数学解题训练

门树慧 刘培娜 王长沛 编译

SHUXUE JIETI XUNLIAN

科学技术文献出版社

数学解题训练

门树慧　刘培娜　王长沛　编译

科学技术文献出版社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书是一本中学数学参考书．全书由代数、三角、几何以及数学竞赛性质的问题组成，共分五章：整数性质的研究方法；方程和不等式解法的研究；三角方程及不等式的解法；几何问题的解法；某些特殊问题的解法．

本书阐明了如何进行解题训练和提高解题能力的途径；系统地总结了中学数学解题的各种方法；介绍了集合、导数、积分、向量和坐标法等在中学数学中的应用．通过大量典型例题说明这些方法的要点．内容新颖，解题方法不落俗套．

本书主要取材于《解题教学》(苏联，А. Б. Василевский, 1979).

本书可供中学生、自学青年、中学数学教师和师范院校数学系师生阅读．

数学解题训练

门树慧　刘培娜　王长沛　编译

科学技术文献出版社出版

重庆印制第一厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.25　字数：176 千字

1982年10月北京第一版第一次印刷

印数：1—121645 册

科技新书目：33—67

统一书号：13176·141　定价：0.76元

前 言

数学是探求、认识和刻划自然规律的重要工具．在学习数学的各环节中，解题的训练占有十分重要的地位，它既是掌握所学数学知识的必要手段，也是培养和提高数学能力的重要途径．通过解题的训练还能激起学生的求知欲，锻炼学生的品格，使他们养成良好的学习习惯与工作习惯．

解题的过程是思维活动的过程．只有通过自己思考，才能掌握知识和发展智力，因此，应当提倡学生独立思考，独立解决问题．当然，在解题教学的过程中，教师起着主导的作用．教师要灵活地用一系列富于启发性的问题引导和帮助学生解题，培养学生的独立思考和独立解题的能力．为此，我们编译了这本书．

本书主要取材于苏联阿·勃·华西列夫斯基（А.Б.Василевский）所著《解题教学》(1979年)，原书主要内容为代数、几何、三角和数学竞赛性质的问题，系统地介绍和总结了中学数学问题的各种解法，并且通过典型例题说明这些方法的要点，从而使读者能认识并学会运用这些方法，提高解题能力，原书有下列特点：

1．与目前中学数学教学密切配合，多用传统的初等数学方法解题，对教学中的重点和难点部分的习题作了较详细的讨论；

2．随着集合、导数、积分、向量、坐标法等内容陆续进入中学数学教材，中学数学的解题范围扩大了，解题方法也发生了很大的变化，原书对上述各种数学方法在解题中的

应用作了较详细的介绍；

3． 解题可以说是一种创造性的活动，由实验、试探、猜测到发现问题的解是解题时通常采用的思考方式，原书注意分析解题过程中如何进行实验，提出猜测，从而发现问题和解决问题．

在编译过程中，我们还参考了美国数学家波利亚(D.Polya)的名著《怎样解题》和苏联《初等数学习题集》(1973年版)等书．

为了适应我国目前的教学情况，我们对上述著作进行了一定的删节和增补．本书共分四部分：代数、三角、几何以及特殊问题的解法．前三部分主要是初等数学内容，和我国目前中学数学教材相适应，最后一部分为数学竞赛性质的问题，可作为数学课外小组的参考资料．

本书可供中学生及具有中学文化水平的青年阅读，也可供师范院校数学系的学生和中学数学教师参考．

由于我们水平不高，书中错误一定不少，请读者给予指正．

编译者

1981年9月于北京

目　录

谈谈解题的训练

我们应当怎样解数学题？怎样才能提高解题的能力？怎样进行解题的训练？许多科学家对这个问题发表过很有见解的意见，其中包括：对数学问题要有兴趣、好奇心和探索的态度；对知识要有深刻的理解并掌握一定的数学方法；要具备一定的数学能力；要用合理的方式去进行思考并养成良好的思考习惯等.

一、兴趣与探索

解题是一种创造性的活动，对解题有无强烈的愿望、兴趣和好奇心，有无虚心和探索的态度是十分重要的问题. 学习的动力应来自为实现祖国“四化”而掌握知识的责任感，同时也来自对知识本身的热爱和追求，如果对解题缺乏兴趣，感到枯燥、乏味，则一切聪明和才干也就得不到充分发挥，因而培养兴趣，激发求知慾是提高解题能力的一个重要因素. 法国近代杰出的数学家彭加莱说过，科学家之所以研究自然，是因为“他能从中得到乐趣”，这种兴趣也是鼓舞我们探求解题途径的动力.

除了兴趣以外，还应当有虚心和探索的态度，美国数学家D.Polya在回忆自己学生时代时曾说过：“那时我们的好胜心相当强，虽然对数学、物理并没有多少深入的研究，但是在听课和读书时，总是企图弄懂里面所讲的事实和本质. 总有一个问题在不断地折磨我，这道题看来是解对了，但是人家是怎样想出这个解法来的呢？这个实验是达到了目的，我们

观察到的事实可以证明这一点．但是，我自己用什么方法才能想出或发现类似的现象呢"？这种追根寻源、楔而不舍的态度是解题时所必须具备的．

二、知识和方法

数学知识(一般指概念、定义、定理、公式等)，特别是数学概念，在解题中起判断作用．只有正确理解概念，思维才能有依据．对知识的理解要力求深刻和系统，例如，有的学生经常出现下述错误：

$$\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sin\alpha-\cos\alpha,$$

由 $$\log_x x\geqslant\log_x\frac{1}{2}，得\ x\geqslant\frac{1}{2}$$

就是由于对有关概念含糊而产生的．

同样，如果没有牢固地掌握数学定理、公式、法则，而在解题时生搬硬套，也会发生错误．因此，提高解题能力，首先要牢固掌握基础知识．

另外，应当掌握中学数学中常用的分析法、综合法、反证法、比较法、数学归纳法等解数学题的基本方法．此外，还应多掌握一些解决某些具体问题的具体方法和技巧．

三、数学能力

为了解题，我们必须具有一定的数学能力，如运算能力、逻辑思维能力、推理能力、空间想象能力、抽象能力等．此外，还应强调采用合理的方式来思考问题，探求问题的解．

四、合理的思考方式

解题是一种创造性的活动，在解题时，我们常常要从比较鉴别中进行观察，通过实验、试探和猜测，来寻求解题途径.

我们要解的题目是千变万化的，解法也各有不同，但在思考问题、解决问题的方式上却有许多共同之处，这些共同之处正是解题所要遵循的一般规律．例如，不论解什么题，我们总要先思考"什么是已知？什么是未知……"之类的问题．又如在探索解题途径时，我们总要努力回忆自己所熟悉的题目，哪些题和现在所要解的题有相同的已知或未知，这些都是人们在解题思考过程中所常用到的思考方式．我们不妨把类似这些带有普遍性的问题和联想称为"合理的思考方式"．

合理的思考方式普遍存在于解题过程之中，它具有两个特点：合理性与普遍性．它的正确性已被人们无数次成功的解题实践所证实，它既适用于代数题、几何题，也适用于其它数学问题，还适用于其它科目一些问题；它既适用于理论性的习题，也适用于实际应用问题；…….“合理的思考方式”具有普遍的意义，它们又都十分简单地反映在我们的头脑中，许多人在解题时都自觉或不自觉地这样作，如遇到一道平面几何题，我们自然会注意到它的已知和求证，而且会想到三角形、圆、……，想到作辅助线等等．如果想求某个未知数，还会回忆自己所熟悉的、求这类未知数的方法，并用这种方法试着解这个题．总之，这些合理的思考方式是人们在思索、求解过程中常常采用的方式．为了提高解题能

怎样解题

Ⅰ．要弄清题意	**了解问题的提法** 什么是未知？什么是已知？条件是什么？条件能成立吗？为了求出未知，条件是否够了？或者不够？或者多余？或者条件互相矛盾？ 作图，用适当的记号来表示． 把条件分成几部分，力求记住它们．
Ⅱ．找出已知和未知的联系，如果不能揭示出这种联系．可以研究辅助性的习题，最后，必须拟出解题计划	**拟订解题计划** 以前是否解过这道题？是否知道类似的习题？哪些定理对解题可能是有用的？ 要研究未知！努力回忆一下和这题有相同未知或者相似未知的题目． 若与这题有关的题目已经解出，你能利用它吗？能利用它的结果和它的解法吗？能引进某种辅助元素，从而利用以前的习题吗？ 是否能换一种方式叙述这道题？ 如果仍解不出这个题，可以尝试解相似的题目，你能想起类似的题目(比这题更一般些或更特殊的题)吗？你能解这题的一部分吗？只保留一部分条件去掉其余条件时，未知元素能否大致确定？能从已知抽出某些有用的东西吗？能否想出另外的已知条件，而它们可以确定未知元素？能否改变未知或已知或作其它变更而得到新的已知和未知？ 题目中的概念是否都注意到了？
Ⅲ．要实现解题计划	**实现解题计划** 实现解题计划时，要检查每一步骤，每一步都解的正确吗？能证明它们的正确性吗？
Ⅳ．要研究所求得的解	**研究和回顾所得的解** 能检验结果吗？能检验解法吗？用其它方法能得到同样的结果吗？ 利用所得的结果和解法能否解其它问题？

力，除了掌握具体的解题方法以外，还应了解、熟悉和掌握这些简单而又有用的“合理思考方式”. 美国数学家D. Polya结合教学实践，把它表述为一连串的问题和建议. 他经过周密的考虑和安排，对这些问题和建议进行总结和分类，编制成一张表，这张表说明，在解题的各个阶段，应当怎样思考问题，在解题遇到困难时，应当沿着什么途径思考，见上表说明.

不难发现，表中所列举的问题和提示正是我们解题时常用的思考方式. 它们虽然不能代替我们对某个题目的思考，但却能不断地给人以启发，使我们能沿着正确的途径来探求题目的解答.

五、教师与学生，模仿与经验

教师在指导学生解题时常常使用上面所列的问题和提示，这有两个目的.

第一，帮助学生解具体的习题；

第二，发展学生的能力，使其今后能独立解题.

上面所说的两个目的是紧密相联的. 在做完一道题以后，学生的解题能力多少有所增长. 这里要注意，问题和提示要具有普遍性，使他们解其它题目，遇到类似的情况时，也会独立地向自己提出这些问题和提示，反复重复这些问题，就能在头脑中逐渐形成合理的思考方式，最后养成习惯，解题能力就会得到提高.

解题能力是一种在实践中发展起来的技能，离不开具体的解题训练，要在具体的解题实践中，由模仿而逐渐积累经验，逐步提高解题能力. 为了激发学生兴趣，给学生提供模

仿与获得经验的机会，还可以在讲课时把自己的思想过程讲给学生听.

六、解题过程

解题过程可以分为以下八个阶段.

第一阶段——分析题目；

第二阶段——简要摘录题目；

第三阶段——寻找题解方法；

第四阶段——实施解题方法；

第五阶段——验证解题方法；

第六阶段——题目讨论；

第七阶段——给出题目答案；

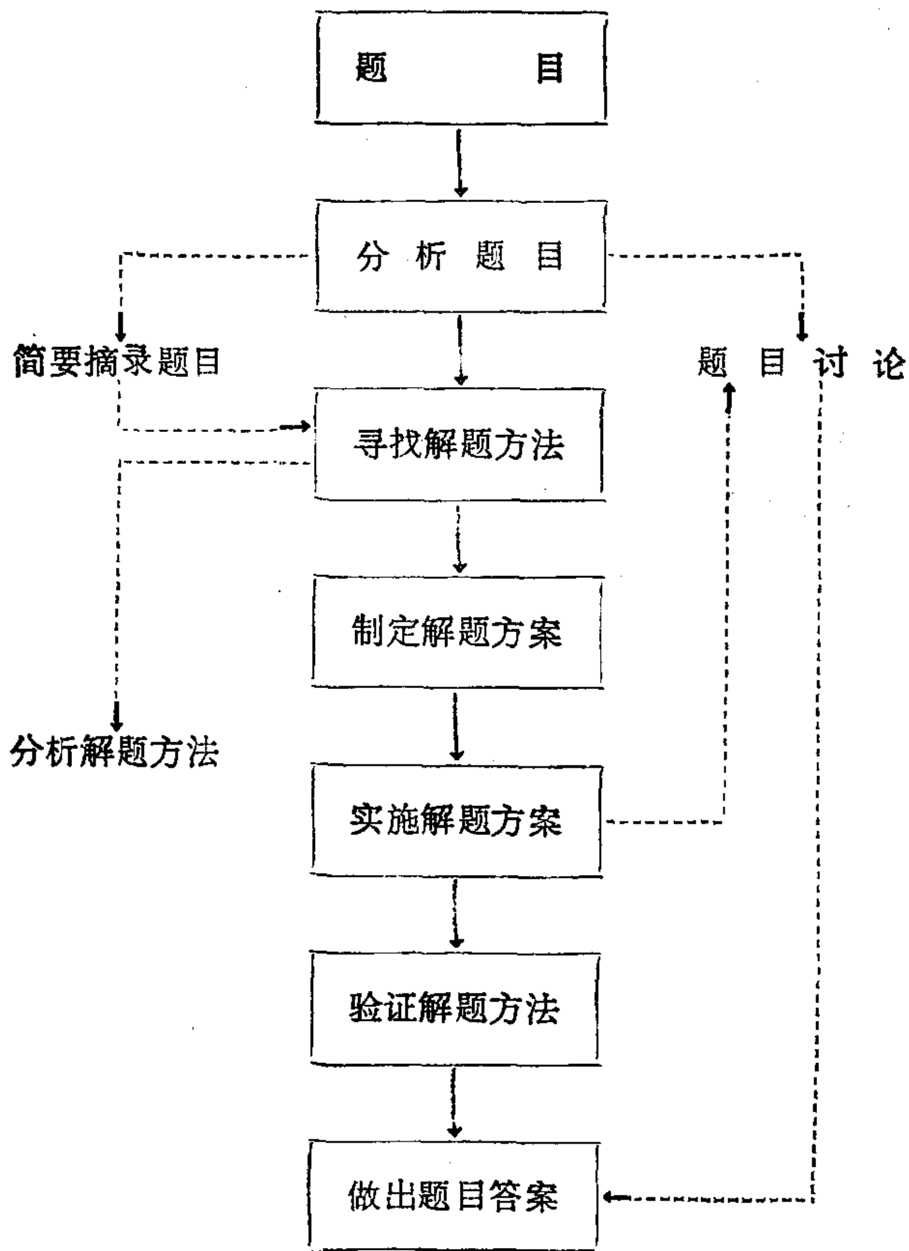
第八阶段——分析解题方法.

以上所列的八个步骤仅仅是一般的步骤，不一定能明显地单独分开，往往相互交错．事实上，在分析题目的过程中一般就伴随着探索解题方法的过程．这几个阶段的顺序有时还可以调换，而且常常有某几部分要循环多次．其中，有五个阶段在解任何题时都需要经过(表现形式可能有所不同)，这五个阶段是：分析题目，探索解题方法，实施解题方法，验证解题方法和做出题目答案，其余三个阶段则不是必需的，在很多题目的解答中不一定出现.

分析题目，就是研究题目的性质、类型、确定其条件和所求．为了熟悉题目，理解题意，必要时，可作一些简要摘录，如画各种简图，用符号和字母表示出条件和结论等．分析题目和做简要摘录的目的都是为了帮助寻求解题方法，制定解题计划．在解特别复杂的题目时，题目的分析不仅在初

步阅题时进行，随着解题过程的新尝试，有时要进行多次分析.

在解较复杂的题目时，寻找解题方法往往是解题各阶段中最为困难、最为基本的阶段，所费的时间也最多，甚至要多次进行. 当发现解法有错或太复杂时，还要回到寻求解题



方法阶段，这就需要有毅力，尤其在每次失败之后，返回到分析阶段上时，更需要谨慎地探求失败的原因．

验证解题方法是比较复杂的过程，一般和实施解题方法同时进行，而且通常采用口头或心算的形式来验证，这是一种很好的自我监督，应仔细考虑解法是否正确，是否满足题目的全部要求．

有许多题目，除了需要验证以外，还必需对题目进行讨论，即确定题目在什么条件下有解，有多少个解，在什么情况下无解等等．

最后，为了进一步深化认识，可以对已采取的解题方法再进行一次分析．确定有无其它更合理的解题方法，将这题的解法与过去题目进行比较，进行一番总结，并从中引出一些推论来．

上面是解题过程图示表．

第一章　整数性质的研究方法

§1.1　数的整除

在这里，我们只介绍用整除的知识去解一些与中学数学有关的题目的方法.

定义　设 a，b 是两个整数，且 $b\neq 0$. 若存在一整数 c，使得 $a=bc$，则称 a 能被 b 整除. a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的因数.

定义　设 $f(x)$，$g(x)$ 是两个多项式. 若存在一个多项式 $\varphi(x)$，使得 $f(x)=g(x)\varphi(x)$，则称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除. $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因子.

研究数的整除常用下列方法.

1. 分解因式法

若一个多项式能分解为若干个因子相乘的形式，则称已知多项式能被诸因子整除. 用这种方法解题时，常常要用到下列公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}),\qquad (1)$$

其中 n 是自然数.

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^{n-1}b^{n-1}),\qquad (2)$$

其中 $n=2k+1$，k 是自然数.

将上面带有括号的两项相乘，就能证明(1)和(2)式的正确性.

例 1　证明对任意自然数 n，17^n-11^n 能被 6 整除.