機率導論問題詳解

赫尔·波特 等 原著
潘 从 辉 译著

曉園出版社
世界图书出版公司

机率导论问题详解

赫尔、波物 著

潘从辉 译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995年6月第一版 开本：850×1168 1/32

1995年6月第一次印刷 印张：8

印数：0001—400 字数：20万字

ISBN: 7-5062-1766-x/O 117

定价：9.80元 (WB9312/1)

機率導論問題詳解

（目　　錄）

第一章　機率空間

1　令$(\Omega, \mathscr{A}, P)$爲一機率空間，此地之$\mathscr{A}$爲Ω之所有子集合的σ體，P爲對Ω中之每一點集合，賦予其機率$p>0$的機率測度。

(a)證明Ω必有一有限數的點。提示：證明Ω中的點不能超過p^{-1}。

(b)證明若n爲Ω中的點數，則p必爲n^{-1}。

解　(a)　假設Ω中元素個數爲無限個

取　$A_n=\{x_n\}$，$x_n\in\Omega$

且對所有i，$j\in N$

當$i\neq j$時

$x_i\neq x_j$

令　$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\text{則}\quad P(A)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} p>1$$

又　$A\subset\Omega$

所以　$P(\Omega)\geq P(A)>1$

此與$P(\Omega)=1$相矛盾

故Ω中元素個數爲有限

(b)　因Ω元素個數是n

故可設　$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$

$$1=P(\Omega)=P\left(\bigcup_{j=1}^{n}\{x_j\}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} P(\{x_j\})$$

$$=\sum_{j=1}^{n} p=np$$

故 $p=\frac{1}{n}=n^{-1}$

所以每一點對應的機率 $p=n^{-1}$

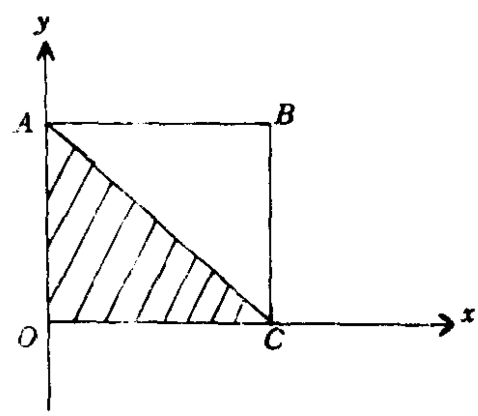
2. 取半徑爲 1 之圓盤的圓周爲機率空間，在此圓周上置一指針，則轉動此圓盤後，此指針落在弧長爲 s 的機率爲 $s/2\pi$，若此圓周分成 37 區，每區分別標以 1，2，……，37，求此圓盤轉動後停在偶數號地區的機率。

解 將一個圓分成 37 個區域，則它有 18 個偶數區域。

所以停在偶數區域的機率爲$\frac{18}{37}$ 。

3. 從一單位正方形中隨機求取一點，求其來自 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y=1$ 三直線所圍成之三角形的機率。

解



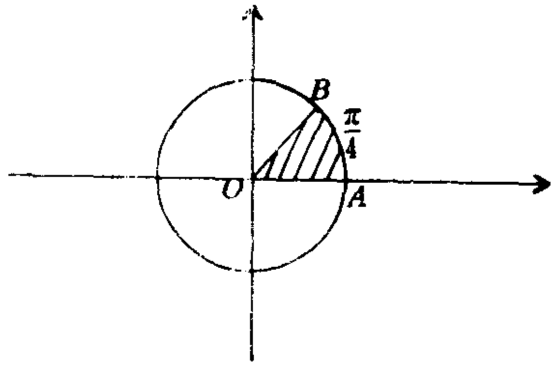
$$p=\frac{\Delta\, OAC\text{面積}}{\square OABC\text{面積}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

所以在 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 圍成三角形

內選取一點的機率爲$\frac{1}{2}$

4. 從半徑爲 1 之圓盤中隨機取一點，求此點來自 0 至 $\pi/4$ 弧度之扇形區域的機率。

解



$$扇形面積=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

$$p=\frac{扇形 OAB 面積}{圓面積}=\frac{\frac{\pi}{8}}{\pi}=\frac{1}{8}$$

5. 就例2求下列機率：
(a)在時間10之前沒有發生分解。
(b)在時間2之前有一分解，或在時間3和5之間有一分解。

解 (a) 在10秒之內發生蛻變的機率$=e^0-e^{-10\lambda}=1-e^{-10\lambda}$
在10秒之內不發生蛻變的機率$=1-(1-e^{-10\lambda})=e^{-10\lambda}$

(b) $A=[0,2]$
$P(A)=e^0-e^{-2\lambda}=1-e^{-2\lambda}$
$B=[3,5]$
$P(B)=e^{-3\lambda}-e^{-5\lambda}$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$\quad=1-e^{-2\lambda}+e^{-3\lambda}-e^{-5\lambda}$

6. 一盒中有標號1至10的球10個，從此盒中隨機取一球，求所抽之球標號爲3，4或5的機率。

解 出現3號球的機率　$P(A)=\frac{1}{10}$

且　$P(A\cap B)=0$

出現4號球的機率　$P(B)=\frac{1}{10}$

且　$P(A\cap C)=0$

出現5號球的機率　$P(C)=\frac{1}{10}$

且　$P(B\cap C)=0$

$\therefore\quad P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

7. 投二骰子一次，且其 36 個可能出象皆均等可能發生。求此二骰子所出現之值的和爲偶數的機率。

解 和爲偶數之個數爲 18 個

$$\therefore \quad p=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

8. 設有事件 A，B，其 $P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，且 $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cap B)$。

解 $\because \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\begin{aligned}\therefore \quad P(A\cap B)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

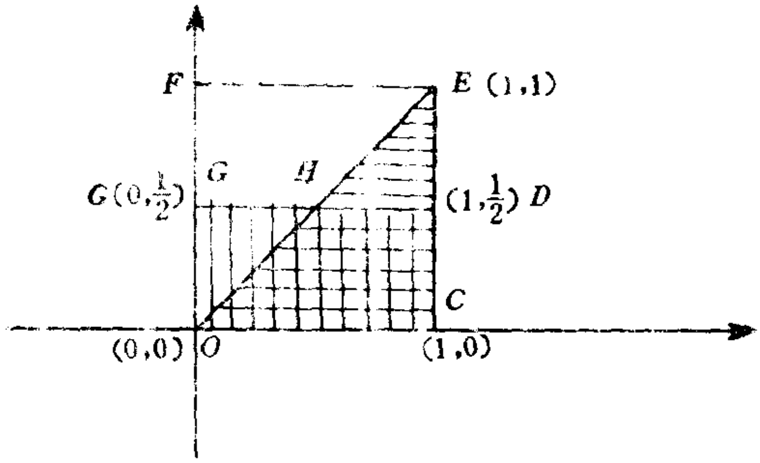
9. 若 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，且 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$，求 $P(B)$。

解 $\because \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\begin{aligned}\therefore \quad P(B)&=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

10. 從單位正方形中隨機取一點，令 A 爲此點來自由 $y=0$，$x=1$ 和 $x=y$ 三條直線所圍成的三角形的事件；B 爲此點來自四個頂點座標分別爲 $(0,0)$，$(1,0)$，$\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 之長方形的事件，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(A\cap B)$。

解 $P(A)=\dfrac{\Delta OCE\text{之面積}}{\square OCEF\text{之面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}$



$$P(B)=\frac{\square OCDG\text{之面積}}{\square OCEF\text{之面積}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{\text{梯形}OCDH\text{之面積}}{\square OCEF\text{之面積}}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{3}{8}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{5}{8}$$

11. 一盒有 10 球，分別標以 1，2，…… 10 。隨機取一球後，再以隨機的方式從剩下之九球中取第二球。求所取之二球球號差至少為 2 的機率。

解 令從盒中取第一球之標號為 x

從盒中取第二球之標號為 y

則 x，$y=1$，2，……，10

今求 $|x-y|\geq 2$ 之 (x, y) 解共有幾組

當 $x>y$ 時

$x-y\geq 2$

$x=3$ ， $y=1$

$x=4$ ， $y=1$，2

$x=5$ ， $y=1$，2，3

$x=6$ ， $y=1$，2，3，4

$x=7$ ， $y=1$，2，3，4，5

$x=8$ ， $y=1$，2，3，4，5，6

$x=9$ ， $y=1$，2，3，4，5，6，7

$x=10$ ， $y=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

共有 36 組解

當 $y>x$ 時亦有 36 組解

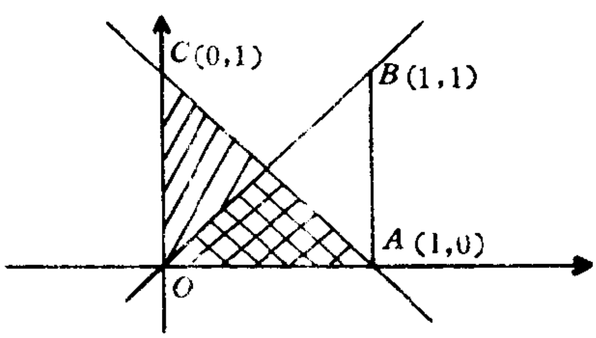
共計 72 組

而樣本空間爲 $10\times9=90$

$\therefore \quad p=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$

12. 若從單位正方形中隨機所取之一點，已知其來自由 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y=1$ 所圍成的三角形中，求它亦來自由 $y=0$，$x=1$ 和 $x=y$ 所圍成之三角形中的機率。

解



令 A 表在 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所圍三角形之內的事件

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1}{1}=\frac{1}{2}$$

B 表在 $x=1$，$y=0$，$x=y$ 所圍三角形之內的事件

則 $\quad P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

13. 設有四個匣子，每一匣子有二個抽屜。匣 1 和 2 有一金幣在一抽屜中，另一抽屜則置銀幣，匣 3 二個抽屜皆置金幣，而匣 4 則皆放銀幣。隨機取一匣，且打開一抽屜發現內有一金幣，求另一抽屜有

(a)一銀幣。

(b)一金幣。

的機率。

解 令 A_1，A_2，A_3，A_4 表4個箱子

$$P(A_K)=\frac{1}{4}$$

$K=1，2，3，4$

S表另一抽屜爲銀幣的事件

G表另一抽屜爲金幣的事件

(a) $$P(S)=\sum_{K=1}^{4}P(A_K)P(S\mid A_K)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

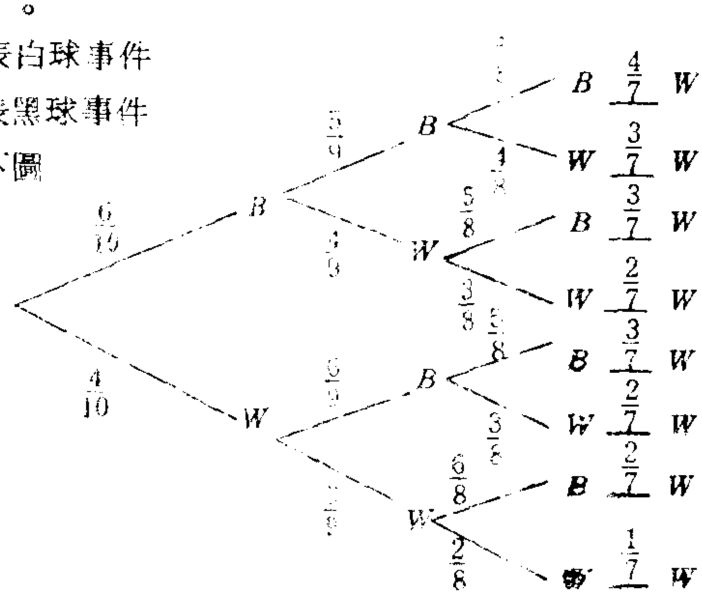
(b) $$P(G)=\sum_{K=1}^{4}P(A_K)P(G\mid A_K)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+0\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

14. 一盒中有10球，其中6個爲黑球，4個爲白球。從此盒中取去三球，且不注意其顏色，求從此盒中取走之第四球爲白球的機率。設每一球被抽的機率皆相同。

解 令W表白球事件

B表黑球事件

則由下圖



$$p=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$$
$$+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}$$
$$+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}$$
$$=\frac{2016}{5040}$$
$$=\frac{2}{5}$$

15. 現有一盒，其組成同習題 14，求已知取走之三球中至少有一爲黑球下，所有取走之三球皆爲黑球的機率。

解 $$p=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}}{1-\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}}=\frac{5}{29}$$

16. 一工廠有二機器 A 和 B，其分別製造總產出的 60% 和 40%，在機器 A 之產出中有 3% 屬壞品，而機器 B 有 5% 屬壞品。已知一壞品，求其來自機器 B 的機率。

解 令 D 表損壞事件

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A\cap D)+P(B\cap D)\\&=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)\\&=0.6\times0.03+0.4\times0.05\\&=0.038\end{aligned}$$

$$P(B\mid D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{0.02}{0.038}=\frac{10}{19}$$

• **17.** 以歸納法證明在 Polya 計劃的任意 n 次試行中（例 7），取得紅球的機率爲 $r(b+r)^{-1}$。

解 當 $K=1$ 時

$$P(R_1)=\frac{r}{r+b}$$

$P(B_1)=\frac{b}{r+b}$

當$K=2$時

$P(R_2)=\frac{r}{r+b}$

$P(B_2)=\frac{b}{r+b}$ （由例七可知）

假設$K=n-1$時成立

$P(R_{n-1})=\frac{r}{r+b}$

$P(B_{n-1})=\frac{b}{r+b}$

則當$K=n$時

$$P(R_n)=P(R_n\cap R_{n-1})+P(R_n\cap B_{n-1})$$
$$=P(R_{n-1})P(R_n\mid R_{n-1})+P(B_{n-1})P(R_n\mid B_{n-1})$$

$$P(R_n\mid R_{n-1})=\frac{(n-1)\text{次取出紅球後第}n\text{次取時盒中紅球數}}{\text{總球數}}$$

$$=\frac{R}{T}$$

$$P(R_n\mid B_{n-1})=\frac{(n-1)\text{次取出黑球後第}n\text{次取時盒中紅球數}}{\text{總球數}}$$

$$=\frac{B}{T}$$

總球數$T=r+b+(n-2)C+C$

$R=$第$(n-1)$次取球時盒中紅球期望值$+$放入C個紅球

$$=\frac{r}{r+b}[r+b+(n-2)C]+C$$

$B=$第$(n-1)$次取球時盒中紅球期望值

$$=\frac{r}{b+r}[r+b+(n-2)C]$$

$\therefore\quad P(R_n)$

$$=\frac{1}{r+b+(n-1)C}\left\{\frac{r}{r+b}\times\left(\frac{r}{r+b}(r+b+(n-2)C+C)\right.\right.$$

$$+\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b}\left[r+b+(n-2)C\right]\bigg\}$$

$$=\frac{1}{r+b+(n-1)C}\times\frac{r}{(r+b)}$$

$$\times\frac{r[r+b+(n-2)C]+C(r+b)+b[r+b+(n-2)C]}{r+b}$$

$$=\frac{1}{r+b+(n-1)C}\times\frac{r}{r+b}\times\frac{(r+b)[r+b+(n-1)C]}{r+b}$$

$$=\frac{r}{r+b}$$

$$\left(\therefore\quad P(B_n)=1-P(R_n)=\frac{b}{b+r}\right)$$

$\therefore$ 由數學歸納法知當 $n\in N$ 時 $P(R_n)=\dfrac{r}{r+b}$ 成立

18. 一學生參加選擇題的測驗，其每一題有 5 個答案，其中恰有一爲正確。若此學生知道答案，則他選正確的答案，否則他以隨機的方式從 5 個可能答案中取一個。若此學生知道所有試題之 70％的答案。

(a)對一已知問題，此學生得正確答案的機率爲何？

(b)若此學生已得一問題的正確答案，則他知道此答案的機率爲何？

解 令 A 表該生對一問題寫出正確答案之事件

D 表該生不知正確答案之事件

K 表該生知道正確答案之事件

C 表答案正確之事件

(a) $P(A)=P(K\cap C)+P(D\cap C)$

$$=0.7\times1+0.3\times\frac{1}{5}$$

$$=0.76$$

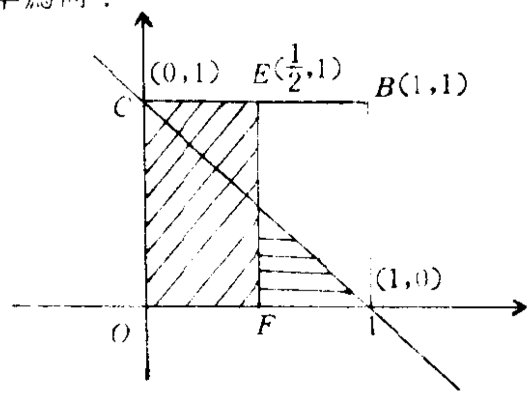
(b) $P(K\mid A)=\dfrac{P(K\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(K)P(A\mid K)}{P(A)}$

$$=\frac{0.7\times1}{0.76}$$

$$=\frac{35}{38}$$

19. 從一單位正方形中隨機取一點，若已知此點來自由 $y=0$，$y=1$，$x=0$ 和 $x=\frac{1}{2}$ 所圍成長方形中，則此點亦來自由 $y=0$，$x=\frac{1}{2}$ 和 $x+y=1$ 所圍成之三角形的機率爲何？

解



令 A 表點落在 $y=0$，$y=1$，$x=\frac{1}{2}$，$x=0$ 之內的事件

$$P(A)=\frac{\square OFEC\text{的面積}}{\square OABC\text{的面積}}=\frac{1}{2}$$

令 B 表點落在 $y=0$，$x=\frac{1}{2}$，$x+y=1$ 之內的事件

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{\frac{1}{2}}=0$$

20. 設一盒中有 r 個紅球，b 個黑球，隨機從此盒中取一球，而後再以隨機的方式從剩下之球中取第二球，求下列機率：

(a)二球皆紅。

(b)第一球爲紅球，第二球爲黑球。

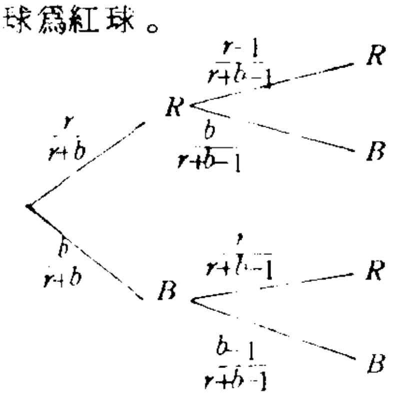
(c)第一球爲黑球，第二球爲紅球。

(d)二球皆黑。

解　令 B 表取出黑球事件

R 表取出紅球事件

由下圖



(a)　兩球皆爲紅球之機率 $= \dfrac{r(r-1)}{(r+b)(r+b-1)}$

(b)　第一球爲紅球，第二球爲黑球之機率

$$p = \frac{rb}{(r+b)(r+b-1)}$$

(c)　第一球爲黑球，第二球爲紅球之機率

$$p = \frac{br}{(r+b)(r+b-1)}$$

(d)　兩球皆爲黑球之機率

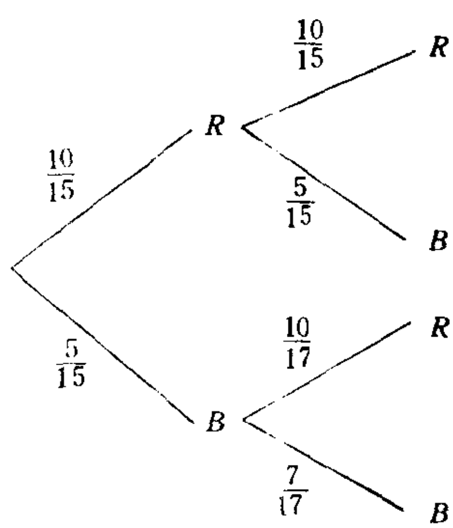
$$p = \frac{b(b-1)}{(r+b)(r+b-1)}$$

21.　一盒中有 10 紅球和 5 黑球，從此盒中取一球，若此球爲紅球，退回此盒中，若球爲黑球，則加該球和另外二黑球於此盒中。求從此盒中所抽之第二球爲(a)紅。(b)黑。

的機率

解　令 B 表取出黑球事件

R 表取出紅球事件



(a)　第二球爲紅球之機率

$$p = \frac{10}{15} \times \frac{10}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{10}{17} = \frac{98}{153}$$

(b)　第二球爲黑球之機率

$$p = 1 - \frac{98}{153} = \frac{55}{153}$$

22. 以投返方式從一含有3白球之黑球的盒中取二球。

(a)若樣本點皆均等可能，求此實驗之機率空間。

(b)求此二球將為同色的機率。

(c)求至少有一球為白色的機率。

解 (a) 令 (W, B) 表第一次取到白球，第二次取到黑球事件，其他事件亦用類似符號，則每一事件皆寫下共有 5×5 個樣本點

∴ 樣本空間

$$
\begin{aligned}
=\{&(W,W),(W,W),(W,W),(W,W),(W,W)\\
&(W,W),(W,W),(W,W),(W,W),(B,B)\\
&(B,B),(B,B),(B,B),(B,W),(B,W)\\
&(B,W),(B,W),(B,W),(B,W),(W,B)\\
&(W,B),(W,B),(W,B),(W,B),(W,B)\}
\end{aligned}
$$

(b) 因每一樣本點皆有均等機會

所以兩球同色機率 $=\dfrac{13}{25}$

(c) 至少有一白球機率 $=\dfrac{21}{25}$

23. 若第一球不投返，求習題22。

解 (a) 用同於22題之符號，因第一球不放回所以樣本空間不同於22題。

樣本空間

$$
\begin{aligned}
=\{&(W,W),(W,W),(W,W),(W,W),(W,W),(W,W)\\
&(B,B),(B,B),(B,W),(B,W),(B,W),(B,W)\\
&(B,W),(B,W),(W,B),(W,B),(W,B),(W,B)\\
&(W,B),(W,B)\}
\end{aligned}
$$

(b) 兩球同色機率 $=\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$

(c) 至少一球白色機率 $=\dfrac{18}{20}=\dfrac{9}{10}$

24. 對每次抽取之為白或黑，建立一包含此4個樣本點的機率空間，而後以此空間為基礎，求習題22。

解 (a) 若樣本空間改為四個樣本點的集合

則定義在此樣本空間的機率函數就不同於22題

樣本空間

$= \{ (W, W), (W, B), (B, W), (W, W) \}$

$P[(W, W)] = \dfrac{9}{25}$

$P[(W, B)] = \dfrac{6}{25}$

$P[(B, W)] = \dfrac{6}{25}$

$P[(B, B)] = \dfrac{4}{25}$

(b) 兩球同色之機率

$= P[(W, W)] + P[(B, B)]$

$= \dfrac{9}{25} + \dfrac{4}{25}$

$= \dfrac{13}{25}$

(c) 至少一球白色機率

$= 1 - P[(B, B)]$

$= \dfrac{21}{25}$

25. 盒Ⅰ含2白球2黑球，盒Ⅱ含2白球1黑球，盒Ⅲ含1白球3黑球。

(a)從每一盒中取一球，求三球皆白的機率。

(b)隨機取一盒，而後從此盒取一球，求其爲白球的機率。

(c)於(b)中，若已知抽出一白球，求其來自盒Ⅰ的機率。

解 令Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ表三個盒子

W表選出爲白球事件

B表選出爲黑球事件

由下圖：