复变函数学习指导书

钟玉泉

高等教育出版社

复变函数学习指导书

钟玉泉 编

高等教育出版社

（京）112号

图书在版编目（CIP）数据

复变函数学习指导书/钟玉泉编. —北京：高等教育出版社，1995

ISBN 7-04-005485-X

I. 复… II. 钟… III. 复变函数-教学参考资料 IV. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第06905号

高等教育出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

北京华文印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张15 插页1 字数380 000

1996年4月第1版 1996年4月第1次印刷

印数0001— 6100

定价13.50元

序　言

复变函数是高等学校理、工科普遍开设的一门数学基础课．学习这门课程一定要做足够的习题才能真正掌握所学过的知识．然而学生在实际解题中往往感到困难重重，特别对一些内容表现多样或形式迥异的习题，有时不知如何着手．这说明学习复变函数，从理论到方法都要有一个进一步阐发、联系与归纳的过程．

我编写的《复变函数论》(第二版，高等教育出版社 1988 年版)被国内一些综合大学、高师院校、理工院校以及一些函大、职大采用作教材或参考书，另外还有众多自修读者．应广大读者要求，以给学生适当的启发与必要的示范为目标，结合我多年的教学实践经验，编写了这本《复变函数学习指导书》，作为我编《复变函数论》(第二版)的配套教学用书．对我编写的供师专用的《复变函数》(高等教育出版社 1984 年版)教材，本书也有指导学习的意义．

为了方便读者阅读，本书按教材(指我编写的教材《复变函数论》(第二版))各章顺序对应编写，每章都包括以下三部分内容：

I. **重点、要求与例题**．按照教材章节顺序，在概括本章内容重点(包括关联、归纳)与要求的同时全面系统地总结和归纳复变函数问题的基本类型，每种类型的基本方法，每种方法先概括要点，然后选择若干具有典型性、代表性和一定技巧性的例题，逐层剖析，分类讲解．例题按由浅入深的层次编排．解、证都紧扣教材自身的理论和方法．尽可能在解前给出解题思路分析，解后用注的形式向读者指明要注意的事项．

II. **习题解答提示**．教材各章习题除简单、明显的外都分别给出解法或证明提示，包括解题要点，或解题思路分析，或指出解、证时应该利用的主要工具，而把细致的中间过程留给读者自己补充

完成．有的题目还提供多种解法，必要时还对各种解法进行对比分析，以开拓读者思路．

III．**类题或自我检查题**．这部分题目是为读者检查自己掌握复变函数理论和方法的程度编排的．希望读者从学习相关例题或教材的习题解答提示中得到启发，尽可能独立完成它．

读者学习本书后将会懂得，复变函数的理论和方法是解决多种问题的一个强有力的工具，并会收到“开发智力，培养能力”之效．

本书适合高等院校理科学生阅读；对于工科院校、电大、职大有关专业的学生也很有参考意义；对于自修复变函数的读者更是有益．

限于编著者的水平，错误在所难免，恳请读者批评指正．

编著者于四川大学数学系

1993年8月10日

说　　明

1. 为了方便，我们引入以下记号：

“$\forall x$”表示“对每一个 x”；

“$\exists x$”表示“存在 x”；

“$\exists | x$”表示“唯一存在 x”；

“——$\Longrightarrow$——”表示“若——，则——”；

“——$\Longleftrightarrow$——”表示“——当且仅当——”；

“$\Longrightarrow$”表示“必要性”；

“$\Longleftarrow$”表示“充分性”；

“▨”表示一个例题陈述、解答或论证完毕。

2. 为了避免繁琐，我们在引用教材定理、例题、公式、图及习题时，不必在其前冠上教材二字，因为它们与本书的对应编号不同，不致混淆。例如，说到例 2.7 自然指教材例 2.7（第二章第 7 个例题）；说到例 3.1.4 则指本书例 3.1.4（第三章 §1 第 4 个例题）；说到公式(3.2)自然指教材公式(3.2)（因本书无此记法）；说到图 4.2 自然指教材图 4.2；说到图 2.3.2 则指本书图 2.3.2；说到图 1.0.1 则指本书习题解答提示及类题或自我检查题图 1.0.1（第一章图 1.0.1）.

3. 全国自然科学名词审定委员会于 1993 年公布了数学名词．这本指导书使用的数学名词本应以此为准，考虑到指导书是与教材配套的，而教材上的数学名词还是以前的，为了便于读者对照教材阅读，本指导书中的数学名词暂与教材一致．但对凡与公布的名词规范不一致的名词，在指导书中第一次出现时均加脚注说明其规范的名词是什么．至于在本指导书中提到的人名译名，则尽可能按规范译法改过来，不再对照教材上使用的译名加脚注说明．

目　　录

第一章　复数与复变函数

I. 重点、要求与例题

§1. 复数

复变函数(即自变量为复数的函数)这门学科的一切讨论都是在复数范围内进行的。本节内容是中学复数知识的复习和补充，读者切勿忽视。

1. 虚单位 $i=\sqrt{-1}$ 合于 $i^2=-1$; 电工学里是例外，在那里用 j 表示，而不是用 i。

2. $z_1=z_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2,\ \mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$。

$z=0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}z=0,\ \mathrm{Im}z=0$。

有许多问题运用两复数相等的定义，就可很好地得到解决。

3. 熟练掌握复数运算，并能灵活运用。

1) 对于 $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2,\ \bar{z}_2=x_2-iy_2$,

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$;

$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=\cdots$ (按多项式乘法展开，i^2 换为 -1);

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}\ (z_2\neq 0).$$

2) 全体复数并引进上述运算后就称为复数域，常用 C 表示。C 也表示复平面。

3) 在 C 内，$z_1z_2=0 \Rightarrow z_1, z_2$ 至少有一为零(例 1.6)。

例 1.1.1　试确定等式 $(3+6i)x+(5-9i)y=6-7i$ 中的实数 x, y。

分析 等式左端是含有未知数 x,y 的复数，但未化简，而右端是已知复数．为此，化简左端，比较两端实、虚部就将已给复数等式转化为二元实方程组．

解 原式化简为 $(3x+5y)+i(6x-9y)=6-7i$，由复数相等的定义知 $3x+5y=6$，$6x-9y=-7$，解此二元实方程组得 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=1$． ▨

4. 对于 $z=x+iy$，称 $\bar{z}=x-iy$ 为 z 的**共轭复数**（物理学中常用记号 z^* 代替 $\bar{z}$）．$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}\geqslant 0$ 称为 z 的**模**或**绝对值**．与共轭复数有关的等式有：

$\overline{(\bar{z})}=z$，$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，

$\overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2$ $(z_2\neq 0)$，$|z|^2=z\bar{z}$，$|\bar{z}|=|z|$，

$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}z$．

切实掌握、灵活运用这些简单公式，对化简计算，解答问题都会带来方便．

例 1.1.2 设 $\dfrac{\bar{z}}{z}=a+bi(z=x+iy\neq 0)$，试证

$$a^2+b^2=1.$$

分析 如上题，可先得到关于 x,y 的二元实方程组，然后从中消去 x,y．

证一 由原式去分母得

$$x-iy=ax-by+i(ay+bx)$$

$$\Leftrightarrow x=ax-by,\ y=-(ay+bx)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x=by,\ (a+1)y=-bx$$

（x,y 不全为零，不妨设 $x\neq 0$．）

$\therefore\quad \dfrac{a-1}{b}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-b}{a+1}$ （这时 $b\neq 0$，$a\neq -1$．）．

$\therefore\quad a^2-1=-b^2$，即 $a^2+b^2=1$．

当 $b=0$，$a=-1$ 时，$a^2+b^2=1$ 仍成立．

证二 由 $a+bi=\dfrac{\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\dfrac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2-y^2-2ixy}{x^2+y^2}$

$(x,y$ 不全为零)

得

$$a=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ b=\frac{-2xy}{x^2+y^2}.$$

$\therefore$ $$a^2+b^2=1.$$

证三 由本段可知 $a^2+b^2=|a+bi|^2$，

再由题设，只须证 $\left|\dfrac{\bar{z}}{z}\right|=1\ (z\neq 0)$，这是显然的。 ▨

注 1）证一及证二合乎证前分析，方法有代表性；证三是根据题设条件，再应用本段写出的公式，证法简洁。

2）在解题过程中，题目的条件是必须用到的。有时还要将条件作种种等价变形，然后使用其中合适的一个。比如，在本例题中：

$z=x+iy\neq 0 \Longleftrightarrow x,y$ 不全为零 $\Longleftrightarrow x,y$ 至少有一不等于零。

5. 掌握与模有关的等式与不等式。还要特别注意，复数域不是有序域，不能像实数那样比较大小。但复数 z 的实、虚部与模都是实数，所以能比较大小。

对任意复数 z，有

$$-|z|\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant |z|,\ -|z|\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant |z|.$$

又 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ |z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|\ (z_2\neq 0),$

$||z_1|-|z_2||\leqslant |z_1\pm z_2|\leqslant |z_1|+|z_2|$ （三角不等式）。

用数学归纳法可得不等式

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|. \quad (*)$$

另外，$z=0\Longleftrightarrow |z|=0,\ |z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$。

注 （*）式取等号的情形，参看例 1.1.7.

例 1.1.3 试证 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数的充要条件为 $|z|=1(z\neq\pm i)$ 或 $\operatorname{Im} z=0$。

分析 一个复数是实数，也就是这个复数的虚部为零。由公式 $z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}\,z$，可见 z 是实数 $\Longleftrightarrow z=\bar{z}$。

证 $\dfrac{z}{1+z^2}=$ 实数 $\Longleftrightarrow \dfrac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$

$$\Longleftrightarrow (z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0.$$

$\Longleftrightarrow$ $z=\bar{z}$，即 $\mathrm{Im}z=0$，或

$z\bar{z}=1$，即 $|z|=1$（但 $z\neq\pm i$）。 ▨

例 1.1.4 设复数 $a+bi$ 的模为 1，$b\neq 0$，则它可表为

$$a+bi=\frac{c+i}{c-i},\ c \text{ 为实数}.$$

分析 在证题难于着手时，"逆推"常是一种探索证法的有效方法。对于本题，若存在实数 c，使

$$a+bi=\frac{c+i}{c-i}\ (\text{因 } c \text{ 为实数，所以 } c\neq i)$$

$$\Longleftrightarrow c+i=(a+bi)(c-i)=(ac+b)-(a-bc)i$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c=ac+b, & (1)\\ bc-a=1. & (2)\end{cases}$$

即若存在 c，使(1)、(2)成立，则 $a+bi=\dfrac{c+i}{c-i}$。

证 由(2)，当 $c=\dfrac{1+a}{b}$ $(b\neq 0,\ c$ 为实数$)$时确有

$$ac+b=a\frac{1+a}{b}+b=\frac{a+a^2+b^2}{b}=\frac{a+1}{b}=c$$

及 $bc-a=1$（因题设 $a^2+b^2=1$）。即当 $c=\dfrac{1+a}{b}$ 时，

$$a+bi=\frac{c+i}{c-i}.$$ ▨

例 1.1.5 试证 $|1-\bar{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$。

分析 左端较右端繁，故从左证向右且应用公式 $|z|^2=z\bar{z}$。

证　左端 $= (1-\bar{z}_1 z_2)\overline{(1-\bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$

$$= (1-\bar{z}_1 z_2)(1 - z_1\bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 = \text{右端}.$$

注　初学者常把复数 z 先写成 $x+iy$ 后再化简，其实这种做法一般并不简捷。

例 1.1.6　若 $|z| < \frac{1}{2}$，试证 $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$。

分析　已知 $|z| < \frac{1}{2}$，故只须将要证不等式左端用 $|z|$ 表示，为此可考虑应用三角不等式。

证　$|(1+i)z^3 + iz| = |z||(1+i)z^2 + i|$

$$\leqslant |z|(|1+i||z|^2 + |i|)$$

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + 1\right) < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

例 1.1.7　试证 (1) $\frac{z_1}{z_2} \geqslant 0\ (z_2 \neq 0) \Longleftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$；

(2) $\frac{z_k}{z_j} \geqslant 0\ (z_j \neq 0;\ k \neq j,\ k, j = 1, 2, \cdots, n)$

$$\Longleftrightarrow |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

分析　1) 先看题设条件 $\frac{z_k}{z_j} \geqslant 0 \Longleftrightarrow z_j \neq 0,\ z_k = tz_j\ (t \geqslant 0) \Longleftrightarrow z_k,\ z_j$ 有相同的辐角 $\Longleftrightarrow z_j \neq 0,\ z_k\bar{z}_j/|z_j|^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(z_k\bar{z}_j) = 0$ 且 $\operatorname{Re}(z_k\bar{z}_j) \geqslant 0$（即 $z_k\bar{z}_j \geqslant 0$）。

2) 先证简单情形(1)；次证(2)的“$\Longrightarrow$”；应用(1)证明(2)的“$\Longleftarrow$”，其间巧妙地应用了三角不等式，使之得到(1)的右端，从而可以应用(1)推出(2)的左端。

证　(1)“$\Longrightarrow$”　若 $z_1/z_2 \geqslant 0\ (z_2 \neq 0)$，则

$$\left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|=\frac{z_1}{z_2}+1=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+1.$$

两端同乘以 $|z_2|$，得

$$左端=\left|z_2\left(\frac{z_1}{z_2}+1\right)\right|=|z_1+z_2|,$$

$$右端=|z_2|\left(\frac{|z_1|}{|z_2|}+1\right)=|z_1|+|z_2|.$$

"$\Longleftarrow$" 若 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$，两端同除以 $|z_2|$，得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+1,\ 即\ \left|\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+1\right|=\left|\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}\right|+1,$$

即 $$|z_1\bar{z}_2+|z_2|^2|=|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2.$$

上式表明：和的模等于模的和，即两数在由原点出发的同一射线上，所以可由 $|z_2|^2>0$ 断定另一数 $z_1\bar{z}_2\geqslant 0$（z_1 可以为零），从而断定 $\frac{z_1}{z_2}\geqslant 0$（$z_2\neq 0$）。

(2) "$\Longrightarrow$" 不失一般性，假设 $z_1\neq 0$，则

$$|z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n|=|z_1|\left|1+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_1}+\cdots+\frac{z_n}{z_1}\right|.$$

但由 $\frac{z_k}{z_j}\geqslant 0$（$k,j=1,2,\cdots,n,k\neq j$），故

$$|z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n|=|z_1|\left(1+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|+\left|\frac{z_3}{z_1}\right|\right.$$
$$\left.+\cdots+\left|\frac{z_n}{z_1}\right|\right)=|z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|.$$

"$\Longleftarrow$" 对任意下标 k,j 证明 $\frac{z_k}{z_j}\geqslant 0$，不妨设 k,j 为 1，2（便于应用(1)的结果）。若今设(2)的右端等式成立，即

$$|z_1|+|z_2|+\underline{|z_3|+\cdots+|z_n|}$$
$$=|z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n|$$
$$=|(z_1+z_2)+z_3+\cdots+z_n|$$

$$\leqslant |z_1+z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n| \text{（由三角不等式）}$$

$$\leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n| \text{（由三角不等式）.}$$

由上式可知　　$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$。

若 $z_2 \neq 0$，由(1)可知 $\dfrac{z_1}{z_2} \geqslant 0$。

但由下标的任意性，得 $\dfrac{z_k}{z_j} \geqslant 0$ $(z_j \neq 0,\ k \neq j,\ k,j=1,2,\cdots,n)$。

6. 充分掌握非零复数的三种表示及其互相转换。要善于根据不同问题选用适当的表示以简化计算。

1）一般值 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$，其中 $\arg z$ 是 z 的幅角的一个特定值，可以是主值。

2）同一 $z(x,y) \neq 0$，其辐角的两种主值

$$-\pi<\arg z \leqslant \pi \text{ 及 } -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

的关系可见教材第 8 页。

3）$z=x+iy$　　　　代数形式

当 $z \neq 0$ 时，

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　　　　三角形式

$=re^{i\theta}$　　　　指数形式

也就是说，任一非零复数 z 总可表成 $z=|z|e^{i\arg z}$，这里的 $\arg z$ 不必取主值。

4）$z=x+iy \neq 0$，记 $\arg z=\theta$（主值），则

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{r\sin\theta}{r+r\cos\theta}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\therefore\quad \arg z=\theta\ \text{（主值）}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

5）对于 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，

$z_1=z_2 \Longleftrightarrow r_1=r_2$，$\theta_1=\theta_2$（或 $\theta_1=\theta_2+2k\pi$，k 为整数）。

6) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i,\ e^{i\pi}=-1,\ e^{2k\pi i}=1$ (k 为整数)。

例 1.1.8 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，试求复数

$$z=\frac{1-i\operatorname{tg}x}{1+i\operatorname{tg}x}$$

的三角形式.

分析 一般情形是改写成代数形式后求出 $|z|$ 和 $\arg z$。

解 首先写出 z 的代数形式，

$$\begin{aligned}z&=\frac{1-i\operatorname{tg}x}{1+i\operatorname{tg}x}=\frac{(1-i\operatorname{tg}x)^2}{(1+i\operatorname{tg}x)(1-i\operatorname{tg}x)}\\&=\frac{1-\operatorname{tg}^2x-2i\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\\&=\frac{\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}-\dfrac{2i\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2x}}\\&=\cos 2x-i\sin 2x。\qquad (*)\end{aligned}$$

由于此代数形式的特殊性，自然无须由此再去计算 z 的模与辐角，而只要将其变形即可得到所求的三角形式为

$$z=\cos(-2x)+i\sin(-2x)。$$ ▨

注 (*)式的最后形式不是三角形式.

例 1.1.9 将复数 $z=1+\sin 1+i\cos 1$ 化为三角形式和指数形式.

分析 显然 $z\neq 0$，需分别求出 $|z|$ 和 $\arg z$。

解 因 $|z|^2=(1+\sin 1)^2+\cos^2 1=2(1+\sin 1)$

$$=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)。$$

所以