应用泛函分析引论

张鸣歧　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书共分七章及四个附录，内容包括集合与映射、点集论、度量空间、线性赋范空间与巴拿赫空间、内积空间和希尔伯特空间、线性算子谱论简介、泛函极值以及实数论、测度论、勒贝格积分等，前六章并附有习题。本书可作高等学校工科硕士研究生的教材和理工科本科生泛函分析选修课教材，也可供有关专业教师和工程技术人员参考。

应用泛函分析引论

张 鸣 岐 编

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

海军航空工程学院印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　9.75印张　227千字

1989年4月第一版　　1989年4月第一次印刷

印数：1-3500册

统一书号：ISBN 7—81013—229—6/O.37　　定价：2.75元

前　言

（一）

泛函分析是现代数学的一个重要分支，它起源于古典分析。它的历史虽然不长，但发展很快。其基本概念建立于本世纪初直到二十年代，而作为数学中一门独立的学科则形成于卅年代，其理论到六十年代发展趋于成熟。现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理、现代控制论等方面。在现代科技资料中，也日益广泛地使用了泛函分析的概念、术语、记号和方法。这足以说明，泛函分析不但是数学工作者而且也是高级工程技术人员所必须具备的数学基础知识。

由于本课程是为我院多个不同类型（工科）研究生开设的，加上学时不宜超过60学时，所以，我们只能介绍泛函分析中最基础的知识。

为了使读者能顺利地接受本课程的主要内容，我们在本书前两章扼要介绍有关集合与映射，数学分析中的基本理论，测度和勒贝格（Lebesgue）积分的初步知识。编者力求在学时有限的情况下，以最精简的形式介绍泛函分析的基础知识，但仍保持这门学科的核心部分。

由于编者水平有限，时间仓促，又缺乏这门课程的教学经验，定有许多不妥，甚至错误的地方，请读者批评指正。

（二）

本书于1985年和1986年曾二次油印，在85、86、87级研究生《应用泛函》课程讲用，经过三期的教学实践，符合当前全国工科研究生关于开设《泛函分析》的教学要求。考虑到纯数学的系统性以及更好地弥补读者未学过《数学分析》、《实变函数》的不足，将原讲义的第二章有关实数理论，测度论以及勒贝格积分的内容作了适当的充实而放进附录之中，现在的第二章主要介绍点集论。此外增加了第七章泛函的极值。至于其它有些章节小的变动，就不在此一一赘述了。

本书第二稿完成后，呈蒙原北京工业学院胡钦训教授非常认真地审阅了全文。谨向他表示衷心的感谢。

编　者

1987年9月于

海军航空工程学院

目　录

第一章 集合与映射

在现代数学中，人们已经越来越广泛而深入地用到集的概念。集合论重要文献首先是德国数学家康脱（G·C antor）在上一世纪末发表的，后来逐步发展为数学的一个分支，集合论的某些概念和结果已成为近代数学中许多分支的基础。

§1·1 集和集的运算

1.集的概念

我们把一定场合所考察、研究的某些对象的全体称为一个集。例如，自然数全体、偶数全体或素数全体所形成的数集；又如 1,3,5这三个数组成的数集；平面上第一象限里点的全体所成的点集，等等。一般地说，所谓一个集，就是指具有某种特定性质P的对象的全体，其中的对象（或者说成员）称之为集的元素。集有时也称集合。

集与元素通常分别用大写拉丁字母A、B、X、Y…与小写拉丁字母a、b、c…来表示。

所谓给定了一个集A，就是指给定了集A的元素a的特性。使得任何一个元素x要末属于A，也就是“x是A的元素”，记作

$$x \in A$$

要末不属于A，也就是“x不是A的元素”，记作

$$x \overline{\in} A$$

这两者必居其一，也只有其一成立。

具有特性P的全体元素的集A也常记作

$$A=\{x|x\text{具有性质}P\}$$

例如：A是不超过10的正偶数组成的数集，则A可表示成为

$$A=\{x|\ 1<x<10,\ x\text{是偶数}\}$$

又如：全体自然数组成的集——自然数集N可以表示成

$$N=\{1,2,3,\cdots n,\cdots\}$$

不含有任何元素的集，称为空集，记作ϕ。集的元素并非一定都是数。例如A是一切在$[a,b]$上连续的函数所组成的集，常称为连续函数集，该集就不是一个数，而是连续函数。通常用$C[a,b]$表示这个连续函数集。

又例如A是一切无穷数列$\{x_n\}$所组成的集，则A的元素是无穷数列。

有时我们也把集$\{x|x\in E,\ x\text{有性质}P\}$改写成$E\{x\text{有性质}P\}$。例如设$f(x)$是$E$上的一个函数，$C$是个实数，我们把集$\{x|x\in E,\ f(x)\leqslant C\}$写成$E\{f(x)\leqslant C\}$。

元素与集之间有属于或不属于的关系。另外，集与集之间也有某些重要关系，其中最基本的是包含关系与相等关系。

定义1 设A、B是两个集，如果凡属于A的元素x都属于B，也简记作

$$\forall x\in A,\ x\in B\quad(\text{或}x\in B,\ \forall x\in A)$$

我们就称A是B的子集，常记作

$$A\subset B\ \text{或}\ B\supset A$$

读作A包含于B或B包含A。

当A与B互相包含时，也即同时有

$$A\subset B,\ A\supset B$$

成立，则称A与B相等，记作$A=B$ 。

如果$A\subset B$，而B中确有元素b不属于A，称 A是B 的 真子集。为了方便，规定空集ϕ是任何 集A的 子 集， 也即 $\phi\subset A$ 。

有了相等关系就可以定义集的运算。

2. 集的运算

定义 2 设A、B是两个集，令

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}\ x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}\ x\in B\}$$

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{且}\ x\overline{\in} B\}$$

称$A\cup B$是A与B的并；$A\cap B$是 A 与B的交：$A-B$是A 与B的差。

显然，$A\cup B$就是A与B的元素合并在一起组成的 集；$A\cap B$就是A与B的公共元素组成的集；$A-B$是A中那些 不 属于B的元素组成的集。当$A\cap B=\phi$时，也称 A与B互不 相交（或互斥）。

差集$A-B$也常记作C_AB，称为B关于A的余集。在特别研究某基本集X的子集A时，C_xA也即$X-A$，可 简 记作C_A，称为A的余集。

关于集的并、交、差与余集可以用图形去表示之（见图1-1），它可帮助我们理解集的各种运算概念。

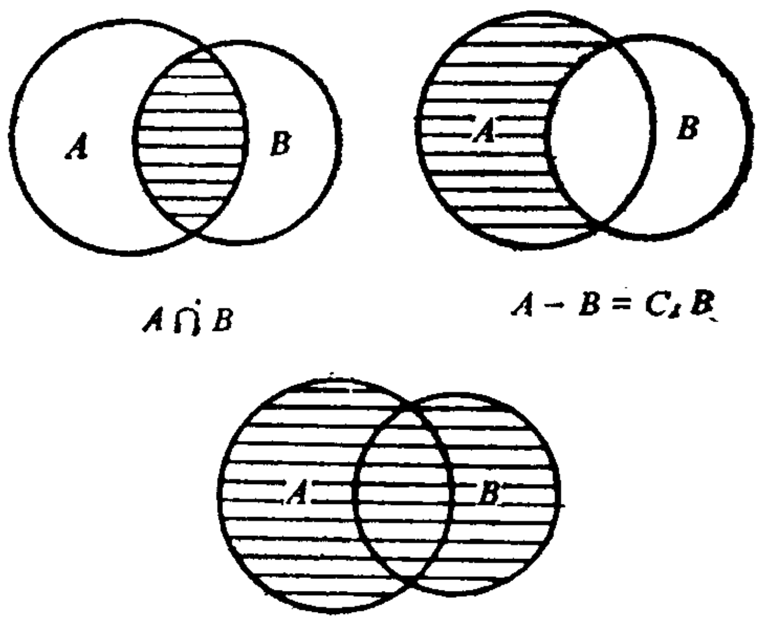
并与交的概念也可以推广到任意多个集的情形。

设$\{A_\alpha\mid \alpha\in N\}$是任意一族集，其中$\alpha$是集的指标，它在某个固定的指标集$N$中变化，由一切$A_\alpha$（$\alpha\in N$）的所有元素所组成的集称作为这族集的并，记作

$$\bigcup_{\alpha\in N} A_\alpha=\{x\mid \exists\,\alpha\in N，\text{使得}x\in A_\alpha\}$$

同时属于每个集A_α（$\alpha\in N$）的一切元素所组成的集，称做为这族集的交，记作

$$\bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha=\{x \mid x\in A_\alpha,\ \forall\alpha\in N\}$$



$A\cap B$　　$A-B=C_A B$

$A\cap B$

图 1－1

由定义容易验证集的运算满足如下一些规律：

（1）等幂律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

（2）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（3）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（4）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

6° 笛摩根（De－Morgan）律

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$$

$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$$

下面仅以第一个笛摩根公式为例，来说明有关集的包含与相等式的一般证明方法。

例 求证 $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$

〔证明〕 设$x\in C-(A\cup B)$，则$x\in C$，同时$x\overline{\in}A$，$x\overline{\in}B$，故$x\in C-A$且$x\in C-B$，可见

$$x\in(C-A)\cap(C-B)$$

这就是说明凡$C-(A-B)$中的元素都属于$(C-A)\cap(C-B)$。所以

$$C-(A\cup B)\subset(C-A)\cap(C-B)$$

反之，设 $x\in(C-A)\cap(C-B)$，则 $x\in(C-A)$，$x\in(C-B)$，$x\in C$ 同时$x\overline{\in}A$，$x\overline{\in}B$，即

$$x\in C-(A\cup B)$$

这就是说凡 $(C-A)\cap(C-B)$中的元素必属于$C-(A\cup B)$。

所以 $(C-A)\cap(C-B)\subset C-(A\cup B)$

综合起来就得到

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$$ 〔证毕〕

不难将笛摩根公式推广到任意多个集合的情况：

（1） $C_A(\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(C_AA_\alpha)$

（2） $C_A(\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(C_AA_\alpha)$

最后顺便指出，集的运算规律体现了重要的“对偶律”，也就是当一个集的关于$\cup$、$\cap$的关系式如果成立的话，则将式

中$\cup$、$\cap$分别换成$\cap$、$\cup$所得的新关系式也是成立的。读者仔细观察上述运算性质，不难看到这种规律性。

在结束本节之前，我们引进所谓积集的概念。

设A、B是两个非空的集，$a\in A, b\in B$，所有有序元素组（a,b）为元素组成的集，记为$A\times B$，也即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

称$A\times B$为A与B的积集或迪卡尔积集。

显然，平面点集$R^2=R\times R$，即座标平面R^2就是实直线R与它自身的积集。

类似地定义n个集的积集，记作$\prod_{i=1}^{n} A_i$，就是

$$\prod_{i=1}^{n} A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_i$$

§1·2 映射与逆映射

映射是函数概念的推广，是研究更一般的集之间的对应关系，它也是现代数学中最基本的概念之一。

定义1 设A、B两个非空集合，如果存在某一个法则f，使得对于A中任何一个元素x，在B中有一个确定的元素y与之对应，则称f为A到B中的映射（也称映照），记为

$$f: A\to B$$

当映射f使y和x对应时，Y称为x在映射f下的象，记为$f(x)$，也可表示为

$$f: x\to y$$

对于任一固定的y，称适合关系$y=f(x)$的x的全体元素y在映射f之下的原象，集合A称为映射的定义域，记为$D(f)$，设C是A的子集，C中所有元素的象的全体，记为$f(C)$，称它是集C在f之下的象。$f(A)$称为映射f的值域，记为$R(f)$。

如果$f(A)=B$，就称f是A到B上的映射。显然，如果f是A到B上的映射，那末f是A到B中的映射，但其逆不真。

特别地，如果值域B是一数集（实数集或复数集），映射f就是定义在集合上的函数，如果A、B都是数集，它们之间的映射就是数学分析中研究的函数了。由此可见，映射概念就是函数概念的推广。

定义 2 设f为A到B上的一个映射，如果对每个$y\in B$，只有唯一的x满足$f(x)=y$，就称f是可逆映射。

换言之，对A中任意两个元素x_1，x_2，当$x_1\neq x_2$时，必有$f(x_1)\neq f(x_2)$，那末f就是可逆映射。

例如$(-\infty,+\infty)$上的函数$\varphi(x)=\sin x$，$\psi(x)=x^2$都不是$(-\infty,+\infty)$到$(-\infty,+\infty)$上的可逆映射。显然任何一个严格单调函数都可以看成它的定义域到值域中的可逆映射，又如$(0,1)$上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

是$(0,1]$到$[0,1]$中的可逆映射。

定义 3 设f是A到B上的可逆映射，则称f为A到B上的一一对应的映射。

换句话说，f是A到B的一一对应映射，它意味着对于A中任何一个元素a，有唯一的$b=f(a)\in B$，而且对B中每个

元素b，必在A中有唯一的元素a，适合$f(a)=b$ 。

例如上面的函数$f(x)$就只是$(0,1]$到$[0,1]$中的可逆映射，而不是$(0,1]$到$[0,1]$上的一一对应。其实，任何可逆映射f一定是$D(f)$到$R(f)$上的一一对应。

定义 4 设φ为A到B中的可逆映射

$$\varphi: \quad A=D(\varphi)\to R(\varphi)\subset B$$

我们作$R(\varphi)$到$D(\varphi)$的映射ψ如下：如果

$$\varphi: \ x\to y \quad x\in D(\varphi), \ y\in R(\varphi)$$

我们令ψ：$y\to x$（由于ψ是可逆的，根据可逆映射的定义，对于每一个y,与它相对应的x是唯一的,因此ψ是定义好了的）。ψ实现了从$R(\varphi)$到$D(\varphi)$上的逆映射，我们称ψ为φ的逆映射，记ψ为φ^{-1}：

$$\varphi^{-1}: \quad R(\varphi)\to D(\varphi)$$

显然$D(\varphi^{-1})=R(\varphi)$，$R(\varphi^{-1})=D(\varphi)$ 。

因此，逆映射是反函数概念的推广。一个严格单调函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$可以看成映射f逆映射。

我们介绍一下映射的限制与延拓的概念。

定义 5 设f、g分别是定义域D_f、D_g到B中的映射，如果$D_f\subset D_g$，而且对于D_f中的每个元素x成立着

$$g(x)=f(x)$$

就称映射g是映射f在D_g上的延拓。反之，称f是g在D上的限制，记为$f=g|_{D_f}$ 。

显然，给定g是D_g到B的映射，则g在D_f的子集上的限制$g|_{D_f}$是由g与D_f所唯一地确定，但是一个映射f在更大的定义域上的延拓并不是唯一的。在许多问题中，常

要求延拓后的映射满足一定的附加条件，例如在富里叶(Fourier)级数中，要把定义在$(-\pi, \pi)$上的函数$f(x)$延拓成$(-\infty, +\infty)$上的2π为周期的函数，这时也常称为周期延拓。

§1·3　对等与基数

集合可分为两类——有限集与无限集，只含有有限多个元素的集称为有限集，其余的称为无限集。如通常所认为的那样，有限集的典型特性应该是具有一个标志其元素个数的自然数（或0），而确定有限集个数的方法是把集合中元素一个一个地"数"。这等于将集中各元素按任一方式给它们编号：$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中$i \neq j$时，$a_i$和$a_j$是不同的元素。这样就使$A$和自然数列某一段$\{1, 2, \cdots, n\}$一对一地对应起来，最后对应的一个自然数$n$显然就是$A$的元素"个数"。由此不难推知，两个有限集元素个数相同的充要条件，是它们能够和自然数列的同一段一一对应，而这又等价于这两个集彼此一一对应。我们打个比方，在一个大教室里，如果每个人都有一个座位，而且每个座位上都有一人，那末我们根本不用一个一个地去"数"，便立刻知道教室中人数和座位数是相同的。

上述的讨论虽然只适用于有限集，但是一一对应的思想却不限于有限集，它将帮助我们把元素个数的概念推广到无限集。

定义 1　设A、B是两个非空集合，如果存在A到B上的一个一一对应φ，则称A和B是对等，记为$A \sim B$。此外约定

$\phi\sim\phi$ 。

例1 我们可给有限集合一个不依赖于元素个数概念的定义：集合A称为有限集，如果$A=\phi$或者A和自然数的某段$\{1,2,\cdots,n\}$对等。

例2 {正奇数全体}和{正偶数全体}对等。

例3 {自然数全体}～{正偶数全体}。

例4 区间(0，1)和全体实数R对等，这只须对每个$x\in(0,1)$，令$\varphi(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$ 。

例3和例4说明，一个无限集可以和它的一个真子集对等，这一性质正是无限集的特征，它对有限集来说是不成立的。由此可以看到无限集与有限集之间的深刻差异。

对等关系显然有以下基本性质：

(1) 自反性 $A\sim A$;

(2) 对称性 $A\sim B$ 则$B\sim A$;

(3) 传递性 $A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$ 。

根据以上性质，我们可把彼此对等的集合归做一类。这样任何集合总属于某一类，我们把两个彼此对等的集合称为具有相同的基数（亦称势），用$\overline{\overline{A}}$表示集合A的基数。

基数概念可以看作有限集合中所含元素个数的推广。要对基数下一个精确的定义是一件相当复杂的事情，严格的定义需要很多准备知识。

定义2 设A、B两个集合，如果A不和B对等，但存在B的真子集B^*，有$A\sim B^*$，则称A比B有较小的基数（或B比A有较大的基数）并记为$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$（或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$） 。

任何两个集合A、B，在