高等数学

线性代数

（物理类）

第三册

刘义循　徐军民

兰州大学出版社

高等数学

线性代数

(物理类专业)

第三册

刘义循　徐军民

兰州大学出版社

高等数学—线性代数

第三册

刘义循　徐军民

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路216号　电话:8617156　邮编:730000

兰州大学出版社激光照排中心排版

静宁印刷厂印刷

开本:850×1168毫米 1/32　印张:7.375

1996年4月第1版　1996年4月第1次印刷

字数:183千字　印数:1—3000册

ISBN7－311－00993－/O·122　定价:8.80元

目　录

（第三册）

第一章 矩阵

从函数的观点来讲，线性代数学是以线性函数和它们的集合的理论为研究对象的。而矩阵在提出与解决线性代数的问题中起着工具的作用，因此，矩阵概念及其基本理论是线性代数中首要的不可缺少的组成部分。

§1 矩阵概念的引入

这一节里，我们由各种不同的实际问题来引出矩阵概念，同时，我们还会从中发现矩阵的一些应用。

例 1 设某三个不同的副食商场 S_1、S_2、S_3 供应四种不同价格（单位：元）的罐头食品 F_1、F_2、F_3、F_4 如下表所示：

表 1

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	17	7	11	21
S_2	15	9	13	19
S_3	18	8	15	19

在商场 S_1 要把每种罐头各买一瓶总共需花费 $17+7+11+21=56$（元），同样地，在 S_2、S_3 分别要花费 56 元与 60 元。

表 1 中数字的长方形数表就叫做矩阵，这里分别有 3 行和 4 列。象这样的一个排列总是发生在两个集合（上例中是食品和副食商场）的元素通过一个数字集合（上例中是价格）相联接的时候。

例 2 表 2 中给出了甲、乙、丙、丁四个城市之间的距离（公

里)。

表 2

	甲	乙	丙	丁
甲	0	841	2212	704
乙	841	0	3033	224
丙	2212	3033	0	2835
丁	704	224	2835	0

我们注意到,这个数表中的行和列具有相同的数目,故被称作正方矩阵。零元素所在的那条线叫做这个矩阵的主对角线。同时,也注意到阵列中的数字是关于这条主对角线对称的。以后我们将看到如此的对称矩阵具有一些有趣的性质。

例 3　图 1 是一个网,表示第一个国家的机场 A_1、A_2 与第二个国家的机场 B_1、B_2、B_3 之间的航空路线。每一连线上的数字给出了相应机场之间的飞行里程(千公里)。用列表的形式表示成

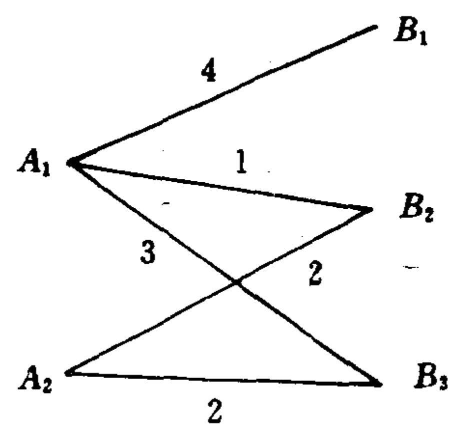

图 1

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

这里,把这个数表用圆括号括起来,也是矩阵的一种表示符号。

例 4　电流 i_1、i_2、i_3 在电路中可以表示成图 2 的样子,且满足方程组

$$\begin{cases}(R_1+R_4+R_5)i_1-R_4i_2-R_5i_3=E_1\\-R_4i_1+(R_2+R_4+R_6)i_2-R_6i_3=E_2\\-R_5i_1-R_6i_2+(R_3+R_5+R_6)i_3=E_3\end{cases} \tag{2}$$

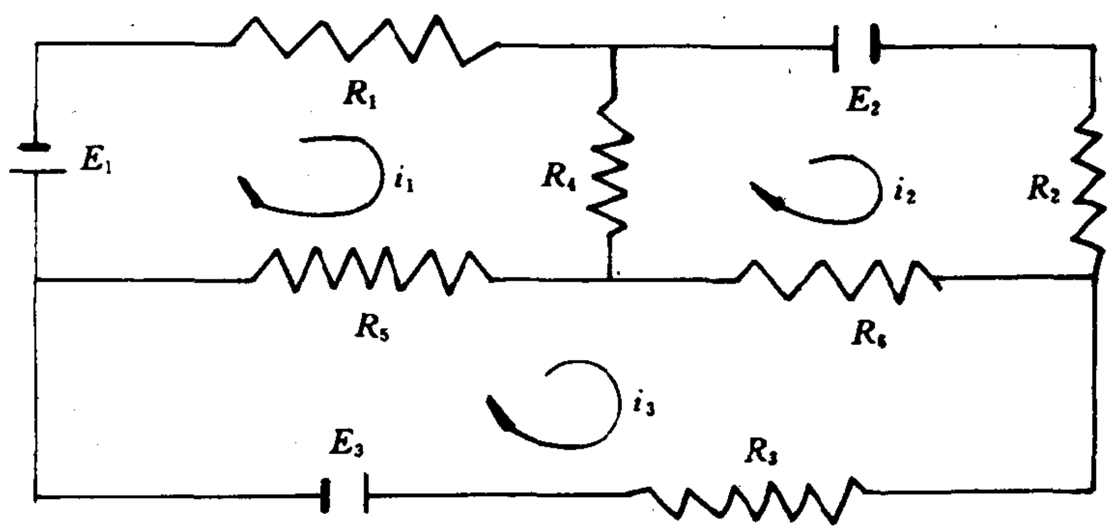

图 2

(2) 中，作为三个未知量要求解的是 i_1、i_2、i_3，其余参数的值为已知。(2) 的关系能够以一个更加简明的方式用矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix}R_1+R_4+R_5 & -R_4 & -R_5\\ -R_4 & R_2+R_4+R_6 & -R_6\\ -R_5 & -R_6 & R_3+R_5+R_6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix} \tag{3}$$

这里，我们把(3)仅仅看作是(2)的一种写法，它的优越性就在于把系数和未知数分离开来，这样，不但节省符号，而且便于研究。这一点，我们将会逐渐体会到。因为，作为线性代数的主要研究对象的形如(2)的这种线性方程组，其性质只依赖于系数的数值。所以，我们可以通过对系数(矩阵)的研究来研究线性方程组。由此看出，从线性代数的对象本身自然引起研究矩阵的必要性。

例 5 设 P 是笛卡儿坐标 x_1、x_2 的平面上的一点，O 为原点。设 OP 绕 O 逆时针方向旋转一个角 θ，由 P 变到 $P_1'(x_1', x_2')$。如图 3(a)、(b) 所示。

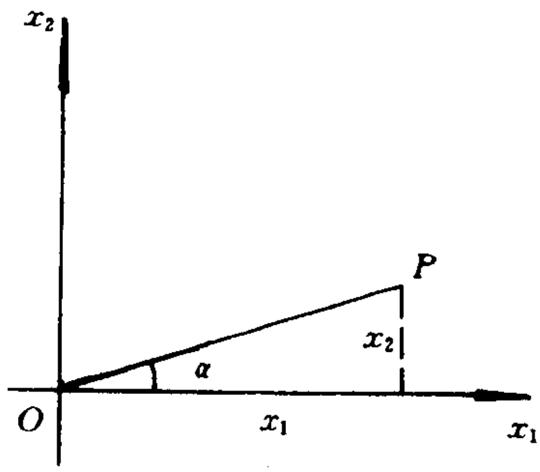

图 3(a)

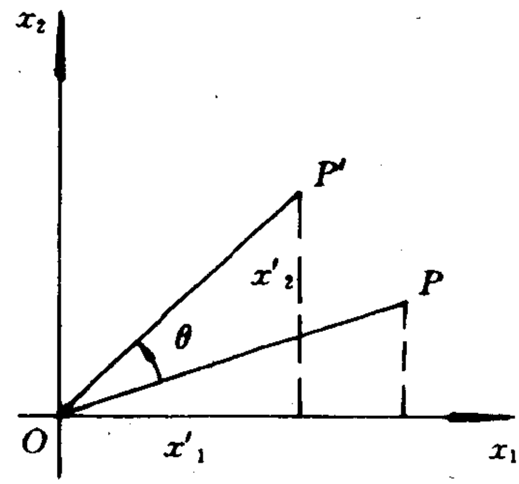

图 3(b)

因为 $OP = OP' = r$，所以我们有

$$x_1 = r\cos\alpha, \qquad x_2 = r\sin\alpha$$

以及

$$x_1' = r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

$$= (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2$$

$$x_2' = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2$$

写成矩阵的形式就是

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

由坐标 x_1, x_2 向坐标 x_1', x_2' 的变换（或映射）的一个例子。这在几何学中是很有用处的。

为了从上述实例得到矩阵概念的一般数学描述，我们还必须引入数域的概念。

定义 1　设 K 是一个含有 0 与 1 的数集。如果 K 中任意两个数的和、差、积、商（除数不能为零）仍然是 K 中的数，那么，就称 K 为一个**数域**。

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域。分别就叫做**有理数域**、**实数域**和**复数域**。我们常用 Q、R、C 来分别表示这三个数域。全体整数组成的集合不是一个数域，因为任意两个整数的商不一定是整数。

把 mn 个数域 K 中的数 a_{ij} 排成长方形数表所得到的

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做数域 K 上的一个 m 行 n 列矩阵，或 $m\times n$ **矩阵**，简记作 $A=(a_{ij})$，a_{ij} 叫做 A 的 (i,j) **元素**。矩阵的横排叫做**行**，纵排叫做**列**。从上往下数称为第 1 行，第 2 行，……；从左往右数称为第 1 列，第 2 列，……。

实数域上的矩阵叫**实矩阵**，复数域上的矩阵叫**复矩阵**。以下讲到矩阵时，如果没有说明，一般都指某个数域 K 上的矩阵。

当 $m=n$ 时，$n\times n$ 矩阵叫做 n 阶**方阵**。n 阶方阵中，由 a_{11}，a_{22}，$\cdots a_{nn}$ 所构成的对角线叫**主对角线**，其中的元素叫**对角元素**。

一阶方阵 $A=(a)$ 和 a 一样看待。

$1\times n$ 矩阵叫做 n **维行向量**。$m\times 1$ 矩阵叫做 m **维列向量**。特别地，由 A 的行作成的

$a'_i=(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in})(i=1,2,\cdots m)$ 叫 A 的行向量；由 A 的列作成的

$$a_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1,2,\cdots n)$$

叫 A 的列向量。用这些可以把矩阵 A 表示成

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

并分别叫做 A 的**行向量表示**和**列向量表示**。

§2 矩阵的运算

数域 K 上全部 $m \times n$ 矩阵记作 $K^{m \times n}$。矩阵运算的实质就是把 $K^{m \times n}$ 中的矩阵当作一个"量"来进行运算，使普通数的运算得到很大扩充。而矩阵之间的基本运算又是由线性方程组之间的运算自然地导出的。

（Ⅰ）矩阵的相等　$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 同为 $m \times n$ 矩阵，且 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 时，A 和 B 称为**相等的**。记作 $A = B$。

（Ⅱ）矩阵的加法　对于 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$，规定 A 和 B 的和为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})。$$

这时，下列式子成立：

(1) $A + B = B + A$　　（交换律）

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$　　（结合律）

(3) $A + 0 = 0 + A = A$　　（零元存在）

象这样，对所有 A 成立的 0 存在（只一个），它是全部元素为 0 的 $m \times n$ 矩阵，叫做**零矩阵**。有时也形式地写作 $0_{m \times n}$。

(4) $A + X = 0 = X + A$　　（负元存在）

这样的 X 对于各个 A 是唯一存在的。就是 $X = (-a_{ij})$，且把这个 X 表成 $-A$。由此，$A + (-A) = A - A = 0$，$A + (-B)$ 就写作

$A - B$：

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

（Ⅲ）数乘矩阵　设 a 为一个数，规定

$$aA = (aa_{ij}) = Aa$$

这时，下列式子成立：

(5) $a(A + B) = aA + aB$

(6) $(a + b)A = aA + bA$

(7) $a(bA) = (ab)A$

(8) $1 \cdot A = A$

设

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n),B = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix} = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$$

则有

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1' + b_1' \\ a_2' + b_2' \\ \vdots \\ a_m' + b_m' \end{pmatrix} = (a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \cdots a_n + b_n)$$

$$aA = \begin{pmatrix} aa_1' \\ aa_2' \\ \vdots \\ aa_m' \end{pmatrix} = (aa_1\ aa_2 \cdots aa_n)$$

例 1　已知

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

计算 $2A - B + 3C$。

解　根据矩阵加法与数乘矩阵的定义有

$$2A-B+3C=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 12 & 15\\ 0 & -9 & 6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}9 & 9 & 18\\ 4 & -12 & 6\end{pmatrix}。$$

命题 1　若 A 为 $m\times n$ 矩阵,则对数 α 有

(1) $0A=0$

(2) $\alpha 0=0$

(3) $(-\alpha)A=-(\alpha A)=\alpha(-A)$

(4) $\alpha A=0$ 成立时,必有 $\alpha=0$ 或 $A=0$。

证明　我们只证明(4),其余可仿此进行。

设 $A=(a_{ij})$,则由 $\alpha A=0$ 得出

$\alpha a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$. 于是,$\alpha=0$,或者 $a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$,即 $A=0$。

(Ⅳ)　**矩阵的乘法**　设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 为 $n\times l$ 矩阵。对于

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1l}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nl}\end{pmatrix}$$

由

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,l)$$

作(i,j)元素而构成的$m\times l$矩阵$C=(c_{ij})$，叫做矩阵A和B的积，表示成AB：

$$AB=(a_{ij})(b_{ij})=(\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}).$$

积AB**只有当**A**的列数与**B**的行数相等时才有意义。**

即$(m\times n$矩阵$)\times(n\times l$矩阵$)=m\times l$矩阵。

例 2.

(1) 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 求AB。

(2) 设

$$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\ ,\ B=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix},$$ **计算AB和BA。**

解 (1)A的列数为3，B的行数也为3。故A与B可乘，由定义有

$$AB=\begin{pmatrix}(1\times1)+(0\times0)+[1\times(-1)] & (1\times0)+[0\times(-1)]+(1\times1)\\ [(-1)\times1]+(2\times0)+[1\times(-1)] & [(-1)\times0]+[2\times(-1)]+(1\times1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-1\end{pmatrix}$$

(2)A的列数为n，B的行数也为n，故AB有意义，且

$$AB=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n$$

即AB是一个1×1矩阵，也就是一个数。

又，B的列数为1，A的行数也为1，故BA有意义，由定义有

$$BA = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1 & \beta_1\alpha_2 & \cdots & \beta_1\alpha_n \\ \beta_2\alpha_1 & \beta_2\alpha_2 & \cdots & \beta_2\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n\alpha_1 & \beta_n\alpha_2 & \cdots & \beta_n\alpha_n \end{pmatrix}$$

即 BA 是一个 $n \times n$ 矩阵。

一般说来，即使 AB 有意义，但 BA 却有时不存在。另外，即使二者都存在，但有时 $AB \neq BA$（如上例 2(2)）。$AB = BA$ 时，A 和 B 称作**可（交）换的**。

例 3 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

试求出所有与 A 可交换的矩阵。

解 设

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

由 $AX = XA$ 得

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

于是有 $a = d, b = c$。不难验证，只要 2×2 矩阵 X 中的元素满足这些条件，它就一定与 A 可交换，故与 A 可交换的全部矩阵是

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

其中 a,b 为任意数

定理 1 关于矩阵的乘法、加法以及数乘，有下列等式成立：

(1) $(AB)C = A(BC)$ （结合律）

(2) $(A + B)C = AC + BC$ （右分配律）

$C(A + B) = CA + CB$ （左分配律）

(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

这些等式的意思是，在等式两端均有意义的前提下等号成立。

证明　设

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$,

(1) A, B, C 必须分别是 $m \times n, n \times l, l \times k$ 型矩阵。这时，$AB = (\alpha_{ij})$ 是 $m \times l$ 矩阵，且

$$\alpha_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$$

而 $BC = (\beta_{ij})$ 是 $n \times k$ 矩阵，且

$$\beta_{ij} = \sum_{t=1}^{l} b_{it} c_{tj}.$$

等式两端同为 $m \times k$ 矩阵。设 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 的 (i, j) 元素分别为 ρ_{ij}, τ_{ij}，则由

$$\begin{aligned}
\rho_{ij} &= \sum_{t=1}^{l} \alpha_{it} c_{tj} = \sum_{t=1}^{l} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{st}\right) c_{tj} \\
&= \sum_{t=1}^{l} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{st} c_{tj}\right) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{l} a_{is} b_{st} c_{tj}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \left(a_{is} \sum_{t=1}^{l} b_{st} c_{tj}\right) = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \beta_{sj} = \tau_{ij}.
\end{aligned}$$

可知。$(AB)C = A(BC)$。

(2)，(3) 读者自己证明。

这里，有必要引入一个记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

记号 δ_{ij} 称为**克罗奈克**(Kronecker) **记号**。

n 阶矩阵

$$E=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为(n 阶) **单位矩阵**，其阶数确定时，可记作 E_n。

定理 2 对于任意 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，有

$$E_mA=A=AE_n$$

证明

$$E_mA=(\delta_{ij})(a_{ij})$$
$$=(\sum_{t=1}^{m}\delta_{it}a_{tj})=(\delta_{ii}a_{ij})=(a_{ij})=A.$$

同样可以证明 $AE_n=A$.

若记

$$E_n=\begin{pmatrix}e_1'\\ e_2'\\ \vdots\\ e_n'\end{pmatrix}=(e_1\ e_2\ \cdots\ e_n)$$

则称 $e_1',e_2',\cdots,e_n'$ 为 n **维基本行向量**；称 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 n **维基本列向量**。

在后边我们将看到，基本行向量与基本列向量在理论上起着重要的作用。这里，我们先举例说明它们在计算中的用处。

例 4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶矩阵，试求 $e_i'Ae_j$，其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$。

解 由于 e_i' 的列数等于 A 的行数，A 的列数等于 e_j 的行数，且都等于 n，故 $e_i'Ae_j$ 有意义。又依据矩阵乘法适合结合律，我们可