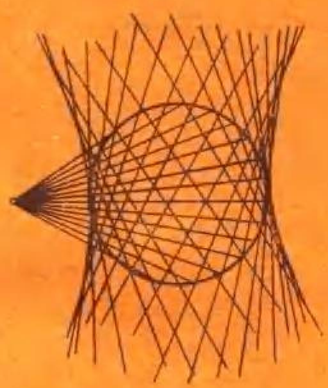
〔苏〕Н. Б. 瓦西利耶夫
В. Л. 古金玛赫尔 编著

直线与曲线



科学普及出版社

直线与曲线

[苏] Н. Б. 瓦西利耶夫　В. Л. 古金玛赫尔　编著

贾宝廉　译

赵根榕　孔繁荣　校

科学普及出版社

内 容 提 要

本书首先用点集合的观点介绍了直线与曲线的有关性质，然后用运动的观点进一步介绍了直线族、曲线族与它们的包络的关系。由于显示了物理背景，本书的叙述是生动而直观的。在内容上，本书注意由浅入深，并配有大量的插图、例题及习题，而且这些习题大都有解答、提示或答案。为了进一步方便读者，译者又在书前配了"符号说明"，在书末增加了"名词索引"。

本书适合广大中学师生参考，对函授教师和自学者特别适用。

Н. Б. ВАСИЛЬЕВ, В. Л. ГУТЕНМАХЕР
ПРЯМЫЕ И КРИВЫЕ
2-ое изд.
Москва, 1978.

直 线 与 曲 线

[苏] Н. Б. 瓦西利耶夫
　　 В. Л. 古金玛赫尔 编著

贾 宝 廉 译

赵根榕　孔繁荣　校

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32　印张：5 ⅝ 字数：121 千字
1982年10月第1版　　1982年10月第1次印刷
印数：1—13,200 册　　定价：0.55 元
统一书号：13051·1183　　本社书号：0223

原　序

这本小册子的主要"人物"是各种几何图形(即书中所常说的"点集合")。首先出场的是各种最简单图形。它们移动，显露出新的特性，它们相交、合并，组成整个的族，并且改头换面——有时变到不可辨认的程度，虽然如此，但有趣的是，从最后出来的新图形中却能看出熟悉的旧图形。

小册子包括大约二百多个题目，其中大部分给出解或提示。这些题目是各式各样的——从传统的题目(在其中必须找出和利用某一点集合)直到为数不多的研究题(这些题导致重要的数学概念和理论，«奶酪问题»、«小艇问题»和«公共汽车问题»就是这样的一些问题)。除关于直线、圆和三角形的普通几何定理以外，书中还采用了坐标法、向量和几何变换，特别常用的是运动语言。解法中的某些逻辑细节留给读者思考。书中符号〈?〉或者表示"自己练习一下"、"检验一下"、"您明白这个论断吗?"，或者表示"想一想、为什么?"等等，这要看它所在的地方而定。符号◘表示解的开始和终结。而符号⬇则表示题目的解或答案在书末。

每一节开始的题目，通常是不复杂的，或者是在下文中要作详细分析的。至于其它题目则完全不必逐个去解，读者只需选取那些在你看来比较感兴趣的去解。对题解中所讲的许多内容作一番实地检验是有益的：作个大的图，最好就图形的不同情况采取几个方案。这种实验的方法不仅有助于看出答案、表述假设，而且还常常有助于想出数学证明的途

径。把图画在有关问题的附近是有好处的，因为在这些题的背后几乎都隐藏有辅助题：试作某些题的条件中所谈到的若干个点或线即可看出这一点。这些预备性的辅助题通常是比较容易解，但并非是没有意思的。

作者深切感激 И. М. 戈里凡特，他的意见对本书的写作很有帮助。还要感谢 И. М.亚哥洛姆、В.Г.包尔强斯基和 Ж.М.拉勃特，他们读完了手稿并且提出了重要的意见。从一九七〇年初版以来，本书经常为函授数学学校所采用。第二版的重要修订考虑了这个学校的教师、我们的同事和朋友们赐予我们的宝贵意见。对他们以及本书编辑 А.Ф.拉普考，我们在此一并表示衷心的感谢。

Н.Б.瓦西利耶夫

В.Л.古金玛赫尔

符　号　说　明

符　号	**说　明**
$\lvert AB \rvert$	线段 AB 的长
$\rho(M,l)$	点 M 到直线 l 的距离
$\{M: \lvert MA \rvert = \lvert MB \rvert\}$	与点 A 及 B 等距离的点 M 的集合（即线段 AB 的中垂线）
$\{M:\rho(M,l_1)=\rho(M,l_2)\}$	与直线 l_1 及 l_2 等距离的点 M 的集合(即 l_1 与 l_2 构成的角的平分线)
$S_{\triangle ABC}$	$\triangle ABC$ 的面积
〈?〉	表示“是吗”、“为什么”、“自己练习一下”、“检验一下”等
◘···◘	表示解答的始末
⬇	表示“在书末有此题的解答或提示”
(1)$\Longleftrightarrow$(2)	表示公式(1)与公式(2)等价，即：(1)可推得(2)，且(2)也可推得(1)。例如 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{8}\Longleftrightarrow\frac{7}{8}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

目　录

引　言

0·1. 一个梯子，立在墙侧光滑的地板上（图 1），小猫坐在梯子中央。梯子滑下，小猫的运动路线如何？

假定小猫是迟钝的，而且稳坐不动，在这个条件下，上述问题可表述为下列数学问题。

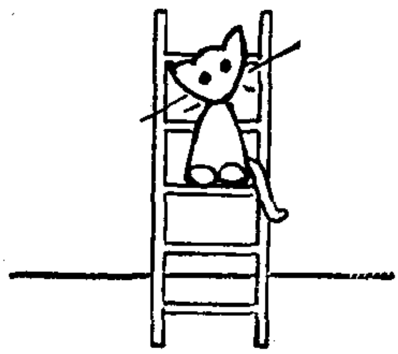


图 1

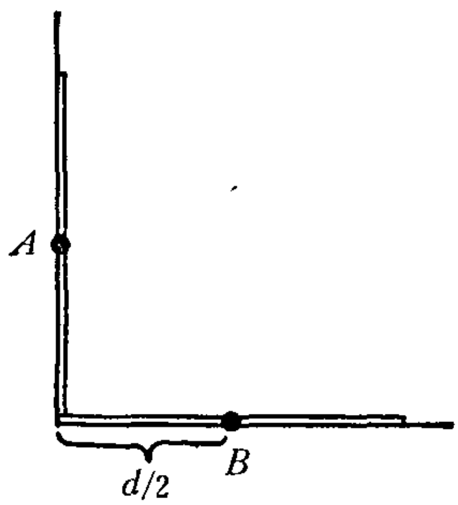


图 2

给定一个直角(图 2)。试求端点位于这个角的边上的、长度为 d 的所有可能的线段的中点的集合。

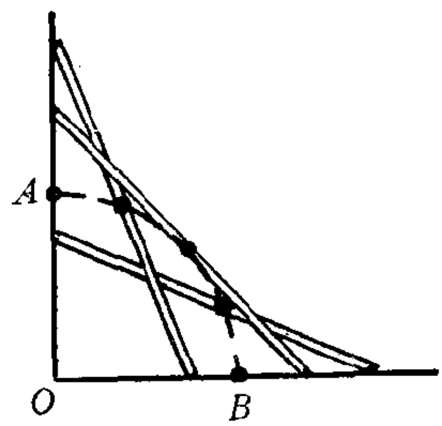


图 3

请猜一猜，所求的集合是什么。显然，当端点在直角边上移动而线段滑动时，其中点就描写某一条曲线（这由问题

的直观表述就可以看出来)。首先说明，这一曲线的端点在哪里？它们对应于线段的铅垂与水平时的极端位置，也就是说，曲线的端点 A 和 B 位于角边上距顶点 $d/2$ 处。

试作出这条曲线的若干个中间的点(图 3)。如果画得充分精确的话，那就会发现：它们都与这个角的顶点 O 等距离。

这就产生了一个假设：所求的曲线是半径为 $\frac{d}{2}$，圆心为 O 的圆弧。现在需要证明这一点。

■ 首先证明，已知线段 KL ($|KL|=d$) 的中点 M 距点 O 的距离始终等于 $\frac{d}{2}$ (图 4)。因为直角三角形 KOL 斜边上的中线 OM 的长等于斜边 KL 的一半(这很容易证明，只要把三角形补充成矩形 $KOLT$ (图 5)，并回忆矩形的对角线 KL 和 OT 相等，且被交点 M 所平分)。这样，我们就证明了：线段 KL 的中点始终位于圆心为 O 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上(图 6)。这个圆弧就是所求的点集合。

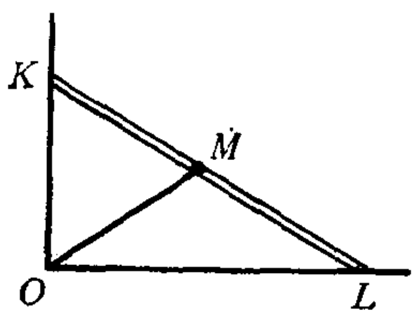


图 4

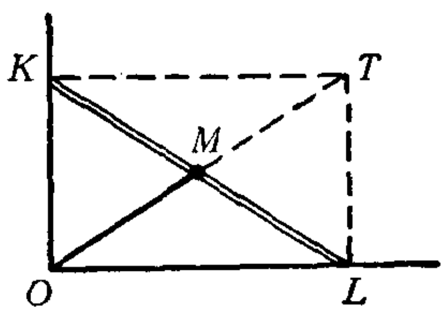


图 5

严格地说，还必须证明，$\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一点 M 都属于所求的集合。这也不难证明。事实上过我们的圆弧上任意一点 M 可以作射线 OM，延长 OM 使 $|MT|=|OM|$，过 T 向两个直角边作垂线 TL 和 TK，就证出所需要的。■

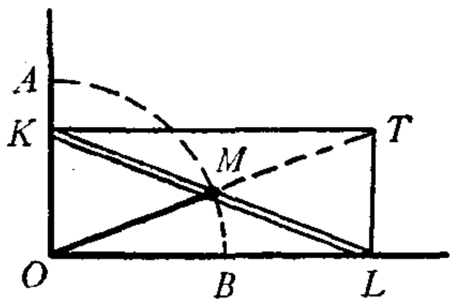


图 6

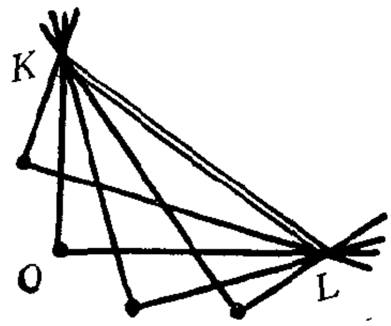


图 7

可以看出，证明的后一半是多余的：因为显然线段 KL 的中点描画一条端点为 A 与 B 的"连续曲线"，也就是说，点 M 经过整个弧 $\overset{\frown}{AB}$，而不是它的某一部分。这个论断是完全令人信服的，但要给它赋予数学的严格性却不这样简单。

现在从另一个角度来探讨一下问题 0·1 中的梯子的运动。假定线段 KL(梯子)固定不动，直线 KO 和LO(墙和地板）分别绕点K和点L转动，且$\angle KOL$ 为直角（图 7)，线段 KL 的中点与直角顶点O的距离始终相等，这件事实就变成人所共知的定理：*如在一平面上给出两点K和L，则使$\angle KOL$ 为直角的点O的集合是以 KL 为直径的圆。* 这个定理及其推广（第二节定理 **E**）在后面解题时要多次用到。

现在再来研究上一题中的条件，并提出更为一般的问题。

0·2. 如果小猫不是坐在梯子的中央，小猫移动的路线又是怎样的？

在图 8 上画出这条曲线的若干个点。显然看出它不是直线，也不是圆，而是一条（对我们来说是）新的曲线，借助于坐标法，可以说明这条曲线是什么曲线。

◘ 以直角边为 Ox 轴和 Oy 轴，建立坐标系（图 9)。假定小猫坐在点 $M(x,y)$，$MK=a$，$ML=b$ $(a+b=d)$。

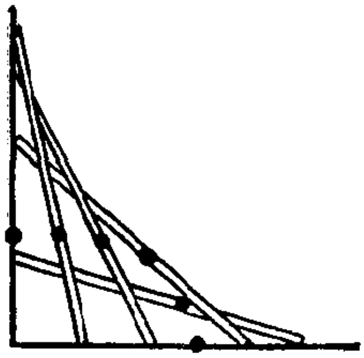


图 8

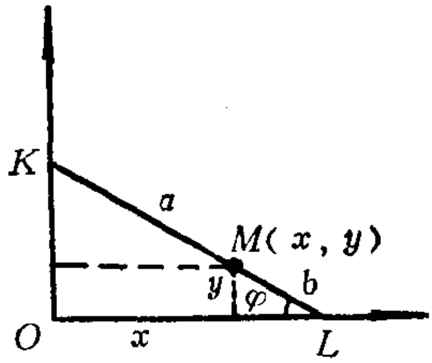


图 9

求把点 M 的横坐标 x 与纵坐标 y 联系起来的方程。

如 KL 与 x 轴的交角为 φ，则 $y=b\sin\varphi$，$x=a\cos\varphi$。因此❶，对于任意的 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$总有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

在第 6 节将要知道，坐标适合这一方程的点的集合是椭圆(图 10)。可见，小猫将要沿着椭圆来移动。■

注意，当$a=b=\frac{d}{2}$时——如象原来小猫坐在梯子中央那

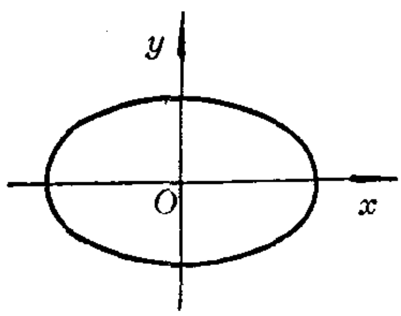


图 10

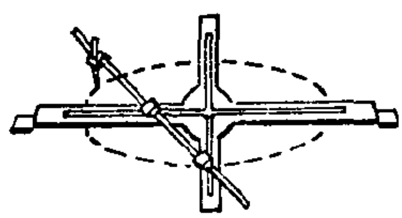


图 11

❶ 将上二式两边分别平方得$\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\varphi$，$\frac{x^2}{a^2}=\cos^2\varphi$，再相加，即得下面的方程(1)。——译者注

样——方程(1)就化为圆的方程

$$x^2+y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

因此我们得到了 0·1 题的一个解析的解法。

0·2 题的结果，正好说明了画椭圆的机械装置的原理，这个装置如图 11 所示，称为达·芬奇椭圆规。

哥白尼定理

0·3. 动圆半径等于定圆半径的一半，动圆在定圆内沿定圆周滚动（但不滑动），动圆周上的点 K 描画出什么曲线(图 12)？

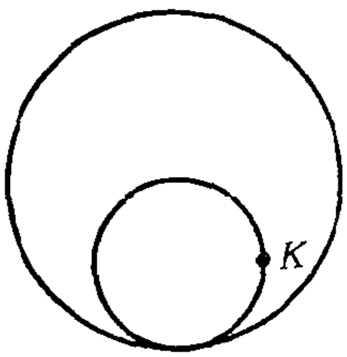


图 12

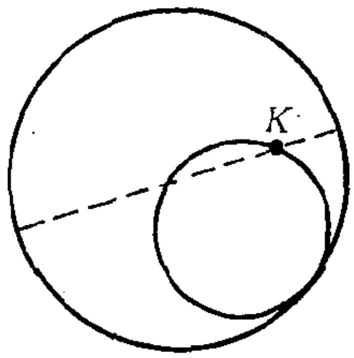


图 13

这个题的答案简单到令人惊讶的程度：点 K 沿直线（准确地说沿定圆的直径）移动（图 13）。该结论称为哥白尼定理。

请用实验证明该定理的正确性（重要的是里面的圆只滚动而不滑动，即两圆滚过的弧长要相等）。此定理不难证明，只要回忆一下圆周角定理就行了。

■ 设动圆上一点 K 的初始位置与定圆上点 A 重合，现在点 K 的位置如图 14 所示，而点 T 为现在两圆的切点。因 $\overset{\frown}{KT}$ 和 $\overset{\frown}{AT}$ 的弧长相等，又动圆的半径等于定圆半径的一半，

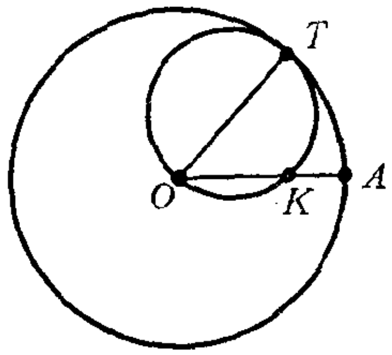


图 14

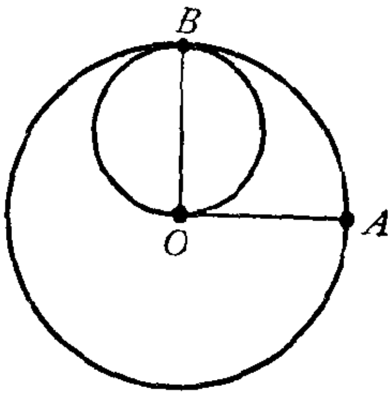


图 15

所以 $\overset{\frown}{KT}$ 的度数比 $\overset{\frown}{AT}$ 的大一倍。因此，如点 O 是定圆的圆心，则按圆周角定理（见第一节，第 16 页），$\angle AOT=\angle KOT$，即点 K 在半径 AO 上。

动圆滚过大圆四分之一以前，该论断都是适用的（动圆滚过大圆四分之一时，两圆切点与大圆上使 $\angle BOA=90°$ 的 B 点重合(图 15)，而 K 点与 O 点重合）。动圆继续滚过大圆(图 16)在 K 点到达直径 AA' 的另一端点 A' 后（图 17），动圆与定圆的下半圆相切，同时 K 点又回到 A 点。□

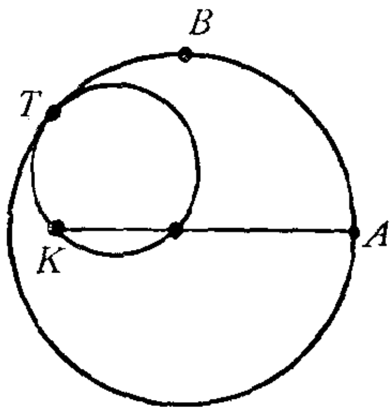


图 16

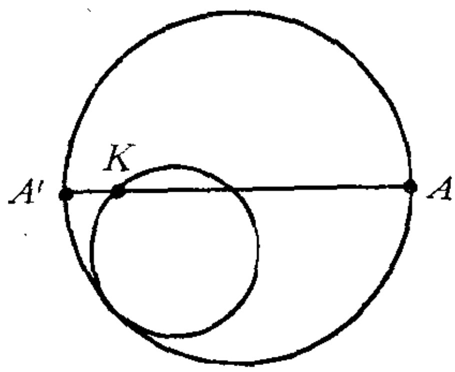


图 17

比较 0·1 题和 0·3 题的结果。它们的引人入胜之处显然都在于下述情况，两题讲的都是图形的相当复杂的运动(前者

是线段运动，后者是圆运动)，但所得出的某些点的轨迹却是十分简单的。看来，两题不仅外形相似，而且其中所研究的运动本身也是相同的。

事实上，设半径为$\frac{d}{2}$的圆，内切于半径为 d 的圆滚动(图 18)，设 KL 为小圆的直径并与小圆固定地连接在一起。按哥白尼定理，K 点和 L 点将沿定直线（即分别沿大圆直径 AA' 和 BB')运动。这样，直径 KL 两端点分别沿互相垂直的直线滑动，与 0·1 题中线段的滑动一样。

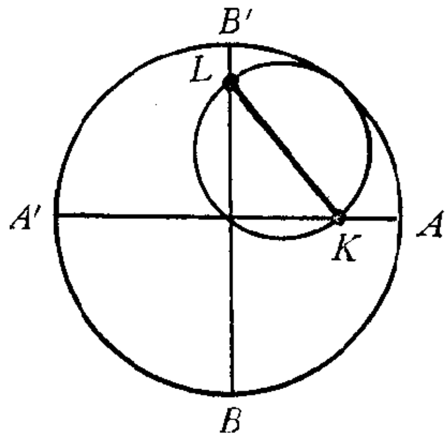


图 18

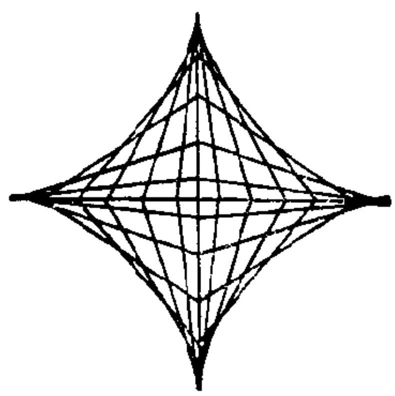


图 19

还有一个与线段 KL 的运动有关的有意思的问题：该线段扫描什么样的点集合？即 KL 运动时其所有可能位置的结合是怎样的(图 19)？包围该集合的曲线称为*星形线*。原来，星形线可以这样得到：使直径为$\frac{d}{2}$的圆，在直径为 $2d$ 的圆内滚动，动圆周上某定点所画出的轨道，就是星形线（图 20)。关于星形线及其近亲，我们在本书最后的第七节中还要讲到，在那里读者可以更详尽地了解我们涉及的问题的相互联系。

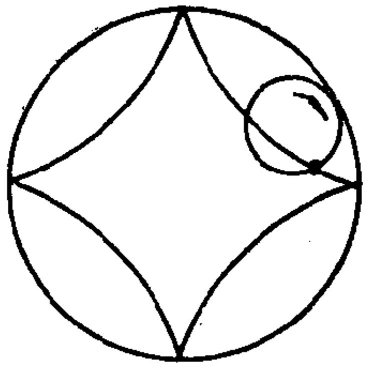


图 20

但是，在研究所探索的这种问题和曲线之前，我们必须停留在与直线和圆有关的问题上，其它曲线，在前五节中将不出现。

第一节　点　集　合

在这一节里，我们将讨论本书各种题目的基本提法，并举例阐明解题所采用的概念和技巧。本节的最后，是各种几何题的汇集。

我们首先讨论书中最常遇到的、作为本节标题的那个术语——“点集合”。

“点集合”是个很一般的概念。它可以是各式各样的图形：一个或几个点，平面上的线或区域。

本书的许多题，都要找出适合某条件的点集合。这些题的答案，常常是在中学几何教科书中业已熟知的图形（直线、圆，有时是平面被直线和圆划分的部分等等）。重要的是，必须找出答案应是一种什么样的图形。例如，在 0·1 题（小猫问题）中，找出答案是圆；而 0·3 题找出的答案是直线。

在解某些题的时候，必须进行全面的讨论，即必须证明：

一、适合已知条件的所有点都在所求的图形上；

二、图形上的所有点都适合已知条件。

有时，正反两方面的论断都是一目了然的。有时，只有其中之一是明显的。也有时甚至连答案是什么都难以揣度。

现在来分析几个典型的例题。

1·1. 已知 O 点在线段 AC 上（图 1-1），求 M 点的集合，使 $\angle MOC=2\angle MAC$。

■　答案：圆心为 O、半径为 $|AO|$ 的圆（不计 A 点）和

射线 OC（不计 O 点）的并集❶（图1-2）。

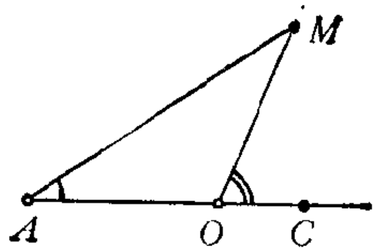


图 1-1

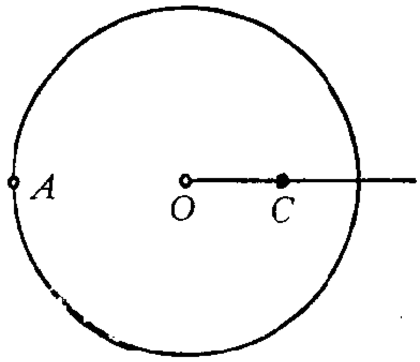


图 1-2

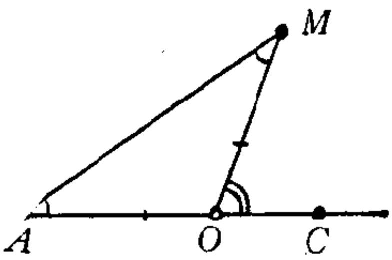


图 1-3

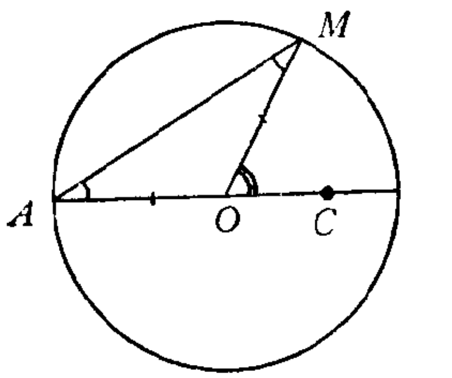


图 1-4

---

❶ 点集合是一些点的全体，若组成集合的点是有限个，则叫有限点集合，否则叫无限点集合。某直线上所有的点是无限的，这无限多个点组成的集合就是这条直线。同样某圆（严格地说应是“圆周”）上的点也是无限的，这些点组成的集合就是这个圆。

两个点集合 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的“并集”（记作 $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$），就是 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 中的点的全体组成的集合。例如，若 $\boldsymbol{A}$ 是圆 O，$\boldsymbol{B}$ 是过圆心的射线 OC：

$\boldsymbol{A}=$ ，$\boldsymbol{B}=$——，

则二者的并集就是

$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=$ 。

此外，“交集”也是经常用的一个概念。集合 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的交集（记为 $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$）是指 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的所有公共点组成的集合。若 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 是上述二集合，则它们的交集就是圆与射线的交点（一个点）组成的集合。——译者注