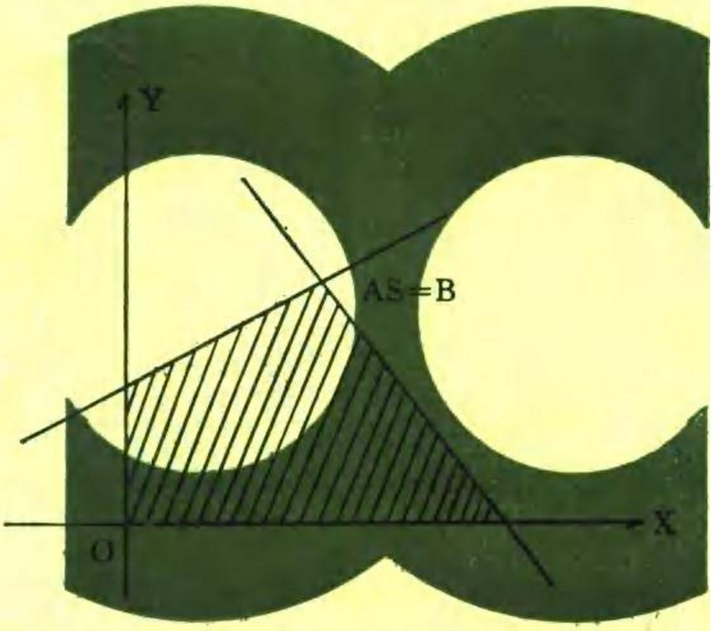
经济应用数学专科统编教材

线性代数与线性规划

（修订本）

魏泽明　主编

XIANXINGDAISHU
YUXIANXINGGUIHUA



东北财经大学出版社

经济应用数学专科统编教材

（辽宁省教育委员会普通高等教育处组编）

线性代数与线性规划

（修订本）

魏泽明　主编

东北财经大学出版社

(辽)新登字10号

线性代数与线性规划

(修订本)

魏森明 主编

东北财经大学出版社出版发行 (大连黑石礁)

喀左县印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:11.75 字数:295 000

1992年7月第1版 1994年7月第2版

1994年8月第2次印刷

责任编辑:谭焕忠 责任校对:忠 明

印数:5 001—12 000

ISBN 7-81005-619-0/O·9 定价:10.00元

第二版出版说明

《经济应用数学》专科统编教材自1991年12月出版以来，已在我省财经类专科院校使用三个教学循环，也受到了自学财经专业课程的读者的欢迎，在一定程度上满足了当时的教学急需。

为了适应我省深化高等专科教育改革的需要，为进一步提高本套教材的质量，满足我省财经类专科教育的教学需要，我处决定以原三册书的主编为主，仍分《微积分》（主编蒋岳铨）、《线性代数与线性规划》（主编魏泽明）和《概率论与数理统计》（主编刘文龙）三册进行修订再版。

这次修订工作得到了东北财经大学、沈阳财经学院、辽宁财政高等专科学校、辽宁税务高等专科学校等兄弟院校和东北财经大学出版社的领导和有关同志的大力协助，对本套教材的修订和出版提供了许多宝贵的意见和方便。在此，一并表示衷心的感谢。

《线性代数与线性规划》的修订工作由魏泽明教授（第一、二、三、四、八章）和殷继润副教授（第五、六、七、九章）完成。本次修订时，对第一版的某些章节的体系进行了调整；对有些较为繁杂的证明或例题作了适当调整或加了※号（非标题前的※号内容到■为止），选用本教材时对※号内容可根据教学需要和学时安排略去不讲；考虑到《经济应用数学教学基本要求》一书已出版及使用上的方便，对各章后的习题仅作了个别改动。

由于我们的经验不足，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

辽宁省教育委员会普通高等教育处

1994年6月

编写说明

参加本书编写的有辽宁税务专科学校史慕萍[①]（第一、五章），辽宁财政专科学校副教授魏泽明[②]（第二、三、四章），沈阳财经学院副教授朱绍范（第六、七、八章）和东北财经大学副教授张培荣（第九章）。辽宁财政专科学校张代军为本书第二、三、四章选编习题并作了答案。全书由魏泽明统稿，最后由辽宁省教育委员会普通高等教育处审定。

考虑到《〈经济应用数学〉教学大纲》的要求，在本书未加进了“经济决策问题”一章。

书中加“*”号的内容，不作统一要求。

编　者

1991年12月

① 史慕萍同志现为辽宁税务高等专科学校副教授。
② 魏泽明同志现为辽宁财政高等专科学校教授。

前　言

为贯彻国家教委 1989 年 12 月在广州召开的高等专科教育会议精神，进一步深化我省高等专科教育改革，针对高等专科学校培养目标，加强高等专科学校教学工作的科学化、规范化管理，全面提高教学质量，按照我省“八五”期间高等学校教材建设规划，我们组织了东北财经大学、沈阳财经学院、辽宁财政专科学校、辽宁税务专科学校和辽宁商业专科学校等五所高校的具有多年教学经验的部分骨干教师，本着“以应用为目的，以够用为尺度”的原则，参照财政部教育司 1991 年 3 月审定的《高等财经专科学校〈经济应用数学〉教学大纲》，吸取了兄弟省市有关教材的长处，结合我省实际情况，编写了《微积分》（主编蒋岳铨）、《线性代数与线性规划》（主编魏泽明）和《概率论与数理统计》（主编刘文龙）三本经济应用数学教材。

这套教材，可供高等财经专科学校各专业、其他专科学校财经类专业以及成人高等教育财经类各专业使用，也可以作为财经工作者自学用书。

在教材编审过程中，我们得到了有关院校和东北财经大学出版社的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢。

由于我们经验不足，书中难免有疏漏和不当之处，敬请广大读者批评指正。

辽宁省教育委员会普通高等教育处

1991 年 12 月

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个重要概念，是研究矩阵性质和讨论线性方程组解法的有用工具，本章在用递归法引入n阶行列式的定义后，主要讲授行列式的性质和计算方法，并介绍了用行列式求解n元线性方程组的克莱姆法则。

§1.1　n阶行列式的概念

一、n阶行列式的定义

我们用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称它为二阶行列式．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中每一个数 a_{ij}（i，j=1，2）称为该行列式的元素．二阶行列式共有 2^2 个元素，把行列式的横排叫作行，坚排叫作列．元素 a_{ij}的下标 i、j 表示该元素所在第 i 行、第 j 列．

二阶行列式的值等于 2（2!）项乘积的代数和，其中每一项 $a_{11}a_{22}$或 $a_{12}a_{21}$都是属于该行列式中不同行不同列的两个元素的乘积。

用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义三阶行列式．

三阶行列式有三行、三列共 3^2 个元素．

三阶行列式可用对角线法则来记忆。如图 1—1 从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元素相乘取负号。

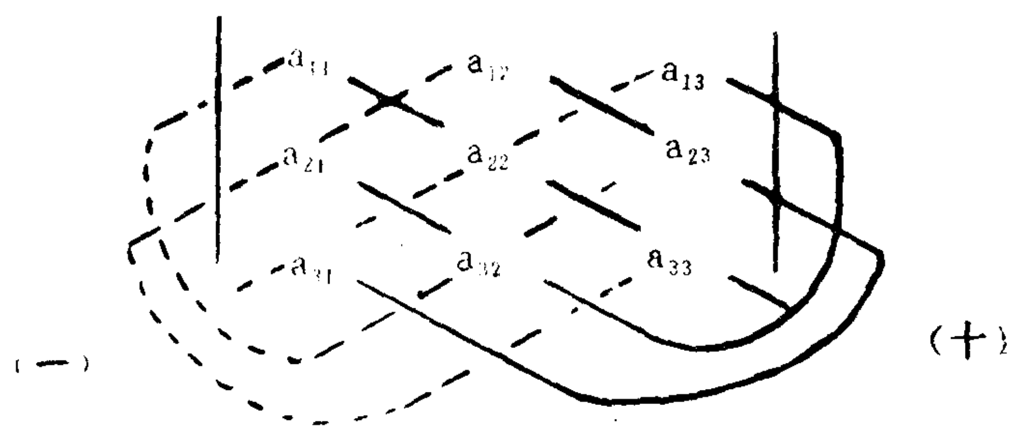


图 1－1

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式的值等于所有取自该行列式中不同行不同列的三个元素的乘积（共 3！=6 项）的代数和.

定义 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\ (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \qquad (1-1)$$

此种 n 阶（n=3，4，…）行列式用 n−1 阶行列式来定义的方法，称为行列式的递归定义法.

n 阶行列式有 n 行、n 列共 n^2 个元素. n 阶行列式是有 n！项的一个代数和，每一项都是 D 中属于不同行不同列的 n 个元素的乘积.

在 n 阶行列式中，a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}称为主对角线上的元素.

例 1　计算二阶行列式

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

例 2　计算三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

例 3　计算四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -39$$

例 4　计算下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

二、几个有关概念

1. 转置行列式

交换行列式D的行与列所得到的行列式，称为D的转置行列式，记为D^T.

设：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1-2)$$

2. 余子式和代数余子式

把n阶行列式中某一元素a_{ij}所在的第i行和第j列的元素划去后，剩下的元素按原来的次序排列所构成的n－1阶行列式，称为该行列式中元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，并把

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

叫做a_{ij}的代数余子式.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素a_{21}及a_{33}的代数余子式分别为：

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

又如，二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\text{中,}$$

元素 -2 的余子式为：$M_{12}=|-3|=-3$　代数余子式为：$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)\times(-3)=3$

利用代数余子式的概念，可以简化 n 阶行列式的定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

即　$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$　　(1—1′)

故 n 阶行列式 D 等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 此式亦称为 n 阶行列式按第一行的展开式.

§1.2　行列式的性质

本节列举的行列式的基本性质，一般均用三阶行列式加以验证或说明，只对部分性质给予了严格证明.

性质 1　行列式转置后，其值不变. 即 $D^T=D$.

用三阶行列式验证. 因为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

而

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}$$
$$+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

所以 $D=D^T$.

性质 1 表明在行列式中，行与列的地位是相同的。因此，以下各性质都只须对行证明即可.

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式的值变号.

例如：交换三阶行列式的二、三两行．性质 2 表明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1　若行列式有一行（列）的元素全为零，则该行列式的值为零.

证：若行列式 D 的第 i 行元素全为零，把第一行与第 i 行交换后，所得到的行列式仅与原行列式反号，而交换后的行列式第一行全为零．由定义计算其值显然为零，故这个行列式的值为零.

推论 2　若行列式有两行（列）的对应元素相同，则该行列式的值为零.

证：显然把该行列式 D 中相同两行交换后行列式不变，即仍是 D．但由性质 2 有 D＝－D，即 2D＝0．于是 D＝0.

性质 3　用数 k 乘行列式任一行（列）的所有元素，等于用数 k 乘该行列式.

这里不作详细证明，只叙述证明思路.

(1) 若用数 k 乘行列式 D 的第一行，则由定义按第一行展开，并提出公因子 k，即得 kD.

(2) 若用数 k 乘行列式 D 的第 i 行，则将所得行列式的第一行与第 i 行交换后，利用 (1) 将公因子提出，然后再交换第一行与第 i 行，即得 kD.

推论 1　若行列式的某一行（列）中各元素有公因数 k，则可以把 k 提到该行列式外面.

推论 2　若行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则该行列式的值为零.

证：由推论 1，把行列式中两行的比例系数提到行列式外面来，则行列式中有两行元素相同，又由性质 2 的推论 2，此行列式等于零.

性质 4　若行列式的某一行（列）的各元素都已表为两数之和，则可将该行列式写成两个行列式之和. 这两个行列式分别以这两个数中之一为对应位置的元素，其余位置元素与原行列式相同.

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 5　将行列式中某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，则该行列式的值不变.

此性质可由性质 4 和性质 3 得到. 现以三阶行列式为例