郑维敏 著

正反馈

清 华 大 学 出 版 社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

正反馈

郑维敏　著

清华大学出版社

（京）新登字 158 号

内容简介

本书系统地介绍正反馈的理论基础和方法，并列举了几种实际应用。全书共分 11 章，前 9 章分别讲述正反馈系统、非线性动力学、分形、自相似和分数维、迭代函数系统、确定性混沌、连续系统的混沌、递推演化、证据理论和近似递推，后两章结合管理和金融分别讲述系统的演化和分形资本市场。

书中有著者从事自然科学基金项目和指导博士论文的研究成果，颇有参考价值。系统工程工作者、管理工作者、金融工作者、复杂系统演化过程研究者及高校师生均可从该书中受益。

图书在版编目（CIP）数据

正反馈/郑维敏著. —北京：清华大学出版社，1998.1
ISBN 7-302-02757-9

Ⅰ. 正…　Ⅱ. 郑…　Ⅲ. 资本市场-正反馈-研究　Ⅳ. F83 0.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 25846 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编：100084）
因特网地址：www. tup. tsinghua. edu. cn
印刷者：清华大学印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168　1/32　**印张**：$12^5/_8$　**字数**：327 千字
版　次：1998 年 3 月第 1 版　1998 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02757-9/F・164
印　数：0001—4000
定　价：18.60 元

前 言

客观世界，包括自然界和社会是演化的，所谓演化就是发展，事物的发展可以是进化、进步，也可以是退化、衰亡。生物的进化或消亡就是代代相传而又有变异的演化过程。人类社会的进步及经济发展也是演化过程。许多物理过程和化学反应也是按一定规律演化的。

达尔文的进化论名著《On the Origin of Species by Means of Natural Selection，or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life》(1859)表述了他的基本思想。其中有两个思想是应该特别强调的，一个思想是物种在求生存发展的过程中，适者存，不适者亡。另一个思想是新物种的起源是由于演化过程中的自然选择。生物的繁殖是物种求生存发展的推动力，它是一种正反馈作用，推动着物种的演化。在自然选择下，演化结果是适者存，并能够变异从而演变出新的物种。生物的进化形成了目前上百万的多样化的生命，为自然界创造了巨大的财富。

与繁殖相似，其它系统中的自增强、自催化、自组织等等，都是正反馈作用，是促使事物演化的原因。演化过程是在周围环境及有限资源下，通过自然选择、竞争或人工干预进行的。例如城市的形成与发展、市场的形成与发展、传染病的传播、人才的成长、山脉及河流的形成、火山的爆发、气候的演变、渗滤、爆炸、裂纹的发展等等。从大系统到小系统的演化，都有正反馈在起作用而又受到各种

不同的抑制、约束和选择。正反馈是演化、发展的原因，各种的限制和选择使演化的形态和行为既复杂又多样化，演化系统是一种以正反馈推动的非线性系统。

事物一代一代的发展或一年一年、一月一月的发展是通过正反馈的迭代变换或递推而演变的。递推关系可以是固定的，也可以是时变的；可以是确定的，也可以是随机的，递推关系的表达形式可以是差分方程、微分方程，也可以是规则式的。事物发展有它的必然性但也有偶然性。由于正反馈的自增强作用，系统的演化往往对初始状态敏感或和其有密切关系。偶然的小事件对演化过程及其结果会有重要的影响。因此同类事物的发展也是形形色色很不相同的。

系统的动态行为都是趋向于吸引子而演化的。吸引子可以是不动点、不动集合，可以是稳定点、极限环，也可以是准周期性轨迹或非周期性奇异吸引子。在条件或参数变化时还可能出现分支现象，使吸引子及其动态行为发生质的变化。例如，相变是物理学中的一个重要概念，是系统的一个转折点，它往往是两个吸引域的边界，或者走向生存或者走向消亡，或者变好或者变坏。这是竞争中的一个尖锐问题，也是一个很复杂的问题。

如何描述矿石的裂纹、降雨区的边界、液体的渗透、交易市场价格的波动、系统的相变等复杂而又不规则的形态和行为呢？B. Mandelbrot 创造了一个新词“分形”(Fractal)，它是分数(Fraction)及分裂(Fracture)的意思。他的著作“Fractal Geometry of Nature”(自然界的分形几何)是开创性的。它提出了分形的观点以及复杂系统分形建模的新途径。分形过程本身就是一种正反馈的迭代过程。而许多事物具有的幂关系(Power law)则是分形的物理基础。

系统的演化有多种发展的途径，偶然事件会产生重要的作用。在有人参与的系统中，人们的干预可以使系统向更好的方向发展。

如果系统的数学模型已知，这是个寻优问题，寻优算法本身就是一种递推演化过程，这里有算法复杂性问题。然而数学模型不等于现实，我们对系统常常只有不完整和不确定的知识和零散的信息。在这种情况下，人们必须在演化过程中收集数据和证据，不断的累积经验。由于知识和信息的不完备，偶然因素或人的意志会起重要作用。但是不管怎样，推理将有助于人们的搜索。在人工干预的演化过程中，近似推理和近似递推是不可避免的。

本书共分 11 章，前 9 章是基础性的，最后两章是专题性的。最后两章“系统的演化”和“分形资本市场”是结合管理和金融的。研究不同系统的演化必须结合不同领域知识。因此，本书是不同领域研究系统演化动力学的基础。

本书的部分内容与历届博士论文的研究工作有关，其中有他们的辛勤劳动。在出版过程中得到了清华大学出版社蔡鸿程编审等的支持，以及博士生贲金锋、秘书董娟的配合，在此一并致谢。

郑维敏

1998.1.8

第1章　正反馈系统

1.1　竞 争 系 统

种群之间的竞争生存是一种很典型的具有正反馈的非线性系统。同一种群中对资源有争夺，不同种群之间也有争夺。描述两种种群竞争的微分方程式组如式(1.1.1)所示。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}-k_{12}x_2\right)\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}-k_{21}x_1\right)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

其中，x_1 及 x_2 分别表示两种种群的群体大小，r_1 及 r_2 分别表示它们在无限制条件下的增长率，r_1x_1 及 r_2x_2 是一次变量的正反馈。k_1 及 k_2 分别表示环境(包括人工干预)对种群的承载能力，随着种群群体的增大，它将抑制各自种群的增长，也可以说是同一种群中个体之间有竞争，有些个体不能存在，从而影响了群体的大小。k_{12}及k_{21}表示不同种群之间的争夺，两者起相互抑制的作用。

这组方程式也可用来描述同行企业与不同行业在市场上的竞争与发展。分析表明(见第 2.13 节)当 $k_1k_{21}>1$ 且 $k_2k_{12}>1$ 时两种种群竞争的结果是只有一种能够生存，另一种将消失，至于哪一种种群将被淘汰，取决于初始状态。如果 $k_1k_{21}<1$ 且 $k_2k_{12}<1$，则两种种群能够共存。

以上结论是在假定所有的参数都是正的条件下得出的。假如某些参数可以为负，为零或为时变，例如 $k_1(t)$，则可能出现其他的动态行为，例如极限环。

1.2 爆 炸

第1.1节只谈到 x 的一次项正反馈。如果有高次项的正反馈，又可能出现什么现象呢？例如，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + x^2$$

其中除了常数项1，维持 x 的恒定增长外，还有一项 x^2 的正反馈。当初始值 $x(0)=0$ 时，上述微分方程式的解是

$$x(t) = \tan t$$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时 $x(t)$ 等于无穷大，也就是说在有限时间内 x 可以达到无穷大。从物理上讲，它是爆炸。

又例如对称系统，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx + x^3 = rx\left(1 + \frac{1}{r}x^2\right)$$

它也会产生爆炸过程。不过在物理系统中，爆炸的范围将受到抑制，也就是在微分方程式中引入更高次项的负反馈，例如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx + x^3 - x^5$$

1.3 灾 难

图 1-3-1 是一个理想化的机械系统，可以用来说明一些现象及概念。质量为 m 的物体在弹簧的作用下可以在线槽内滑动。假如弹簧在中点呈压缩状态，那么该物体有三个可能的位置可以停

留。若弹簧只是受压缩而没有弯曲，则物体可以停留在中间，但是这是一个不稳定的状态，因为受压缩的弹簧很容易弯曲。又由于系统是对称的，即左右条件都是一样的，或者说 x 为正或为负，系统方程式是一样的。这时，弹簧可能左弯或右弯，从而把物体推向右边或左边，停留在弹簧既不受压缩又不拉伸的状态。这两个状态是稳定的。因此说这个系统有三个可能的状态，中间是不稳定的，两边是稳定的。到底是停在左边还是右边，有一定的偶然性。

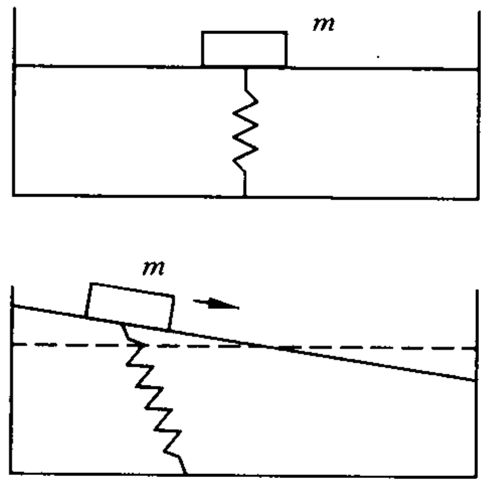

图 1-3-1

假如线槽有一定的倾斜，而物体又处于倾斜的上方，那么倾斜到一定程度时，物体下滑，使得弹簧不断左弯从而把物体推到倾斜右下方处的稳定状态。在这个过程中有弹簧弯曲的正反馈或自增强作用。这种现象叫分支、跃变，它是由于参数的变化而突然引起了质变。如果跃变起破坏作用，这就是灾难。

式(1.3.1)的系统当 $g=0$ 时是一个对称系统，把 x 变为 $-x$，系统方程式不变。它有三个稳态点 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{r}$，$x=0$ 是不稳定的，$\pm\sqrt{r}$ 是稳定的。到底是 $x=\sqrt{r}$ 还是 $x=-\sqrt{r}$ 有偶然性。当 $g\neq0$ 时对称性被破坏，就会出现分支、跃变(详见第 2 章)。

$$\frac{dx}{dt} = g + rx - x^3 \tag{1.3.1}$$

1.4 混　沌

式(1.4.1)是 Rössler 化学反应方程式组

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(x_2 + x_3)\\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + ax_2\\ \frac{dx_3}{dt} &= b + x_1x_3 - cx_3\\ &= b + (x_1 - c)x_3\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

其中 a,b,c 系数为正，第 2 个方程式是正反馈，第 3 个方程除了固定的驱动 x_3 增长的 b 外，到底是正反馈还是负反馈取决于(x_1-c)的符号。如果是$(x_1-c)>0$ 则是正反馈，如果是$(x_1-c)<0$ 则是负反馈。由于 x_3 的系数与 x_1 有关所以是非线性系统。其结构图如图 1-4-1 所示。如果开始时 x_1 及 x_3 很小，那么上下两个子系统

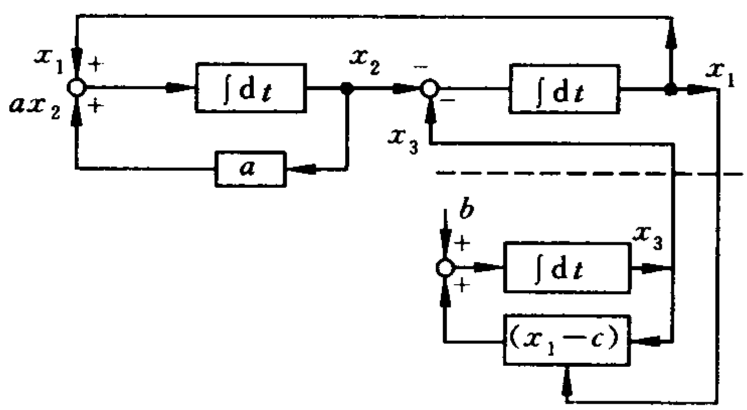

图　1-4-1

的偶合作用很小，它们之间的联系可以近似地认为是断开的。上子系统是一个二阶不稳定的线性系统，这是由于 a 的正反馈作用。其

特征方程及特征根分别是

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

由于$a>0$所以是不稳定的。如果$a<2$,例如取$a=0.2$,则$\lambda_{1,2}$是两个右半平面的复数根,因此动态行为是发散的振荡。此时,由于x_1还很小,$(x_1-c)<0$,下子系统是具有负反馈的一阶系统,而且是稳定的。但是由于b的驱动,x_3将缓慢的稳定增长。当x_1发散振荡到足够大时,上下子系统的偶合就再不能被忽略了。如果x_1已超过c,则下子系统变为正反馈的一阶系统,x_3迅速增长。x_3的增大将迫使x_1开始减速,发散的振荡受到抑制,然后x_1下降。当上子系统的振荡处于下降并达到$(x_1-c)<0$时x_3的子系统又变为负反馈而使x_3减小。x_1及x_3同时变小到一定程度,又将开始另一阶段的振荡上升,当然,第2次振荡与第1次振荡的起始点是不同的。如此不断往复而产生永不重复的非周期性运动。下子系统好像是一个开关,在二阶系统中由于开关作用可以产生周期性振荡,例如*Van der pol*振荡器。但是在三阶系统却可能产生非周期性振荡或混沌。混沌是很不规则的非周期运动,但它是可以控制及利用的,例如可利用混沌波载送保密的信号。

1.5 迭代系统

图1-5-1是一种正反馈系统,与第1.1节到第1.4节涉及的不同,它是离散系统,是用差分方程式描述的。输入x_n经$f(x_n)$变换变为x_{n+1},$x_{n+1}=f(x_n)$。x_{n+1}是正反馈系统的输出。x_{n+1}经过延时d,再反馈输入又经$f(\cdot)$变换为输出x_{n+2},如此不断迭代,它是迭代系统。例如,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = f(x_n) \tag{1.5.1}$$

它具有 x_n 一次项的正反馈项，也有 x_n^2 二次项的负反馈抑制作用。它是一种具有正反馈的非线性离散系统。表示了 x 一代一代发展的情况。

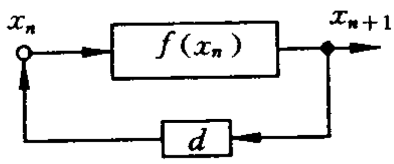

图 1-5-1

即使是像式(1.5.1)那样规律非常简单的系统，它也能够产生非常复杂的动态行为和形态，例如振荡、分支、混沌、间歇(见以后的几章)。譬如

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= rx_n(1-x_n) = f(x_n) \\
x_{n+2} &= rx_{n+1}(1-x_{n+1}) \\
&= f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n) \\
&\vdots \\
x_{n+k+1} &= f^{(k+1)}(x_n)
\end{aligned}
$$

如果出现

$$
\begin{aligned}
f^{(2)}(x_n) &= x_n \\
f^{(k+1)}(x_n) &= x_n
\end{aligned}
$$

则可以出现不同周期的振荡。差分方程看起来简单，实际上变化多端，具有丰富的内容。以下几节将介绍一些实例及其多样化的内容。

1.6 开 方 器

设实数 N，我们需要求解 N 的开方根，即 $\sqrt{N}$。为此，可以采用图 1-6-1 的迭代系统，其中

$$f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

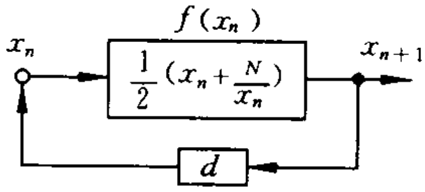

图　1-6-1

它是一种具有正反馈的非线性离散系统。经过多次迭代可以使 x_{n+1} 逐步逼近 $\sqrt{N}$。假如 $N=2$ 求解 $\sqrt{N}$，任选初始值 $x_0=1$，则迭代结果如下：

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1.5$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.4166\cdots$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

为什么这种迭代系统能实现开方器的作用呢？原因是当 $n\to\infty$ 时

单调 [illegible]下降

$$x_{n+1} = x_n = f(x_n)$$

即求不动点

$$x_n = f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

解得，

$$x_n = \sqrt{N}$$

也就是说不动点是 $\sqrt{N}$，x_n 的运动过程是趋向不动点。其实不只是开方器可以用迭代系统实现，我们知道可以用牛顿法求多项式的根，牛顿法就是一种迭代系统。开方器也好，牛顿法也好，它们的

吸引子

运动过程都收敛于不动点，所以这种不动点也叫吸引子。

1.7 随机数发生器

用计算机产生伪随机数有许多迭代方法，常用的一种是

$$x_{n+1} = (ax_n + c)\mathrm{mod}\ m$$

$$m = 2^k,\ k = \text{字长}$$

这是一个确定性的迭代关系，却能产生随机数或随机过程。随机过程可以由确定性系统产生，这不是一个值得注意的一个概念吗?

还有一种叫 Fibonacci 的随机数发生器，它是二阶非线性系统

$$x_{n+1} = (x_n + x_{n-1})\mathrm{mod}\ m$$

其系统图如图 1-7-1 所示。

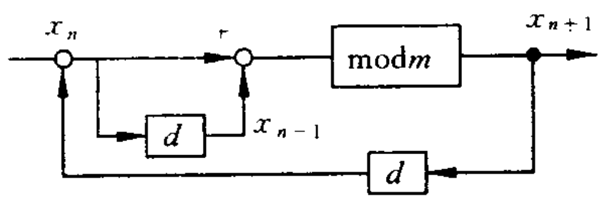

图 1-7-1

1.8 昆虫种群发展模型

生物界种群的发展可以用下述模型描述:

$$P_{n+1} = P_n + rP_n(1 - P_n)$$

其中，P_{n+1}，P_n 分别是 $n+1$ 代及 n 代的群体(用百分比表示)，$rP_n(1-P_n)$表示增长，它是一种具有正反馈的非线性系统，如图 1-8-1 所示。

根据增长系数 r 的大小，历代种群的发展过程可能是单调增

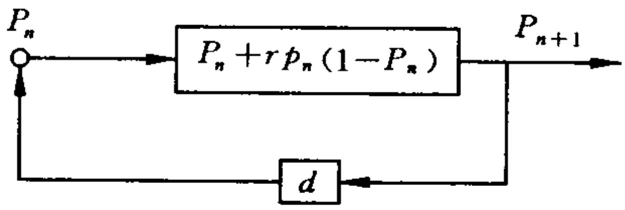

图 1-8-1

长的，可能出现 2 周期循环、4 周期循环…2^k 周期循环；也可能出现 3 周期循环、6 周期循环等等。这是因为在一定条件下

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n) = x_n$$

这样就产生了 2 周期循环，其余类推，还可能出现周期循环与不规则过程的交替，叫间歇。更为奇特的是当 $r=3$ 时，用计算机都很难计算了。譬如初始种群为 8.0379%，我们用不同的精度（单精度、双精度）去计算。在迭代几百次后，两种计算结果完全不同而且相差甚多。例如一个结果是 8.5180%，另一结果是 121.1582%，到底哪一个是对的？如图 1-8-2 所示，种群的发展过程似乎已不可能用计算机研究了。从图还可知，这是一个很简单的模型，规律也很简单，但能产生复杂的行为。它已不可能用理论计算而必须用计算机进行实验研究。一方面是“不可能”，另一方面是“必须”。这不是一个很有趣而又必须解决的问题吗？

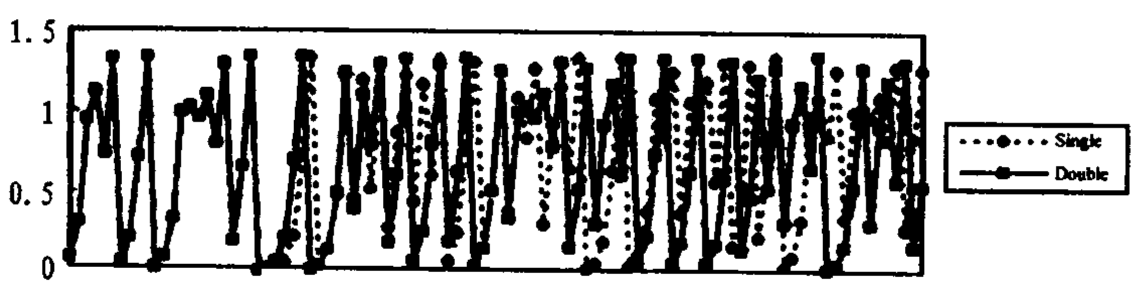

图 1-8-2

这个模型也说明简单的规律及系统可以产生复杂的行为，复杂的行为不都是由复杂系统或规律产生的。的确，种群发展的计算，中学生都能胜任。人们的观念也该有所转变了。

1.9 相变及 Julia 集合

介绍一种非常简单的迭代系统。

$$x_{n+1} = x_n^2$$

其中 x_n 可以是复数。令初始值 $x_0=1e^{j2\pi\theta_0}$，则有，

$$x_1 = x_0^2 = 1e^{j2(2\pi\theta_0)}$$

$$x_2 = x_1^2 = 1e^{j2^2(2\pi\theta_0)}$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1}^2 = 1e^{j2^n(2\pi\theta_0)}$$

即幅值维持为 1，而每迭代一次则角度倍增一次。如果 θ_0 为有理数，则迭代将使 x 出现周期性轨迹，如果为无理数，则迭代将使 x 出现永不循环的轨迹。θ_0 为 0 到 1 的任意数，$\theta_0=1$ 表示角度是一圈相当于 2π 弧度。轨迹的特征与初始值有关。

对于这类系统，其幅值必须维持为 1。若幅值大于 1，则迭代下去幅值不断增大将趋向无穷大；若幅值小于 1，则迭代下去幅值不断减小将趋向于零。这譬如树林着火，若树林密植，最后火势蔓延，树林可能全部烧光。若树林稀疏，最后火势将熄灭。一部分树林的火势向周围渗透或火势趋向熄灭是一种空间迭代过程。树林的稀密程度可以用林木的成活的概率 P 表示，P 大则密，P 小则稀。从熄灭到烧光是相变，就好像从水变为汽，铁磁物质从无磁性变为有磁性，商品在市场竞争中从独占到消失，都是从量变到质变的过程。$x_n=1e^{j2^n(2\pi\theta_0)}$表示了一种相变的临界状态。

相变是物理学中的一个重要课题。Kenneth Wilson 研究相变

并提出重归一理论(re-normalization theory)从而获1982年诺贝尔物理奖。

若令 $x_{n+1}=x_n^2+C$,C 是复数,由此产生了著名的 Julia 集合和 Mandelbrot 集合,它们是复杂而奇特的图形,表示了不同动态轨迹的特征。

1.10 Cantor 集及分形

一条直线做不断分割迭代可以变为灰尘。图 1-10-1 是 0 到 1 的直线,每迭代一次就把各线段的中间 1/3 段去掉。它的迭代关系或迭代函数是什么呢?式(1.10.1)是两个正反馈的迭代函数的并,

$$x_{n+1}=f(x_n)=f_1(x_n)\cup f_2(x_n) \tag{1.10.1}$$

其中

$$f_1(x_n)=\frac{1}{3}x_n \tag{1.10.2}$$

$$f_2(x_n)=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3} \tag{1.10.3}$$

对照图 1-10-1,左边的一半图是由 $f_1(x_n)$ 运算而得到的,右边的一

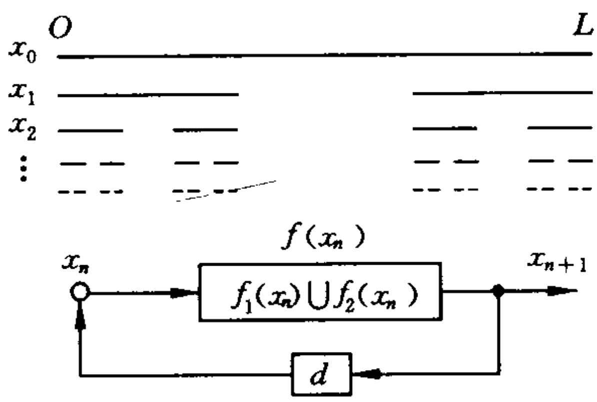

图 1-10-1