微积分教学研究

李 欧　　承毓涵

清华大学应用数学系

出版说明

著名教育家李欧教授将毕生心血倾注于微积分的教学及教材教法的研究之中，在他近 50 年的教学生涯中，不仅为培养造就大批科技人才做出了重要的贡献，而且也带出一批热爱教学及教学研究的中青年骨干教师。

李欧教授对教学工作的精益求精堪称为每一位教育工作者的楷模，为此特将李欧教授与承毓涵副教授合写的部份遗著出版。

此书出版得到清华大学党委统战部，清华大学应用数学系，中国民主同盟清华大学委员会的大力支持。原稿的审阅与校对得到栾汝书教授、胡露犀教授、瞿崇凯教授的大力帮助。

序

现代教育家认为教师的任务不仅是传授知识，更重要的任务是培养学生自己获得新知识的能力，也就是学生自己提出问题自己分析问题自己解决问题的能力。作为一位现代教育家李欧教授从事于微积分的教学已有四十多年。他的教学效果一向优异。在本教学参考书内他总结了他的丰富的教学经验并收集了不少有趣的例题。因此，这部参考书对青年微积分教师是有参考价值的。

赵访熊

1994 年 3 月 11 日

目 录

前　　言

"微积分教学参考书"着重为讲课方面作参考，因为微积分的辅导课参考书或微积分习题分析方面的书已有多种，而讲课又是课堂教学的主要环节。如何能讲授内容的精华、启发学生的独立思考、充分发挥教师的主导作用，是提高教学质量、培养学生能力的重要问题。本书将提供这方面的材料。

在讲授微积分这一门课程之前，首先要明确的就是要求学生掌握微积分的基本功。微积分既是一门理论学科，又是一门应用学科，掌握它的基本功，具体地讲就是：要求学生学会概括、抽象的思维方法，深入掌握基本概念；学会分析、综合的推理能力，正确运用基本方法；具有计算、应用的熟练功夫能具体地分析和解决问题，也就是说要"大处着眼"掌握微积分的基本概念和基本方法，同时又要"小处着手"正确无误地计算和灵活地运用概念和方法分析解决问题。

首先要重视的是微积分的基本概念，数学是一门具有概括性的学科，抽象是它的特色，微积分中的函数、极限、导数、微分、积分、无穷级数等都是非常重要的基本概念，尽管它们都是抽象的概念，但它们无不是从大量实际问题中得来，有着极为丰富的具体背景，学生学习这些重要的概念时，不必为它的抽象性而害怕，相反地要求他们主动地去学习。从实际问题中概括抽象出概念的思维方法，如从变量间各种依从关系抽象出函数概念；从变量的各种趋向抽象出极限概念；从运动中的瞬时速度，曲线上一点处切线斜率等抽象出导数概念；从变力作功、曲边梯形面积抽象出定积分概念，以及从函数的多项式逼近抽象出无穷级数概念等等。一般讲，一个概念不是一下子就能理解掌握，要求学生反复思考运用，可以从各个侧面来认识它，可以由实际问题来验证它，也可以从反面来理解它，更重要的是有意识地运用它来做习题，从解题中深入掌握它。总之，对基本概念要给予足够的重视。

其次，要注意掌握微积分的基本方法，数学的严密性在于细致的分析和严谨的推导。学会基本方法的要领在于搞清分析的方向和推导的目的。学生常常是听懂了方法本身，但遇到具体问题不会使用它，原因是不知道根据哪些条件去分析，朝着什么方向去推导，因而要求学生在听课中要特别注意教师运用基本方法解决问题的思路，即如何在已知条件和论证结果中区别与问题有关的因素和无关的因素，主要的因素与次要的因素及如何找出这些因素间的关系。利用已知条件解决要论证的问题，如证明微分中值定理、积分中值定理、台劳公式等必须注意它所必备的条件和如何利用这些条件得到需要的结果，欠缺某些条件，结论可能不成立。又如证线积分、面积分与重积分相互关系时，要从三种积分定义出发，建立概念间的联系。再如，在定积分应用和建立微分方程过程中，通过微量分析找出其主要因素，在小范围内用"均匀变化"代替"非均匀变化"，由近似到精确利用极限方法解决问题。掌握基本方法另一有效途径就是利用多种方法解题、比较方法的优劣，培养从解题中使方法得到训练的习惯。

第三，要能正确计算和灵活应用微积分中提出的一些问题，数学除了具有高度抽象性和严谨性的特点以外，还具有另一特点就是广泛的应用，多用且用的灵活，就能进一步巩固概念、熟练方法。微积分中应用题常常有下面两种类型：一种是专为搞清概念的应用题，另一种是实际问题。对后一种当然要求能用数学方法解决问题，对前一种也要充分重视。因为数学不象物理、化学那样可以通过实验来验证理论，数学的"实验"就是通过做一些运用概念或法则来解决问题的习题达到验证理论的目的。如"导数"，"积分"有搞清这些概念的习题，也有利用导数和积分研究解决运动方程的速度和路程、曲线作图和求一些几何图形的面积、体积等应用问题。这两类题目的计算和应用都应重视不能偏废，要求学生手下要有计算正确无误，作图整洁规矩的过硬工夫，反对那种"一听就懂、一看就会、一做就错"的一知半解、疏忽大意的作风，还要培养验证验算能力，如代入验算、正反运算、互相验算、对结果的合理性加以验证等。

概念、方法、计算、应用这四方面的基本功在学习微积分中起着重要的作用。练好基本功是深刻理解概念、熟练运用方法，从而掌握微积分这一数学工具的必由之路，除此没有其他捷径。

明确微积分的基本要求以后，如何讲授这些内容是个关键问题，课堂讲授主要是要讲重点问题，不要完全讲书本；因为教材学生自己会看，问题是教师如何指导。在讲授的短暂时间内，教师只能讲一两个主要问题，其余留给学生课外自己看书，所以讲授可以按照讲义的顺序但又要脱离讲义，归纳为几个问题向学生讲清。备课时最好将讲授内容分为三档：第一档是基本的关键性问题，需要在课堂上仔细分析，精心讲授；第二档是技节性或派生的内容，在课堂上一带而过，让学生课后自己看书；第三档是延伸性或推广性的内容，在课堂上指出思路，让学生课后去思考。第一档要讲细，其余二档讲粗。第一档要让学生"吃饱"，其余二档要让学生"吃不饱"。在讲授中，要想引起学生的兴趣，只能从教学内容的内在联系，方法的运用，新旧知识的交替等方面下功夫，使讲课精炼而不枯燥，灵活而不失严谨，生动而又不肤浅。既要做到学生非集中精力听课不可，又要听完课非自学不可。在讲课过程中，还要注意学生如何更好地接受新知识、如何思考、如何概括和归纳、学生接受的新知识和已有的旧知识是互相促进，还是彼此干扰，基本知识如何迁移等等。我们反对注入式的讲课，但同时也反对对学生放任自流，教师对学生，特别是低年级学生，要像教小孩子走步那样，要放开让他独立迈步，又要防止他摔伤，还要告诉他走步的一些要领，这样既教会了一些基本功，又培养了独立思考、独立工作的能力，真正达到了讲课的效果。

本书是根据著者在多年的"高等数学"课程的讲授中总结写成的，不当之处请指正。

李欧　　承毓涵

1989 年 9 月

预 备 知 识

1. <u>量和数</u>　量有具体内容，如：

时间 $t=1$ 小时，长度 $L=\frac{3}{7}$ 公里，速度 $v=4.56$ 米/分。加速度 $a=0$ 厘米/秒^2，温度 $T=-\frac{9}{8}$℃，重量 $w=\sqrt{2}$ 公斤，角度 $\alpha=-\pi$ 弧度等。

这些是物理量和几何量。量的特性在于它可以被度量，取一个合适的定量做为度量单位去度量与之同类的量就得到数，因而数是抽象的。上面举出的这些量若以小时、公里、米/分、厘米/秒^2、℃、公斤、弧度分别做为度量单位得到的数是：

$$1、\frac{3}{7}、4.56、0、-\frac{9}{8}、\sqrt{2}、-\pi$$

前五个是有理数，后两个是无理数，它们统称为实数。当然以秒、米、厘米/秒、米/小时^2、℉、克、度做为度量单位便会得出

$$3600、428\frac{4}{7}、7.6、0、29\frac{39}{40}、1000\sqrt{2}、-180$$

有理数能表成既约分数$\frac{p}{q}$（p、q 为整数，$q\neq0$，p、q 没有大于 1 的公因子），也可以表为一个整数与一个无穷循环小数之和，如：

$$1=\frac{1}{1}=1+0.\dot{0}=0+0.\dot{9}$$

$$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}=0+0.\dot{4}2857\dot{1}$$

$$4.56=\frac{456}{100}=\frac{114}{25}=4+0.56\dot{0}$$

$$0=\frac{0}{1}=0+0.\dot{0}=-1+0.\dot{9}$$

$$-\frac{9}{8}=\frac{-9}{8}=\frac{9}{-8}=-1.125\dot{0}=-2+0.875\dot{0}$$

无理数不能表成既约分数$\frac{p}{q}$，但可以表为一个整数与一个无穷不循环小数之和，如：

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots=1+0.41421356\cdots$$

$$-\pi=-3.14159265\cdots=-4+0.85840734\cdots$$

我们可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，用反证法假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，设 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（整数 p、q 没有大于 1 的因子）由于 $2=\frac{p^2}{q^2}$ 即 $p^2=2q^2$，等式右边能被 2 整除，只有 p 是偶数才有可能。设 $p=2r$（r 是整数），于是有 $(2r)^2=2q^2$，即 $2r^2=q^2$，从这个式子又可推得 q 也是偶数。这样，p 与 q 就有公因子 2，这与 P 与 q 没有大于 1 的公因子的假定矛盾，因此证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

因此，实数总可以表为一个整数与一个无穷小数（可以循环也可以不循环）之和，记为

$$实数\ r=c_0+0.C_1c_2c_3\cdots$$

其中 c_0 为整数，$c_1,c_2,c_3\cdots$ 取整数 0，1，2，…9 中的一个数。

实数集合记为 R，每一个实数 $r\in R$，其中符号"$\in$"是"属于"的意思。实数集合也可以记为 $\{r\}$。

实数集合有三个重要性质：

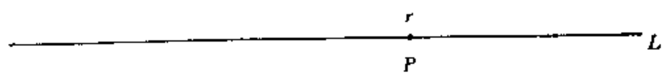
(1)封闭性　即 $a\in R,b\in R$ 时，则 $a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}(b\neq0)$ 皆属于 R。

(2)有序性　实数可以按大小顺序排列，如 $a_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$ 则 $a_i(i=1,2,\cdots n)$ 可以按大小顺序排列。前面举过的那些数可排成

$$-\pi<-\frac{9}{8}<0<\frac{3}{7}<1<\sqrt{2}<4.56$$

(3)连续性(或完备性)　实数全体组成的集合是一切连续地变化着的量所能取到的数的总体，中间没有空隙，或者说两实数之间的所有数都是实数。

2. 数直线和数轴　将一条无穷长的直线 L 放在水平位置：



(图 0.1)

由于直线 L 上的点是依次连续变化着的，又因实数集合{r}也有有序性和连续性，所以直线上的点集{P}与实数集合{r}之间存在着"一一对应"的关系，所谓"一一对应"的关系是指：

直线 L 上的每一点 $P\in L$ 必有唯一确定的实数 $r\in R$ 与之对应；

实数 R 中的每一实数 $r\in R$ 必有唯一确定的点 $P\in L$ 与之对应。

"一一对应"关系可用记号"↔"表示，即

$$\{P\}\leftrightarrow\{r\}$$

或简写为　$\forall P\in L\to\exists r\in R$

$\forall r\in R\to\exists P\in L$

记号"∀"表示"任意一个"或"每一个"，它是英文"任意"(Any)字头 A 的倒写；记号"∃"表示"存在一个"或"总有一个"，它是英文."存在"(Exist)字头 E 的反写；"→"表示"必有"。

我们称 L 为数直线，数直线上的点与实数之间建立了一一对应的概念。

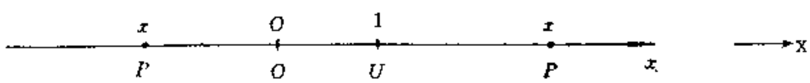
但是已知数直线上一个点对应实数集合哪一个数或已知一个实数对应数直线上的哪一个点呢？这还要引进数轴的概念。

在数直线上

(1)任取一点 O 作为原点。

(2)取另一点 U 作为单位点，即 $|OU|=1$。

(3)取从 O 到 U 的方向作为正方向。



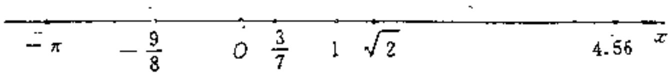
(图0.2)

具有这三个条件的数直线称为数轴。数直线上有无穷多个数轴。如何取数轴要根据所给实际问题的要求而定。数轴上任意一点 P 所对应的实数 X 称为 P 点的坐标，具体规定是：

$$X=\begin{cases}|OP|, & P,U\text{ 在 O 的同侧}\\ O & P\text{ 与 O 重合}\\ -|OP|, & P,U\text{ 在 O 的异侧}\end{cases}$$

原点的坐标是0，单位点的坐标是1

前面举过的那些数所对应数轴上的点描在下面：



（图0.3）

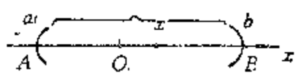
以后“点”和“数”可以看成是一致的，数可以代表点，点也可以代表数。

3. 区间　区间是指介于两个点A、B之间的全体点的集合，也是指介于两个实数a、b之间的全体实数的集合。A、B或a、b称为区间的端点。

表示区间的记号及其在数轴上的图示为：

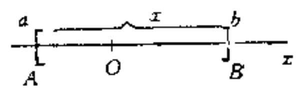
开区间

$x\in(a,b)$ 或 $a<x<b$



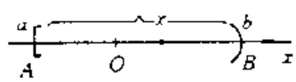
闭区间

$x\in[a,b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$

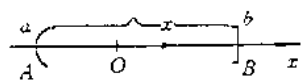


半开半闭区间

$x\in[a,b)$ 或 $a\leqslant x<b$

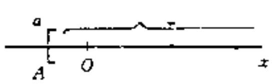


$x\in(a,b]$ 或 $a<x\leqslant b$

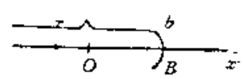


无穷区间

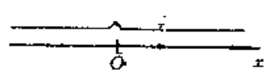
$x\in[a+\infty)$ 或 $a\leqslant x<+\infty$.



$x\in(-\infty,b)$ 或 $-\infty<x<b$



$x\in(-\infty+\infty)$ 或 $-\infty<x<+\infty$



（图0.4）

4. 绝对值　实数x的绝对值记做$|x|$

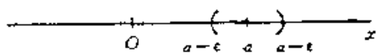
$$|x|=\begin{cases}x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -x, & x<0\end{cases}$$

绝对值有如下性质：

$$|x|\geqslant 0,\ |-x|=|x|,\ x=\begin{cases}|x|, & 当\ x\geqslant 0\\ -|x|, & 当\ x<0\end{cases},\ |x+y|\leqslant|x|+|y|,$$

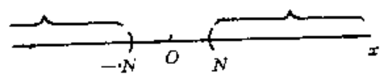
$$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|,\ |xy|=|x||y|,\ \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$$

若 $|x|<\varepsilon$ 则 $-\varepsilon<x<\varepsilon$；若 $|x-a|<\varepsilon$ 则 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$；这个开区间叫做 a 的 ε—邻域，记做 $U_\varepsilon(a)$



（图0.5）

若 $|x|>N$ 则 $x>N$ 或 $x<-N(N>0)$



（图0.6）

第一章　函　数

函数是数学中最重要的概念，这是因为：

第一，函数概念直接和具体地反映现实世界中的一些有数量连系的现象，有数量连系的客观事物的出现，大体有两类现象：必然现象和大数现象，必然现象反映因果律，大数现象反映机遇律，这些动态的表象都要用函数概念加以刻画和研究。

第二，函数概念体现出合乎形式逻辑和辨证逻辑的数学思维。由于函数概念是从大量实际问题中抽象出来的，它使我们考虑到量的生动的变化而不是人为的那样死板，考虑到量与量之间的制约关系，而不是将它们孤立起来。

第三，函数概念多方面促使数学向前发展，它几乎是现代数学每一分支的主要研究对象。又由于函数概念的内涵逐步扩充，使得数学新的分支也不断地涌现。

因此函数概念及对函数的研究是数学重要的基础，又是微积分学的第一章，要求学生正确地掌握。

1. 函数的概念　函数这样一个重要概念的形成和发展是经历了漫长岁月的，在不同阶段，从观点上和表示方法上对函数有着不同的认识。

早在十七世纪中叶，笛卡儿(Descartes)提出变量的概念，打破了局限于方程的未知数的理解以后，函数概念即初步形成，莱布尼兹(Leibniz)在1673年首先提出"函数"这一名词。他用函数表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量。牛顿(Newton)几乎同时用另一名词"流数"来表示变量间关系，贝努里(J·Bernoulli)在1718年给出函数记号 Φx，到了1734年时欧拉(Euler)才用现在通用的记号 f(x)。

函数是从研究物体运动引出的一个概念。因此，对函数概念最初的认识是变量"变化"的关系，即一个变量变，另一个变量随着变，后一个变量就是前一个变量的函数，如自由落体运动下降的路程，单摆运动的幅角，抛射运动物体的高度都可以看成是时间的函数。很明显，只从运动中变量"变化"观点来理解函数对函数概念了解有一定的局限性，如对常值函数，不好解释。

开始对函数的表示方法也公式化了，拉格朗日(Lagrange)把函数定义为对自变量计算的结果，或者说函数是自变量运算的一个组合。欧拉更明确把函数定义为一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析表示式，所谓任何方式是指包含四则运算、极限运算和无穷级数运算等，他具体地定义了指数函数和对数函数为：

$$e^x=\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\qquad \mathrm{Ln}x=\mathrm{Lim}_{n\to\infty}n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

同时也引出对数函数的无穷级数表示式：

$$\mathrm{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots x\in(-1,1]$$

无论是那一种运算，当时都认为函数只能用一个解析式子来表达，这是初始阶段对函数表示式的一种限制，这种限制延续了近一个世纪。

十九世纪初，拉克若斯(Lacroix)正式提出不管有没有运算公式或者能不能计算，只要一个变量依赖另一个变量，前者就是后者的函数。譬如代数中的五次方程的根必是方程系数的函数，尽管我们不能用计算式子将它表达出来，柯西(Cauchy)更明确地指出：给定了一个变量中的一个值，就可以决定另一个变量的值时，后一个变量就是前一个变量的函数，这样逐步将函数概念从"变量变化"和"变量计算"中解放出来。对函数概念新的理解是：函数是一个规则，对

于一定范围内的每一个实数，按照这个规则确定了(或对应着)另一个实数。按现在通用的函数定义：若对于数集中每一个 x，有且仅有一个 y 值与之对应(或被确定)，则 y 是 x 的函数。这样，函数概念从狭义的“变化”观点转化到较广泛意义的“对应”观点。

函数既然是一个规则，在十八世纪占统治地位的函数只能由一个解析式子来表达的想法被打破了，拉格朗日、欧拉都提出允许函数在不同区域上具有不同的表示式。付立叶(Fourier)更提出在任何一个有限区间可以有具有有限个间断点的函数，当时出现了下列函数：

$y=|x|$，

$y=[x]=n$，其中 $x=n+r$ $(0\leqslant r<1$，n 为整数)，$[x]$代表 x 所含的最大整数，如 $[2.3]=2$。

狄利赫莱(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数，}\\ 0, & x\text{ 为无理数。}\end{cases}$$

克朗涅克 (Kronecker) 函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0。\end{cases}$$

这些函数都能表达一种规则，它们在研究函数中起着一定的作用。在微积分中所讨论的函数概念就是指数量上的对应规则。

以后逐渐将函数概念抽象化，对于函数 $y=f(x)$，$x\in X$，$y\in Y$ 其中 X，Y 都是实数集合，函数 f 包含着两个内容：

第一　通过 f 把 X 变到 Y 里面去，即

$f: X\rightarrow Y$

第二　每一个 $x\in X$ 在 f 的作用下对应着 $f(x)$，即

$f: x\mapsto f(x)$

这个 f 可以是数量间的运算关系，可以是极限运算关系，无穷级数运算关系或者是其它运算关系，也可以是数学上的某种约定。

由于集合论的发展，函数概念中还可以打破实数集合的限制，将 X、Y 从实数集合改变为抽象集合，用“映射”观点建立函数概念。

若 X、Y 是两个抽象集合，对于 $y=f(x)$，$x\in X$、$y\in Y$ 中的函数 f 也包含着两个内容：

第一　通过 f 把 X 映射到 Y 里面去，即

$f: X\rightarrow Y$

第二　每一个 $x\in X$ 在 f 的作用下对应着 $f(x)$，即

$f: x\mapsto f(x)$

$f(x)$ 是在映射 f 的作用下 x 的象，而 x 是 $f(x)$ 的一个原象。

例如，X 是所有三角形的集合，Y 是所有圆的集合，则 f 可以是把每一个三角形映射成它的外接圆的映射；也可以是把每一个三角形映射成它的内切圆的映射。又如 X 是一个班的全体学生构成的集合，Y 是四种学习成绩：优、良、中、差的集合。则 f 可以是对每一个学生有且仅有一个学习成绩的映射等。

选择不同的 X、Y 集合，就能得到各类函数如多元函数、复变函数等等。

2. 函数的建立

自然科学和工程技术中由多次试验总结出的规律、公式往往是函数关系的一个重要来源。此外，还可以直接用实验记录列成表格或用仪器绘成图象表出函数关系。一般说，用解析式子

表示函数关系研究起来比较方便，如何从实验数据去得到近似的解析表达式呢？通常用最小二乘法或插值公式即可求得。最简单的例子是：当 x=1、2、3时，y=2，4，3。求其近似的解析表达式。利用最小二乘法，可得它的近似一次表示式是 $y=\frac{1}{2}x+2$。利用拉格朗日插值公式可得它的近似二次表示式是：

$y=-\frac{1}{2}(3x^2-13x+6)$。从实验数据得出近似解析表示式或称经验公式在工程技术中特别重要。

利用函数性质也可以建立函数关系，如：

（1）满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的连续函数只有线性函数 $f(x)=cx$；

（2）满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 的非零连续函数只有指数函数 $f(x)=a^x$ $(a>0)$；

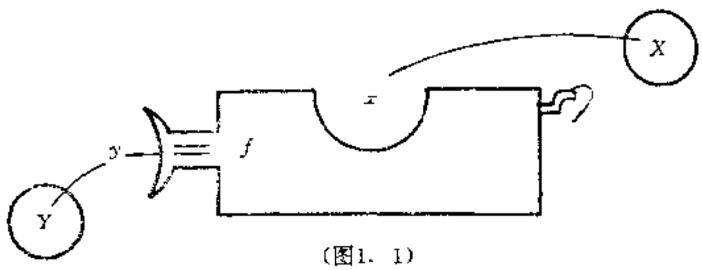
（3）满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的非零连续函数只有对数函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0)$ 其中 $x>0$，$y>0$；

（4）满足 $f(xy)=f(x)f(y)$ 的非零连续函数只有幂函数 $f(x)=x^\alpha$（α 实数、$x>0$）。

3. 函数的教学

在函数的教学过程中，学生很容易学会，但也容易学不深入．如何在中学学习函数的基础上，逐步加深理解是值得注意的问题。

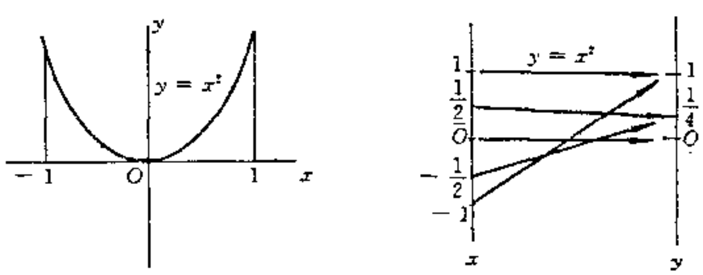
（1）有关函数的记号 f　$f(x)$ 是函数在 x 点处的取值，所以 $f(x)$ 是函数值，和 $f(a)$，a 是定值没有本质上的差别，而函数 f 是表示一种关系或一个约定．它只能用 f 来表示。形象地讲，如果用机器表示函数关系 $y=f(x)$，那末，f 就表示机器的性能。



（图1．1）

如从 X 集合中取出 x 投入机器中，通过 f 的性能即产生 Y 集合中的 y，即 $y=f(x)$，$x\in X$。我们还要注意到用什么名称来称呼函数的变量是无关紧要的。如 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 和 $s=f(t)$ $(t\in X)$ 是表示同一函数 f

（2）有关函数的图形　作函数的图形有助于学生的形象化的思维，也是形数结合的一个重要方面。用一个平面曲线表示函数是一种方法，用映射的方式是函数是另一表示法．下面将 $y=x^2$，$x\in[-1,1]$ 用两种方法表示：

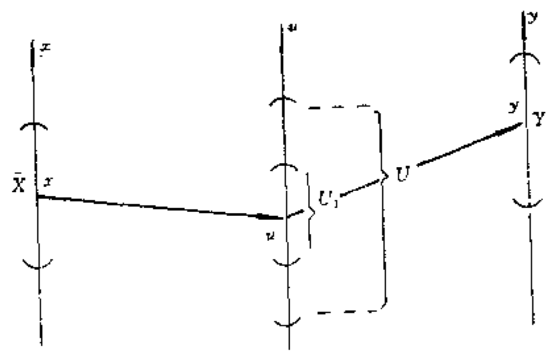


（图1．2）

用图形表示函数有助于我们分析和思考问题。用平面曲线表示函数的图形实质上是平面上点的一个子集合。这个子集合可表为：

$$\{(x, y) \in R^2 | y=f(x), x\in X\}$$

用映射法表示函数有它明显的优点。如对复合函数 $y=f(u)$ $(u\in U, y\in Y)$ 和 $u=\psi(x)$ $(x\in X, u\in U_1)$，它的映射表示法：



（图1. 3）

从图上可以看出 $U_1\subseteq U$，否则复合关系不能建立。如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 就是这种情况。

用平面曲线表示 $y=f(x)$ 的图形以后，还要要求学生会做 $y=f(x+c)$，$y=f(x)+c$，$y=f(cx)$ 和 $y=cf(x)$ 的图形，其中 c 为常数。还要学生注意一些离散点表示的函数，如：$y=f(n)$，$n=1, 2, \cdots$ 或一些间断的图形。

（3）有关函数的定义域　函数概念最重要的是对应关系和定义域，写成：

$$y=f(x),\qquad x\in X$$

函数值的值域是派生的，说明函数必须指出定义域在什么范围，对应关系是什么？如 $y=\ln(x\sin x)$ 与 $y=\ln x+\ln\sin x$ 是两个不同的函数，因为定义域不同。

关于函数的一些运算，可以写成

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，左端的定义域应在 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域的交集中。

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，左端的定义域应在 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域的交集中。

$(kf)(x)=kf(x)$，（k 为常数）

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$。左端的定义域应在 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域的交集中。

其中 $(f\circ g)$ 是表示复合函数的记号，

实际问题中函数的定义域与用解析式表达的数的定义域也有所不同，前者要有实际意义，后者只需解析式子有意义就可以了。如 $y=x^3$ 是表示边长为 x 的立方体体积，则定义域为 $x>0$。若 $y=x^3$ 是抽象式子，那末定义域是 $-\infty<x<+\infty$。

对反函数而言。若 $y=f(x)$，$x\in X$，$y\in Y$；则它的反函数 $x=\psi(y)$，$y\in Y$，$x\in X$。

（4）有关建立函数关系　为了后面内容的需要，要适当地培养学生学会建立一些符合一定要求的函数，如：

建立过 (2, 8)，(−1, −1) 两点的一个奇函数。

建立过 $(1, \frac{1}{e})$，$(-1, \frac{1}{e})$ 两点的一个偶函数

若 f (x) 在 [a, b] 上连续，$f(a) \neq f(b)$，利用 f (x) 建立函数 $\psi(x)$，使 $\psi(a) = \psi(b)$。

建立一个周期函数，使其周期为1，并在 $[0, \frac{1}{3}]$ 上增加，在 $[\frac{1}{3}, 1]$ 上减少。

(5) 有关初等函数　训练学生对基本初等函数的图形和性质要极为熟练，如利用图形或性质比较下列各个数对的大小：

$2^{1.5}, 2^{\sqrt{2}}$；$(1.5)^3, (\sqrt{2})^3$；$\frac{1}{1.5}, \frac{1}{\sqrt{2}}$；$\log_3\frac{1}{1.5}, \log_3\frac{1}{\sqrt{2}}$；

$\sin 1.5, \sin\sqrt{2}$；$\cos 1.5, \cos\sqrt{2}$；$\mathrm{arctg}\,1.5, \mathrm{arctg}\sqrt{2}$。

又如已知 $y=e^x$ 图形，做出 $y=e^{-x}, y=-e^x, y=e^{x+1}, y=e^x+1, y=e^{2x}, y=2e^x$ 的图形。或已知 $y=\sin x$ 图形，做出 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$的图形。

再如已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$写出 $f(-x), -f(x), f(\frac{1}{x}), \frac{1}{f(x)}, f(x)+1, f(x+1), f(f(x))$。又如 $f(x)=x^2, \psi(x)=2^x$ 写出 $f(f(x)), f(\psi(x)), \psi(f(x)), \psi(\psi(x))$。

(6) 有关分段函数　函数在不同区域上的分段表示，学生往往对这方面不熟悉，可举一些例子让他们练习，如：

(i) 火车以速度 v_0加速度 a 出站（v_0，a 均为常数），然后等速 v_1（$>v_0$）前进，从开始经过 T 时间以后来到下站时开始以减速度 b（常数）进站，直到停止。写出速度 v 与时间 t 的函数关系及其定义域。

(ii) 作 $y=|x-1|+|2-x|$ 的图形。

(iii) 设 A 为任意实数的集合，定义一函数 C_A 如下：

$$C_A(x)=\begin{cases}1, & x 在 A 内\\ 0, & x 不在 A 内\end{cases}$$

试用 C_A 和 C_B，表示 $C_{A\cap B}$，$C_{A\cup B}$。

函数这章最基本的是函数的概念，应指出微积分中研究的函数是指能用式子表达的数量上的对应规则。要通过复合函数、分段表示的函数和函数的图象向学生详细阐明函数的正确概念，要学生熟悉基本初等函数和初等函数。关于建立函数关系、函数的值域和函数的映射表示法等内容可以一带而过，分段表示函数是学生不熟悉的，可指出如何考虑这类函数，特别是定义域，让学生自己去思考练习。

课堂示例

(1) 直棵 OAB 由两种材料结合而成，OA 长一单位，线密度为2；AB 长2单位，线密度为3，设 M 为棵上一点，写出 OM 质量 M 与长 x 的函数关系，并做出函数图形

$$[答：M=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}]$$

(2) 若 $H(H(y))=y$，问

$$\underbrace{H(H(H(\cdots H(y))))}_{80次}, \qquad \underbrace{H(H(H(H(\cdots H(y)))))}_{81次}$$

各等于多少？　　　　[答：y，E（y）]

（3）求 $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ 的反函数

[答：$y=\dfrac{3x^2-1}{x^3+3x}$]

（4）奇、偶函数的和及积是否是奇或偶函数？

（5）设 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$

做 $f(x)$ 及 $f(x)\cdot f(1-x)$ 的图形。

第二章 极限与连续

微积分创立到现在，已经有三百多年的历史，但做为微积分的理论基础——极限理论的建立，却是十九世纪的事情。也就是说，在一段相当长的时期，人们对极限的认识是模糊不清的。主要原因是由于微积分创立，促进了各种学科的发展，这些领域有许多内容，需运用微积分解决问题，顾不及微积分的极限理论基础。一直到十九世纪即1821年数学家柯西(Cauchy)在他的"分析教程"，以及以后的"无穷小计算讲义"中给出了微积分中一系列基本概念的严格定义，后来又经数学家维尔斯特拉斯(Weicrstrass)加工完成了极限的严密理论。

极限是数学中极为重要的概念，它沟通了常量和变量、有限和无穷、离散和连续之间的有机联系。极限概念还能使我们对客观世界的认识产生从量变到质变的飞跃过程，通过对极限的研究，不仅可以进行宏观的观察，而且也能对空间的一点附近和时间的一瞬间做微观的探讨。因而对极限概念和方法应有较深入的理解。

学生初学极限遇到的困难较多，主要的有：过去习惯于研究常量，在讨论函数问题时也是侧重变量对应关系方面，观点仍是相对静止的，只有到了极限才真正研究变量变化的趋势；极限的各种情况很多，一时抓不住实质；过去学过的定义中，一般比较易于理解，不像极限定义那样严格；还有验证极限时用的"倒推"的方法也是学生不习惯的。因此，在极限教学中要逐步引导，循序渐进，要求适当，符合学生的认识规律，特别是对工科学生要加强直观、慢慢引导到较严格的理论上来，不宜一开始就提出超越学生认识能力问题，造成学生认为极限很难，动不动就要出错，影响学生学习的信心。

1. 极限的概念　极限概念最好在学生中学的基础上予以引进。对中学代数或几何中有些没彻底解决的问题利用极限概念加以说明。指出这些问题蕴涵着较深的概念，引起学生学习极限的要求和兴趣。

如：$0.\dot{9}$　学生总认为$0.\dot{9}$和1总相差一点点，为什么相等呢？这里就需要说明，$0.\dot{9}$表示一个数列，这个数列是

$$0.9 \quad 0.99 \quad 0.999 \quad \cdots \quad 0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}} \quad \cdots$$

或写成 $1-\frac{1}{10} \quad 1-\frac{1}{10^2} \quad 1-\frac{1}{10^3} \quad \cdots\cdots \quad 1-\frac{1}{10^n} \quad \cdots$

当n充分大时，$1-\frac{1}{10^n}$就越来越接近1，所以无穷循环小数$0.\dot{9}$就等于1。现在无需说明其中细节，等将来再予以验证。

又如求边长为$\sqrt{2}$和π的长方形的面积，中学里学过它的面积是$\sqrt{2}\pi$，但是为什么呢？我们知道边长为1的正方形面积规定为1。当然边长为3和1的长方形面积为3，边长为有理数3.1和1.4的长方形面积为4.34，我们考虑能不能用一系列有理数对

$$a_n: 3.1 \quad 3.14 \quad 3.141\cdots\cdots\rightarrow\pi$$

$$b_n: 1.4 \quad 1.41 \quad 1.414 \quad \cdots\cdots\rightarrow\sqrt{2}$$

使a_nb_n逐步逼近欲求长方形的面积A，也就是说，当n充分地大时，$A_n=a_nb_n$越来越接近A，或者说