[苏] И.В. 普罗斯库烈柯夫 著

线性代数习题集

周晓钟 译

人民教育出版社

线性代数习题集

[苏] И.В. 普罗斯库烈柯夫 著

周晓钟 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书编选了行列式、线性方程组、矩阵和二次型、向量空间及其线性变换、群、环、域、模、仿射空间等方面的习题共 1938 道，并附有解答或提示．不少题目是名家提供的，有些题目比较新颖，证明题较多．可供高等院校设置线性代数课程的专业的师生教学时参考。

线性代数习题集

[苏] H.B. 普罗斯库烈柯夫 著

周晓钟 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 15.25　字数 365,000

1981 年 7 月第 1 版　1982 年 12 月第 2 次印刷

印数 37,001—52,000

书号 13012·0619　　定价 1.35 元

序　言

作者在编写这本习题集时，力图：

第一，提供足够数量的练习题，以培养学生解典型习题的技能（例如，计算数值元素的行列式，解数值系数的线性方程组，等等）；

第二，提供有助于阐明基本概念及其相互联系的习题（例如，矩阵性质和二次型性质之间的联系，以及矩阵性质和线性变换性质之间的联系）；

第三，提供一组能够补充课堂教学并有助于扩大学生的数学眼界的习题（例如，斜对称行列式的 Pfaffian 的性质，相伴矩阵的性质等等）.

本书也提供了一些涉及定理证明的习题，这些定理可见诸于教科书，之所以收编这些习题是因为教师常常（由于时间不够）在教科书的基础上将一部分材料作为学生的家庭作业，而这恰恰可根据本习题集来作，因为它提供了完成证明的提示．作者认为这将有助于学生养成科学研究的习惯.

同其他习题集比较起来，本书有一些新的基本的特点，即：包含了涉及多项式矩阵的习题（§13），仿射空间和度量空间的线性变换的习题（§18 和 §19），以及关于群、环和域的补充．这一补充中的习题涉及该理论的最基本部分．因而，我认为，这一部分的习题可用于第一、第二学年学习中的课堂讨论.

讲授的内容和顺序主要取决于讲授者．作者曾考虑到讲授方法的这种不同，结果书中出现了一定数量的重复．例如，同样的事实，先是在二次型一节中给出，然后又在线性变换一章中给出；有一些习题是这样叙述的：既可以在实欧几里得空间中解这些习题，也可以在复酉空间中解这些习题．我相信，这将很有助于灵活地

使用本习题集.

由于现有教科书中使用的某些定义、术语和符号不完全统一，所以有些章节包含了引言，这些引言包括某些定义和关于术语和符号的简短讨论. 但第五节的引言例外. 在这一节的引言里介绍了计算任何阶行列式的基本方法，并对每种方法都作了举例说明. 这样作是因为普通教科书通常对此不予介绍，而学生在这方面又常常感到很困难.

带星号的题表示该题已作出解答或作了提示. 只有少数的习题作出了解答. 这些习题或者是包含一般方法而这方法要应用于其他一系列习题的(例如，习题 1151 给出了一个计算矩阵函数的方法，习题 1529 给出了构造如下基底的方法：在该基底下线性变换的矩阵有 Jordan 形)，或者是难题(比方说，习题 1433, 1614, 1617). 通常，提示只指出解题思路或方法，而实际解题则让学生自己完成. 只是对于比较难的习题才提供了一个概括的解题方案(参看习题 546, 1492, 1632).

在编写本书过程中，作者采用了国立莫斯科大学高等代数教研室成员提出的有益意见，谨向他们表示深切的谢意.

И. В. 普罗斯库烈柯夫

1978. 5. 20. 莫斯科

目　录

序言……………………………………………………………………i
第一章　行列式………………………………………………………1
§1. 二阶和三阶行列式……………………………………………1
§2. 排列和置换……………………………………………………10
§3. 任何阶行列式的定义和最简单性质…………………………15
§4. 计算数值元素的行列式………………………………………24
§5. n阶行列式的计算法…………………………………………27
§6. 子式、代数余子式和 Laplace 定理……………………………62
§7. 行列式的乘法…………………………………………………72
§8. 杂题……………………………………………………………84
第二章　线性方程组…………………………………………………94
§9. 按 Cramer 规则求解的方程组…………………………………94
§10. 矩阵的秩.向量和线性型的线性相关性………………………105
§11. 线性方程组……………………………………………………117
第三章　矩阵和二次型………………………………………………134
§12. 矩阵的运算……………………………………………………134
§13. 多项式矩阵……………………………………………………160
§14. 相似矩阵. 特征多项式和最小多项式. 矩阵的Jordan 形和对角形.矩阵函数………………………………171
§15. 二次型…………………………………………………………188
第四章　向量空间及其线性变换……………………………………201
§16. 仿射向量空间…………………………………………………201
§17. 欧几里得空间和酉空间………………………………………211
§18. 任意向量空间的线性变换……………………………………226
§19. 欧几里得向量空间和酉向量空间的线性变换………………243
增补……………………………………………………………………259
§20. 群………………………………………………………………259
§21. 环和域…………………………………………………………273

§22. 模……285
§23. 线性空间和线性变换(对第 10,16—19节的补充)……290
§24. 线性函数和线性型. 双线性函数和双线性型.
二次函数和二次型(对第 15 节的补充)……295
§25. 仿射空间(或点-向量空间)……299
§26. 张量代数……306
答案……323
第一章 行列式……323
第二章 线性方程组……357
第三章 矩阵和二次型……376
第四章 向量空间及其线性变换……420
增补……454

第一章 行 列 式

§1. 二阶和三阶行列式

计算下列行列式:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$.　2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.　3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$.　4. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.　6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$.　7. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.　9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.　11. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$　15. $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$.　17. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

计算下列行列式($i=\sqrt{-1}$):

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$.　19. $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

利用行列式解下列方程组:

22. $2x+5y=1,$
$3x+7y=2.$

23. $2x-3y=4,$
$4x-5y=10.$

24. $5x-7y=1,$
$x-2y=0.$

25. $4x+7y+13=0,$
$5x+8y+14=0.$

26. $x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos\beta,$
$x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\beta.$

27. $x\tan\alpha+y=\sin(\alpha+\beta),$
$x-y\tan\alpha=\cos(\alpha+\beta),$

其中 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$($k$ 是整数).

研究下面所给定的方程组是否为有定的(有唯一解), 不定的(有无穷多解), 或者矛盾的(没有解):

28. $4x+6y=2,$
$6x+9y=3.$

此时用 Cramer 公式能否给出正确的回答?

29. $3x-2y=2,$
$6x-4y=3.$

30. $(a-b)x=b-c.$

31. $x\sin\alpha=1+\sin\alpha.$

32. $x\sin\alpha=1+\cos\alpha.$

33. $x\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta.$

34. $a^2x=ab,$
$abx=b^2.$

35. $ax+by=ad,$
$bx+cy=bd.$

36. $ax+4y=2,$
$9x+ay=3.$

37. $ax-9y=6,$
$10x-by=10.$

38. 证明: 二阶行列式等于零的必要充分条件是它的行成比例. 对于列, 上述断言也正确(如果这行列式的某些元素等于零, 则成比例一语理解成: 一行的元素由另一行的对应元素乘上同一

个可以等于零的数而得到)．

39*．证明：对于实数 a, b, c, 方程 $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix}=0$ 的根是实数．

40*．证明：复系数二次三项式 ax^2+bx+c, 当且仅当

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=0$$

时，是完全平方．

41．证明：对于实数 a, b, c, d, 方程

$$\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix}=0$$

的根是实数．

42*．证明：分式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的值，此处数 c 和 d 至少有一个不为零，当且仅当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ 时与 x 的值无关．

计算下列三阶行列式：

43. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 44. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. 45. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 47. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. 48. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. 50. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 51. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

52. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. 53. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. 54. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.

55. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.　56. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.　57. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

58. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$.　59. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.　60. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

61. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

63. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

64. 在怎样的条件下下列等式成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

65. 证明: 行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

以及由此将元素 a, b, c 和 α, β, γ 循环排列所得到的另外两个行列式都等于零, 其中 a, b, c 是三角形的边长, 而 α, β, γ 分别是边 a, b, c 的对角.

计算以下三阶行列式, 其中 $i=\sqrt{-1}$:

66. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$. 67. $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$，其中 $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$，其中 $\varepsilon=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$.

70. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$，其中 $\varepsilon=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$.

71. 证明：如果一个三阶行列式的所有元素等于±1，则该行列式是偶数.

72*. 求三阶行列式可取到的最大值，条件是它的所有元素等于±1.

73*. 求三阶行列式的最大值，条件是它的元素等于+1或0.

利用行列式解下列方程组：

74. $2x+3y+5z=10,$
$3x+7y+4z=3,$
$x+2y+2z=3.$

75. $5x-6y+4z=3,$
$3x-3y+2z=1,$
$4x-5y+2z=1.$

76. $4x-3y+2z+4=0,$
$6x-2y+3z+1=0,$
$5x-3y+2z+3=0.$

77. $5x+2y+3z+2=0,$
$2x-2y+5z=0,$
$3x+4y+2z+10=0.$

78*. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+2=0,$
$-\frac{2y}{b}+\frac{3z}{c}-1=0,$

79. $2ax-3by+cz=0,$
$3ax-6by+5cz=2abc,$

$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$ $\qquad$ $5ax-4by+2cz=3abc,$

其中 $abc\neq0.$

80*. $4bcx+acy-2abz=0,$

$5bcx+3acy-4abz+abc=0,$

$3bcx+2acy-abz-4abc=0$ $(abc\neq0)$.

81*. 解方程组:

$x+y+z=a,$

$x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=b,$ $\qquad$ 其中 ε 是$\sqrt[3]{1}$的异于 1 的值.

$x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=c,$

研究下列各方程组：是有定的，不定的或是矛盾的.

82. $2x-3y+z=2,$
$3x-5y+5z=3,$
$5x-8y+6z=5.$

83. $4x+3y+2z=1,$
$x+3y+5z=1,$
$3x+6y+9z=2.$

84. $5x-6y+z=4,$
$3x-5y-2z=3,$
$2x-y+3z=5.$

85. $2x-y+3z=4,$
$3x-2y+2z=3,$
$5x-4y=2.$

86. $2ax-23y+29z=4,$
$7x+ay+4z=7,$
$5x+2y+az=5.$

87. $ax-3y+5z=4,$
$x-ay+3z=2,$
$9x-7y+8az=0.$

88. $ax+4y+z=0,$
$2y+3z-1=0,$
$3x-bz+2=0.$

89. $ax+2z=2,$
$5x+2y=1,$
$x-2y+bz=3.$

利用三角形规则直接计算，或者利用 Sarrus 法则，证明三阶行列式的下列性质:

90. 如果在三阶行列式中调换行和列(即如通常所说，转置它的矩阵)，则行列式不变.

91. 如果某一行(或某一列)的所有元素等于零，则行列式等于零.

92. 如果行列式的某一行(或某一列)的所有元素都乘以同一数，则整个行列式也乘以这个数.

93. 如果交换行列式的两行(或交换两列)，则行列式变号.

94. 如果行列式的两行相同(或两列相同)，则行列式等于零.

95. 如果一行的所有元素与另一行的对应元素成比例，则行列式等于零(对列的情形也有同样结论).

96. 如果行列式某行的每一个元素表为两个加项的和的形式，则该行列式等于两个行列式之和，这两个行列式除该行之外的所有其他行的元素都与原行列式一样，而和中第一个行列式该行的元素由第一个加项组成，第二个行列式该行的元素由第二个加项组成(对列的情况结论也正确).

97. 如果将一行的元素乘以同一数加到另一行相应元素上去，则行列式不变(对列也有同样结论).

98. 称行列式的某一行是其他行的线性组合，如果这行的每一元素等于其余各行相应元素与某些数的乘积之和，并且这些乘数对每一行而言是常数，亦即与元素在行中的位置无关. 类似地定义列的线性组合. 例如，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的第三行是前两行的线性组合，如果存在两个数 c_1 和 c_2，使有

$$a_{3j}=c_1a_{1j}+c_2a_{2j} \qquad (j=1, 2, 3).$$

证明：如果三阶行列式的某一行(或列)是其余两行(或列)的线性组合，则行列式等于零.

注. 逆命题也正确，但推出它需要行列式的进一步的理论.

99*. 利用上题举例说明，与二阶行列式不同（参看习题 38），两行(或列)成比例已经不是三阶行列式等于零的必要条件.

利用在习题 91—98 中指出的三阶行列式的性质，计算下列行列式：

100. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.　　101. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$.　　103. $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.　　105. $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$，其中$\varepsilon$是$\sqrt[3]{1}$的异于 1 的值.

107. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

108. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 i & a_1 i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 i & a_2 i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 i & a_3 i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

109. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$（给出所得结果的几何说明）.

110*. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$，其中 α, β, γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根.

不展开行列式而证明下列恒等式:

111. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

112. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

113. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

114. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

115. $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

116. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

117. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

118. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b).$$

119. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a) \times (c-b).$$

120*. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

121. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

122. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

§2. 排列和置换

确定以下排列的反序数(如果没有特别声明,则总是把增加次序的位置 1, 2, 3, …作为初始位置):

123. 2, 3, 5, 4, 1.

124. 6, 3, 1, 2, 5, 4.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

126. 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

127. $1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \cdots, 2n$.

128. $2, 4, 6, \cdots, 2n, 1, 3, 5, \cdots, 2n-1$.

在下面的排列中确定反序数并指出: n 取哪些数这排列是偶排列, n取哪些数它是奇排列:

129. $1, 4, 7, \cdots, 3n-2, 2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 3, 6, 9, \cdots, 3n$.

130. $3, 6, 9, \cdots, 3n, 2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 1, 4, 7, \cdots, 3n-2$.

131. $2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 3, 6, 9, \cdots, 3n, 1, 4, 7, \cdots, 3n-2$.

132. $2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 1, 4, 7, \cdots, 3n-2, 3, 6, 9, \cdots, 3n$.

133. $1, 5, \cdots, 4n-3, 2, 6, \cdots, 4n-2, 3, 7, \cdots, 4n-1, 4, 8, \cdots, 4n$.

134. $1, 5, \cdots, 4n-3, 3, 7, \cdots, 4n-1, 2, 6, \cdots, 4n-2, 4,$