》(1987年第三期)中，肯定这些研究成果"其内容系统，结果深刻，对推动学科的发展有重要意义，受到国内外同行的普遍好评。这些成果在力学、地球物理学等不少领域有广泛的应用，该项成果达到了国际先进水平。"此外，我们的研究课题，始终得到国家自然科学基金和上海科技发展基金的资助。

这一切都给我们以很大的鼓舞和支持。

全书共分五章，第一章泛函空间与积分算子，主要介绍一些常用的泛函空间和积分算子的性质作为预备知识。第二章广义解析函数基本理论，主要介绍一阶椭圆型方程组解的各种积分表示和解析性质。这两章基本取材于《广义解析函数》一书，但作了适当地删减，并在个别内容的叙述和证明上作了些改进，算子$T^n f$的性质及应用部分引自我们的研究论文。

第三章是一阶椭圆型方程组的某些边值问题，主要是研究线性和非线性的广义 Riemann–Hilbert 问题，此外还研究 Riemann–Haseman 问题。这里除了介绍 И.Н.Векуа 和 В.С.Виноградов 的研究工作外，还介绍了H.Beghr,G.C.Hsiao,W.Wendland 以及本书作者等人的工作。

第四章是二阶椭圆型方程组的广义解和边值问题，主要是讨论二阶椭圆型方程组的分类，建立强和非强椭圆型方程组的广义解表示式，并对这两类方程组的某些线性和非线性边值问题进行探讨。这里除了介绍 БоярскийБ.В,Бицадзе А.В 等人的研究工作外，还介绍了本书作者的研究成果。

第五章超广义解析函数，主要介绍了二个自变量多个未知函数的一阶椭圆型方程组的基本理论和某些边值问题。

为了便于读者参考和查阅，在参考文献中我们收集了许多国内外数学工作者有关的研究论文和专著。

本书的内容适合于数学、力学、物理学和工程科学系的大学生和研究生选读。同时也可供从事数学、应用力学和工程技术实际工作的读者参考。凡具有数学物理方程、函数论和泛函分析理论基础的读者，都不难掌握它。

作者的导师陈传璋教授生前对本书的编写，给予了亲切的关怀和指导，复旦大学出版社对本书的出版给以大力的支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢。

限于著者的学识水平，本书难免有错误和不妥之处，我们诚恳地期望读者给予批评、指正。

目　录

第一章　泛函空间和积分算子

这一章作为预备知识，主要介绍一些函数类和泛函空间以及在全书中起重要作用的一类积分算子，并讨论这类积分算子的有界性，全连续性和在 Соболев 导数意义下的可微性等．这方面内容可参阅[1,3,4,5,6,8]．

§1　函数类和泛函空间

设 G 是复平面上的有界区域，$C(\overline{G})$ 是闭域 $\overline{G}$ 上的连续函数的集合．如果用公式

$$C(f)=C(f,\overline{G})=\max_{z\in\overline{G}}|f(z)| \tag{1.1}$$

来定义集合 $C(\overline{G})$ 中元素 f 的范数，则我们得到一个 Banach 空间．显然，若 f 和 $g\in C(\overline{G})$，则乘积 $fg\in C(\overline{G})$，而且

$$C(fg)\leqslant C(f)C(g).$$

设函数 f 以及它的直到 m 阶的偏导数都在域 G 内连续，我们以 $C^m(G)$ 表示这种函数的集合．如果 f 和它的直到 m 阶的偏导数都在闭域 $\overline{G}$ 上连续，则将以 $C^m(\overline{G})$ 表示之．必须指出，在边界点 z_0 的导数是由区域内部同阶导数的极限来定义：

$$\left(\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}\right)_{z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l},\ (k,l=0,1,2,\cdots).$$

如果用公式

$$C^m(f)=C^m(f,\overline{G})=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}C\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-l}\partial y^l},\ \overline{G}\right) \tag{1.2}$$

来定义 $C^m(\overline{G})$ 中元素 f 的范数，则我们又得到一个 Banach 空间．同样，若 $f,g\in C^m(\overline{G})$，则 $fg\in C^m(\overline{G})$ 且

$$C^m(fg)\leqslant C^m(f)C^m(g).$$

设 $C_\alpha(\bar{G})$ 是闭域 $\bar{G}$ 上满足不等式

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant H|z_1-z_2|^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1 \tag{1.3}$$

的一切函数的集合，其中 z_1，z_2 是闭域 $\bar{G}$ 上的任意两点，H 和 α 是与点 z_1，z_2 选择无关的正常数。我们以 $H(f)$ [或以 $H(f,\alpha)$，$H(f,\alpha,\bar{G})$] 记满足不等式 (1.3) 的正数 H 的下确界，显然 $H(f)$ 是存在的，而且：

$$H(f)=\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha},$$

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant H(f)|z_1-z_2|^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1. \tag{1.4}$$

若以公式

$$C_\alpha(f)=C_\alpha(f,\bar{G})=C(f,\bar{G})+H(f,\alpha,\bar{G}) \tag{1.5}$$

来定义集合 $C_\alpha(\bar{G})$ 中元素 f 的范数，则可以证明 $C_\alpha(\bar{G})$ 也是一个 Banach 空间．为此只须证明空间 $C_\alpha(\bar{G})$ 是完备的．假设 $f_n(z)\in C_\alpha(\bar{G})$，$C_\alpha(f_n-f_m,\bar{G})\to 0$，$(n,m\to\infty)$，现在证明必有函数类 $C_\alpha(\bar{G})$ 中的元素 $f(z)$ 存在，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $C_\alpha(f_n-f,\bar{G})\to 0$.

注意到空间 $C(\bar{G})$ 的完备性和假设 $C_\alpha(f_n-f_m,\bar{G})\to 0,(n,m\to\infty)$，不难知道，存在函数 $f(z)\in C(\bar{G})$，且满足

$$C(f_n-f,\bar{G})\to 0,\ (n\to\infty).$$

此外，对任意给定的正数 $\varepsilon_k>0$，有正整数 n_k 存在，使得不等式

$$\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\left|\frac{f_{n_k+p}(z_1)-f_{n_k+p}(z_2)}{|z_1-z_2|^\alpha}-\frac{f_{n_k}(z_1)-f_{n_k}(z_2)}{|z_1-z_2|^\alpha}\right|$$
$$=H_\alpha(f_{n_k+p}-f_{n_k},\bar{G})\leqslant\varepsilon_k \tag{1.6}$$

对一切的正整数 p 恒成立．不妨取 $\{\varepsilon_k\}$ 是收敛于零的正数序列：

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0,$$

且 ε_k 是不依赖于 p 的．因为 $f_n(z)$ 在 $\bar{G}$ 上一致收敛于 $f(z)$，故在 (1.6) 中令 $p\to\infty$，得

$$\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{|z_1-z_2|^\alpha}-\frac{f_{n_k}(z_1)-f_{n_k}(z_2)}{|z_1-z_2|^\alpha}\right|\leqslant\varepsilon_k. \tag{1.7}$$

由此，对任意的 z_1，$z_2\in\bar{G}$，恒有

$$\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha}\leqslant\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha}$$

$$\leqslant\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\frac{|f_{n_k}(z_1)-f_{n_k}(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha}$$

$$+\varepsilon_k\leqslant H=\text{常数}.$$

我们以 $H(f)$ 表示适合上面不等式的最小正数 H，显然它是存在的，且有

$$H(f)=\sup_{z_1,z_2\in\bar{G}}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha}.$$

这就是说，原先在 $C(\bar{G})$ 中得到的函数 $f(z)$ 是属于 $C_\alpha(\bar{G})$. 最后，在 (1.7) 中，令 $k\to\infty$，又得到

$$H_\alpha(f_{n_k}-f,\bar{G})\to 0,(k\to\infty).$$

从而

$$C_\alpha(f_{n_k}-f,\bar{G})=C(f_{n_k}-f,\bar{G})+H_\alpha(f_{n_k}-f,\bar{G})\to 0,(k\to\infty).$$

因为 $\{f_n(z)\}$ 是 $C_\alpha(\bar{G})$ 中的任意 Cauchy 序列，由上面证得必有子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 以 $C_\alpha(\bar{G})$ 中的元素 $f(z)$ 为极限，因而它本身也必按 C_α 的范数收敛于 $f(z)$，即有

$$C_\alpha(f_n-f,\bar{G})\to 0,(n\to\infty).$$

换言之，$C_\alpha(\bar{G})$ 是 Banach 空间.

不难验证，若 $f,g\in C_\alpha(\bar{G})$，则乘积 $fg\in C_\alpha(\bar{G})$，而且

$$C_\alpha(fg)\leqslant C_\alpha(f)C_\alpha(g).$$

同样，不难知道，若 $f\in C_\alpha(\bar{G})$，$g\in C_\beta(\bar{G})$，而函数 $g(z)$ 的值又属于函数 $f(z)$ 的定义域，则

$$f_*(z)=f(g(z))\in C_{\alpha\beta}(\bar{G}).$$

我们还要考虑 Banach 空间 $C_\alpha^m(\bar{G})$，它的元素是满足条件

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}\in C_\alpha(\bar{G}),\ (k=0,1,\cdots m),\ 0<\alpha<1$$

的空间 $C^m(\bar{G})$ 中的元素；并用公式

$$C_\alpha^m(f)=C_\alpha^m(f,\bar{G})=C^m(f,\bar{G})+\sum_{k=0}^m H\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k},\alpha,\bar{G}\right),\quad(1.8)$$

来定义空间 $C_\alpha^m(\bar{G})$ 中元素 f 的范数。

同样，若 $f,g\in C_\alpha^m(\bar{G})$，则 $fg\in C_\alpha^m(\bar{G})$，并且

$$C_\alpha^m(fg_1)\leqslant C_\alpha^m(f)C_\alpha^m(g).$$

下面我们给出一个易于推导的不等式：若 $f,g\in C_\alpha(\bar{G})$，则

$$C_\alpha(fg,\bar{G})\leqslant C_\alpha(f,\bar{G})C(g,\bar{G})+C(f,\bar{G})C_\alpha(g,\bar{G}). \qquad (1.9)$$

因此，若 $C_\alpha(f)\leqslant M$，$C_\alpha(g)\leqslant M$，$C(f)\leqslant\varepsilon$，$C(g)\leqslant\varepsilon$，则从 (1.9) 可

$$C_\alpha(fg)\leqslant 2M\varepsilon.$$

换句话说，若 $C_\alpha(\bar{G})$ 中有界集的元素 f 和 g 按空间 $C(\bar{G})$ 的范数很小，则它们的乘积按空间 $C_\alpha(\bar{G})$ 的范数也很小。

设 $L_p(\bar{G})$ 是在闭域 $\bar{G}$ 上 p 次可积函数的集合，即它的每一个元素 f 都满足以下条件

$$L_p(f)\equiv L_p(f,\bar{G})=\left(\iint_G|f(z)|^p\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\ p\geqslant 1, \qquad (1.10)$$

如果以 $L_p(f)$ 定义 $L_p(\bar{G})$ 中元素 f 的范数，如所周知，$L_p(\bar{G})$ 是一个 Banach 空间。这里，我们需要引进两个常用的不等式：

Hölder 不等式：如果

$$f_k\in L_{p_k}(\bar{G}),\ (k=1,2,\cdots n),$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\cdots+\frac{1}{p_n}\leqslant 1,$$

则

$$f_1\cdot f_2\cdots f_n\in L_p(\bar{G}),$$

且

$$L_p(f_1f_2\cdots f_n)\leqslant L_{p_1}(f_1)L_{p_2}(f_2)\cdots L_{p_n}(f_n),\ p\geqslant 1. \qquad (1.11)$$

Minkowski 不等式：如果

$$f_1,f_2,\cdots f_n\in L_p(\bar{G}),$$

则

$$f_1+f_2+\cdots+f_n\in L_p(\bar{G}),$$

且

$$L_p(f_1+f_2+\cdots+f_n)\leqslant L_p(f_1)+L_p(f_2)+\cdots+L_p(f_n). \qquad (1.12)$$

设 $L_p^\alpha(\bar{G})$ 是这样的函数集合，它的每一个元素 $f\in L_p(\bar{G})$，在 G 外 $f=0$，且

$$\left(\iint_G |f(z+\Delta z)-f(z)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant B|\Delta z|^\alpha, 0<\alpha\leqslant 1, \quad (1.13)$$

其中 Δz 是任意复数，而 B 是不依赖于 Δz 的正常数．我们以 $B(f)$ 或 $B(f,\bar{G},\alpha,p)$ 记满足 (1.13) 的常数 B 的下确界．显然

$$B(f)\equiv B(f,\bar{G},\alpha,p)=\sup_{\Delta z}\frac{\left(\iint_G |f(z+\Delta z)-f(z)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}}{|\Delta z|^\alpha},$$

$$0<\alpha\leqslant 1,$$

$$\left(\iint_G |f(z+\Delta z)-f(z)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant B(f)|\Delta z|^\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1.$$

如果用公式

$$L_p^\alpha(f)\equiv L_p^\alpha(f,\bar{G})=L_p(f,\bar{G})+B(f,\bar{G},\alpha,p) \quad (1.14)$$

来定义 $L_p^\alpha(\bar{G})$ 中元素 f 的范数．则 $L_p^\alpha(\bar{G})$ 是一个 Banach 空间．

现在考虑以下在全平面 E 上定义的函数空间．

设 $f(z)$ 定义在全平面 E 上，同时满足条件

$$f(z)\in L_p(E_1),\ f_\nu(z)=|z|^{-\nu}f\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p(E_1),\ p\geqslant 1, \quad (1.15)$$

这里 E_1 是单位圆 $|z|\leqslant 1$，而 ν 是某个正实数，我们记这样的函数集合为 $L_{p,\nu}(E)$．如果 $f\in L_p(E)$，$p\geqslant 1$，那么

$$\iint_{|\zeta|\geqslant 1}|f(\zeta)|^p \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\iint_{|\zeta|\leqslant 1}\left(|\zeta|^{-\frac{4}{p}}\left|f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|\right)^p \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,\ \zeta=\xi+i\eta,$$

这就表示 $L_p(E)\equiv L_{p,\frac{4}{p}}(E)$．如果 $\mu\leqslant\frac{4}{p}\leqslant\nu$，那么对于 $|\zeta|\leqslant 1$，有

$$|\zeta|^{-\mu p}\leqslant|\zeta|^{-4}\leqslant|\zeta|^{-\nu p},$$

因此显见

$$\iint_{|\zeta|\leqslant 1}|\zeta|^{-\mu p}\left|f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|^p \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\leqslant\iint_{|\zeta|\leqslant 1}|\zeta|^{-4}\left|f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|^p \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

$$\leqslant\iint_{|\zeta|\leqslant 1}|\zeta|^{-\nu p}\left|f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|^p \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

由此推知

$$L_{p,\mu}(E)\supset L_p(E)\equiv L_{p,\frac{4}{p}}(E)\supset L_{p,\nu}(E), \qquad (1.16)$$

$$p\mu\leqslant 4\leqslant p\nu.$$

如果用公式

$$L_{p,\nu}(f)\equiv L_{p,\nu}(f,E)=L_p(f,E_1)+L_p(f_\nu,E_1),\quad p\geqslant 1$$

来定义 $L_{p,\nu}(E)$ 中元素 f 的范数，能够证明它是一个 Banach 空间。为此，只须证明空间 $L_{p,\nu}(E)$ 是完备的。不妨假设 $f_n(z)\in L_{p,\nu}(E)$，$L_{p,\nu}(f_n-f_m,E)\to 0$，$(n,m\to\infty)$，显然，这时有

$$L_p(f_n-f_m,E_1)\to 0,\ L_p(f_{n,\nu}-f_{m,\nu},E_1)\to 0,\ (n,m\to\infty).$$

因此必有函数 $f(z)$，$g(z)\in L_p(E_1)$，使得

$$L_p(f_n-f,E_1)\to 0,\ L_p(f_{n,\nu}-g,E_1)\to 0,\ (n\to\infty).$$

记 $|z|^\nu g(z)=f^*\left(\frac{1}{z}\right)$，由 $g(z)$ 的性质知，$|z|^{-\nu}f^*\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p(E_1)$，且

$$\iint\limits_{|z|\leqslant 1}\left||z|^{-\nu}\left[f_n\left(\frac{1}{z}\right)-f^*\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right|^p dxdy$$

$$=\iint\limits_{|z|\leqslant 1}\left||z|^{-\nu}f_n\left(\frac{1}{z}\right)-g(z)\right|^p dxdy\to 0,\ (n\to\infty).$$

于是，按以下方式定义的函数

$$F(z)=\begin{cases}f(z), & |z|\leqslant 1,\\ f^*(z), & |z|>1\end{cases}$$

属于 $L_{p,\nu}(E)$，并且

$$\begin{aligned}L_{p,\nu}(f_n-F,E)&=L_p(f_n-F,E_1)+L_p(f_{n,\nu}-F_\nu,E_1)\\&=L_p(f_n-f,E_1)+L_p(f_{n,\nu}-g,E_1)\to 0,\\&\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

换言之，我们证明了在 $L_{p,\nu}(E)$ 中的 Cauchy 序列收敛，因此空间 $L_{p,\nu}(E)$ 是完备的。

如果 $f(z)\in L_p(\bar{G})$，我们总可认为 $L_p(\bar{G})$ 中的函数 $f(z)$ 在 $\bar{G}$ 外等于零，于是不难看出 $f\in L_{p,\nu}(E)$，其中 ν 是任意的正数，换言之，$L_p(\bar{G})\subset L_{p,\nu}(E)$。特别，若 $p>2$，则

$$L_p(E)=L_{p,\frac{4}{p}}(E)\supset L_{p,2}(E).$$

这里的空间 $L_{p,2}(E)$, $p>2$, 是我们今后常常要遇到的.

假设 $D_m^0(G)$ 是这样的函数集合,它的每一个函数 $f(z)$ 在域 G 内有直到 m 阶的连续偏导数,且在 G 内存在着闭子集 G_f, 在 G_f 外 $f(z)=0$。显然 $D_m^0(G)$ 是线性流形,即线形.

$D_m^0(G)$ 中具有任意阶偏导数的函数所组成的子集用 $D_\infty^0(G)$ 表示,显然 $D_\infty^0(G)$ 也是线性流形. 线形 $D_\infty^0(G)$ 的重要性质在于它在空间 $C, C^m, C_\alpha, C_\alpha^m, L_p, L_p^\alpha$ 中是稠密的. 以下我们不加证明地引入相应定理的确切陈述.

定理 1.1 *线性流形 $D_\infty^0(G)$ 在任何空间 $L_p^\alpha(\overline{G})$ 中 ($p\geqslant 1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $L_p^0=L_p$) 都是稠密的。*

换言之, 若 $f\in L_p^\alpha(\overline{G})$, 则总存在着 $D_\infty^0(G)$ 中的元素序列 $\{f_n\}$, 它按 $L_p^\alpha(\overline{G})$ 中的范数收敛于 f, 即有

$$L_p^\alpha(f_n-f,\overline{G})\to 0,\ (n\to\infty).$$

定理 1.2 *如果 $f\in C_\alpha^m(\overline{G})$($0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $m=0,1,\cdots$, $C_0^0=C$, $C_0^1=C^1$, $C_\alpha^0=C_\alpha$), 而 G_* 是包含 $\overline{G}$ 的开集,那么必存在着 $D_\infty^0(G_*)$ 中的元素序列 $\{f_n\}$, 它按 $C_\alpha^m(\overline{G})$ 中的范数收敛于 $f(z)$, 即有*

$$C_\alpha^m(f_n-f,\overline{G})\to 0,\ (n\to\infty).$$

设 $\Phi(z)$ 是 G 中关于 z 的单值解析函数,在 G 内它可以有孤立奇点(极点和本性奇点)的离散集合,这个函数集合我们用 $\mathscr{A}_0^*(G)$ 表示. 如果 $f, g\in\mathscr{A}_0^*(G)$, 那么显然有

$$f\pm g,\ fg,\ \frac{f}{g},\ f(g(z))\in\mathscr{A}_0^*(G),$$

在最后的那个关系中,自然要求 $g(z)$ 的值属于 $f(z)$ 的定义域.

显然 $\mathscr{A}_0(G)=\mathscr{A}_0^*(G)\cap C(G)$ 是域 G 内单值连续的解析函数的集合. 它的每一个元素 $\Phi(z)\in\mathscr{A}_0(G)$ 在 G 内没有奇点.

§2 曲线类和区域类

设 Γ 是一条简单闭的或非闭的可求长的 Jordan 曲线. 它的方程