

高等学校试用教材

岩土塑性力学

Yantu Suxing Lixue

张学言 编著

人民交通出版社

高等学校试用教材

岩土塑性力学

Yantu Suxing Lixue

张学言 编著

人民交通出版社

(京)新登字091号

内 容 提 要

本书是一本系统介绍近20年来新兴的一门学科——“岩土塑性力学”基本内容的教材。全书共八章分为四大部分：I) 绪论，主要介绍岩土类材料的应力-应变-强度特性及岩土塑性力学的内容与特点；II) 基础理论，包括应力与应变分析，线性与非线性弹性本构理论与模型，岩土类材料各种屈服与破坏准则；III) 岩土类材料增量本构关系理论与模型；IV) 极限分析理论，岩土类材料极限荷载的滑移线场解与上、下限解。

本书可供交通、水利、土木、地质、铁道、力学等有关专业的研究生或大学生作必修课或选修课使用，亦可供上述有关专业的教学、科研、设计人员参考或工程技术人员作为继续教育工程教材或自学使用。

岩土塑性力学

张学言 编著

正文设计：乔文平 责任校对：戴瑞萍

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街10号)

各地新华书店经销

北京顺义飞龙印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：11.5 字数：309千

1993年9月 第1版

1993年9月 第1版 第1次印刷

印数：0001—1500册 定价：5.80元

ISBN 7-114-01600-X

TU·00029

前 言

岩土塑性力学是近20—30年来发展起来的一门新兴学科。它不仅适用于岩土类材料（岩石、土、混凝土和水泥等），同时也适用于金属类材料；与传统的金属塑性力学相比，适用范围更广，故又称为“广义塑性力学”。近10多年来，国内水、土类有关专业研究生普遍开设岩土塑性力学课程，迫切需要一本内容比较全面，概念清晰而且又符合“少而精”原则的教材。虽然目前国内出版了一些学术专著，但内容偏多偏深，不适于作教材试用。作者自80年代初开始，在天津大学水资源与港湾工程系为岩土工程等专业的研究生和大学生开设岩土塑性力学（当时叫土塑性力学）学位课和选修课。同时，于1987年和1989年先后在天津水运学会和河北邯郸煤矿建筑工程学院举行过岩土塑性力学讲座。并于1985年编写了“土塑性力学基础”试用教材。经过几年来不断修改、扩充，并结合作者在该学科的研究成果，编著了这本《岩土塑性力学》教材。纵观本书内容与编写意图，具有以下特点：

1) 选材适中，内容较全较新。本书除应力、应变及弹性本构关系等基本理论部分外，主要包括岩土类材料的塑性增量本构理论与模型和平面应变问题的滑移线理论及上、下限理论（目前一般的同类书籍不包括后面这部分内容）。同时，本教材反映了本学科直至80年代末的主要研究成果与水平。

2) 概念清楚，条理分明。岩土塑性力学概念、准则、模型较多，且多抽象；应用的数学和岩土力学等相关学科的知识也较多。这对于初学者来说增加了困难。本书并不着重于抽象的概念和冗长的数学推导，而是着重讲解各种概念、原理、准则、模型的力学意义与几何意义；并注意各种相似，相反概念、准则、模型的联系与区别，再辅以必要的数学推导。实践证明效果较好。

3) 由浅入深，循序渐进。岩土塑性力学与弹性力学、传统

塑性力学以及岩土力学、有限元法等先修课程有着密切的联系。本书在编写过程中，既注意利用上述先修课程的概念与内容，又注意它们与岩土塑性力学的区别与联系；达到使初学者由浅入深，由易到难和循序渐进地掌握本课程的内容和学习方法。

4) 符号系统说明。弹塑性力学与岩土力学使用的符号系统不尽相同。例如，弹塑性力学中一般规定材料的应力、应变以拉为正；几何坐标中的纵轴向上为正；而在岩土力学中，由于岩土类材料的抗拉强度远小于抗压强度，甚至不能承受拉力；压应力一般随深度逐渐增大，故一般规定应力、应变以压力为正，纵轴向下为正。正好与弹塑性力学相反。考虑到岩土材料的这种特性和岩土工程界的习惯，本书的应力、应变符号及坐标选取与岩土力学一致。同时规定应力 Lode 参数 μ 与 Lode 角 θ 符号一致。

5) 适用范围广。本教材不仅适用于港、航专业及水利工程、岩土工程、建筑工程等专业的硕士生和大学生使用，而且还适用于土木、铁道、公路、地质、海洋建筑工程以及固体力学等专业的研究生和大学生使用。

另外，本书每章后附有较多的思考题与练习题，供学生选做。同时书后列举了较多的参考文献，供进一步研究时参考，考虑到目前学生对 Cartesian (迪卡尔) 张量及张量下标记法还不大熟悉，故将张量及其下标记法作为附录放在正文之后，供初学者学习参考。

本书由西安空军工程学院郑颖人教授主审，西安交通大学俞茂铨教授审阅了本书第四章。他们都提出了许多宝贵意见。本书在编写过程中，我的老师陈环教授给予了热情的关怀与支持，在此对他们一并表示衷心的感谢！

本书的描图工作由天津市水利勘测设计院戴令慧和张梅共同完成。

由于作者水平所限，错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

张学言

1992年4月于津大园

主要符号与说明

一、应力、应变及其不变量

符 号	意 义	符 号	意 义
$\{\sigma\}$	应力向量	$\{\varepsilon\}$	应变向量
$\sigma_{ij}, d\sigma_{ij}$	应力张量及其增量	$\varepsilon_{ij}, d\varepsilon_{ij}$	应变张量及其增量
a_{ij}, da_{ij}	偏应力张量及其增量	e_{ij}, de_{ij}	偏应变张量及其增量
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	主应变
s_1, s_2, s_3	偏主应力	e_1, e_2, e_3	偏主应变
τ_1, τ_2, τ_3	主剪应力	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	主剪应变
或 $\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$		或 $\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$	
$\sigma(\sigma_n), \tau$	正应力与剪应力	$\varepsilon(e_n), \gamma$	正应变与剪应变
σ_8, τ_8	八面体正应力及剪应力	ε_8, γ_8	八面体正应变及剪应变
$\sigma_m, d\sigma_m$	平均正应力及其增量	$\varepsilon_m, d\varepsilon_m$	平均应变及其增量
τ_m, τ_c	平均剪应力及纯剪应力	γ_m, γ_c	平均剪应变及纯剪应变
p, dp	静水应力及其增量	$\varepsilon_v, d\varepsilon_v$	体应变及其增量
q, dq	广义剪应力及其增量等	$\gamma_v, d\gamma_v$	广义剪应变及其增量
$\sigma_e (= q)$	效应应力或应力强度应力	$\gamma_e (= \gamma_v)$	等效应变或应变强度
$\sigma_\theta, \tau_\theta$	偏平面上的正应力及剪应力	$\varepsilon_\theta, \gamma_\theta$	应变偏平面上的正应变与剪应变
$\rho\sigma$	应力偏平面距原点距离	$\rho\varepsilon$	应变偏平面距原点距离
$\rho\sigma$	应力偏平面上的应力矢	$\rho\varepsilon$	应变偏平面上的应变矢
I_1, I_2, I_3	应力第一、二、三不变量	I'_1, I'_2, I'_3	应变第一、二、三不变量
J_1, J_2, J_3	应力第一、二、三不变量	J'_1, J'_2, J'_3	应变第一、二、三不变量
$\mu_\sigma, \theta_\sigma$	应力Lode参数及Lode角	$\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon$	应变lode参数及lode角
δ_{ij}	Kronecker Delta	$\theta_{d\varepsilon}$	应变增量lode角
s_{ij}	5-78式定义的应力张量	$d(\varepsilon_{ij})$	应变张量的微分
ξ_{ij}	移动应力张量	dz', dz	塑性内时平均增量及偏增量
α_{ij}	偏应力移动张量	$\beta\delta_{ij}$	静水应力移动张量
p_c	固结压力	u	孔隙水应力

二、材料常数

符号	意 义	符号	意 义
E, ν	Young氏弹性模量 及Poisson比	K, G	弹性体积模量及 剪切弹性模量
$\lambda, \mu(G)$	弹性Lame常数	M	弹性侧限压缩模量
k	屈服参数	k_m, k_T	Mises及Tresca屈服常数
φ, σ	Coulomb-Mohr屈服参 数, 摩擦角及粘聚力	φ', σ'	有效摩擦角及有 效粘聚力
α, k	Drucker-Prager屈服参数	β, k_b	双剪应力屈服参数
σ_c, τ_c	拉、压及纯剪切屈服应力	σ_c, σ_t	单向抗压及抗拉强度
$q_u (= \sigma_c)$	无侧限抗压强度	a	压缩系数
$\sigma_c \sigma_{c'}$	σ - $\log p$ 曲线的斜率	λ, κ	v - $\ln p$ 曲线的斜率, 体积压缩及膨胀指数
e', σ_e'	e - $\log p$ 曲线斜率, 线压缩及膨胀指数	M_c, M_t	p - q 平面临界状态线 压缩及膨胀校斜率
e_0, v_0	初始孔隙比及比容	e_{cr}, u_{cr}	临界孔隙比及比容
e_n, v_n	正常固结及超固结线	v_f	临界状态线上 $p=1$ 个 应力单位时的比容
k_0	上 $p=1$ 个应力单位时的比容	k_a, k_p	主动及被动土压力
$\sigma_c = c \cdot \cot \psi$	粘聚力	ν	
k_0	静止土压力		

三、几何量、物理量及函数

符号	意 义	符号	意 义
α	α 族滑移线名及其 与 y 轴夹角, 或角度	A	塑性模量或面积
θ	σ_1 与 y 轴夹角或 对数螺线展开角	c_1, c_2, c_3	5-79式定义的系数
β	β 族滑移线名及其与 y 轴夹角或坡角	$D_{ij}, {}^s K_{ij}, [D^s]$	弹性刚度张量及矩阵
e	边界面或不连续面 与 y 轴夹角	h, H	硬化函数或高度
μ	相关联流动时 α 或 β 族 滑移线与 σ_1 方向间夹角	$H_{KIJ}, [H]$	与 j 有关的张量与矩阵
γ	坡度角或材料重度	$\vec{H}$	与 A, f, Q 有关的株量函数
$d\lambda, \lambda$	塑性标量因子	$\vec{n}$	法线矢量
		p_a	大气压力
		p_u	极限荷载或承载力
		P, V	垂直力
		SD	拉、压强度不同效应
		u, v	位移及位移速度

目 录

第一章 绪论	1
第一节 岩土塑性力学的性质与内容	1
第二节 变形固体材料本构关系的分类与特点	2
第三节 岩土材料应力-应变及强度特性	8
第四节 岩土塑性力学的建立和发展	14
思考题	17
第二章 应力与应变分析	18
第一节 应力张量及其分解	18
第二节 应力不变量	22
第三节 八面体应力与广义剪应力	24
第四节 主应力空间	27
第五节 不同的应力表示系统及应力不变量的进一步解释	34
第六节 应变分析	41
第七节 应变率、应变增量与应力增量	48
第八节 应力路径与应变路径	50
习题与思考题	55
第三章 弹性本构关系与模型	60
第一节 线弹性本构关系	60
第二节 不同形式线弹性本构关系及其物理意义	64
第三节 弹性应变能与弹性势	69
第四节 非线性弹性本构关系概述	72
第五节 Duncan-张金荣模型	77
第六节 Izumi-Kamemura模型	84

习题与思考题	87
第四章 屈服与破坏准则	91
第一节 概述	91
第二节 Coulomb-Mohr屈服与破坏准则	97
第三节 Tresca准则与Zienkiewicz-Pande准则	106
第四节 Mises准则与Drucker-Prager准则	112
第五节 双剪应力及广义双剪应力准则	120
第六节 Lade-Duncan准则及Lade准则	128
习题与思考题	136
第五章 塑性增量本构理论	139
第一节 全量理论与增量理论	139
第二节 加载条件与加、卸载准则	141
第三节 Drucker公设与Ильюшин公设	146
第四节 流动法则——塑性位势流动理论	154
第五节 硬化模型与硬化定律	162
第六节 普遍的弹塑性本构关系及其矩阵化	171
习题与思考题	181
第六章 岩土塑性本构模型	185
第一节 理想塑性模型	185
第二节 Cambridge等向硬化模型	191
第三节 Lade-Duncan模型与Lade模型	208
第四节 其他岩土塑性模型简介	219
习题与思考题	229
第七章 平面应变问题极限荷载的滑移线场解	232
第一节 极限荷载与极限分析理论	232
第二节 平面应变问题应力场的滑移线解	237
第三节 应力滑移线的性质及几种简单应力场	244
第四节 速度滑移线及其性质	251
第五节 应力间断与速度间断	257
第六节 平顶钝角楔体极限荷载的滑移线场解	263

第七节 锐角楔体极限荷载的滑移线场解	273
第八节 自重及倾斜荷载作用下的极限荷载	277
习题与思考题	288
第八章 极限分析的上、下限理论及其在岩土工程中的应 用	292
第一节 概述	292
第二节 塑性最大功率原理与虚功率原理	295
第三节 上限与下限定理	298
第四节 摩擦定理及不相关联流动时的上、下限定理	301
第五节 塑性耗散能计算与静力场构造技术	304
第六节 上、下限定理在岩土工程中的应用(一)	312
第七节 上、下限定理在岩土工程中的应用(二)	323
习题与思考题	330
部分习题参考答案	333
附录 张量及其下标记法	340
参考文献	347

第一章 绪 论

第一节 岩土塑性力学的性质与内容

岩土塑性力学是连续介质力学或变形固体力学的一个分支，它是近30年来迅速发展起来的一门新兴边缘学科。岩土塑性力学是在经典(或金属)塑性理论的基础上，考虑岩土类材料的塑性力学特性推广和发展起来的。因此又称岩土塑性力学为岩土类材料塑性力学或广义塑性力学。这里所谓的岩土类材料除岩石和土类外，还包括水泥、混凝土和钢筋混凝土等。因为从塑性力学的观点来看，它们具有许多相同与相似的塑性性质。故统称为岩土类材料。

岩土塑性力学的基本内容包括：

- (1) 岩土类材料的塑性本构关系理论与模型；
- (2) 岩土类材料的极限分析理论；
- (3) 它们在岩土工程设计和施工中的应用。

这里提出了“本构关系”一词。本构关系是英文constitutive relation的意译。在力学中，本构关系泛指普遍的应力-应变关系。因为在变形固体力学中，应力不只与应变有关，而且还与物体的加载历时（应力历史）、加载方式（或应力路径）以及温度和时间有关。因此材料的本构关系或普遍的应力-应变关系可以表示为：

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, t, T, \text{应力路径等}) \quad (1-1)$$

式中 t 为加载历时， T 为温度。例如，弹性力学中的广义定律就是最简单的材料本构关系，它不计时间、温度和应力路径及应力历史的影响。因此应力和应变之间存在着唯一对应的关系。当材料应力超出弹性范围而进入塑性阶段时，应力和应变之间就没有唯

一的对应关系，而是要受应力历史或应力路径的影响，这时材料的应力-应变关系就称为塑性本构关系。塑性本构关系要比弹性本构关系复杂得多。如果再考虑材料应力-应变关系随时间和温度的变化，本构关系将更加复杂。本书所要讲的岩土本构关系主要是指与时间和温度无关的塑性本构关系。

岩土的极限分析理论是利用塑性力学中的滑移线场理论和极限分析方法来解决挡土墙土压力，边坡及洞体的稳定以及地基承载力等岩土体强度与稳定性问题。不过，岩土体的滑移线场理论与极限分析方法与主要适用于金属的经典塑性理论相比要复杂得多。

本书主要介绍岩土的弹性本构关系理论和代表性的计算模型以及岩土体的极限分析理论。

第二节 变形固体材料本构关系的分类与特点

作为建筑材料（如土、石的土石料）或建筑物地基或地下洞体介质的岩土材料，宏观上可以把它们视为连续介质或固体材料。因此为了研究岩土的塑性本构关系，首先应当了解变形固体力学本构关系的分类和各种本构关系的特点与差别。连续变形固体力学一般假设材料是均匀的和连续的，并具有无限的韧性或无限变形能力而不出现裂隙或断裂。在此基础上，按照材料的不同受力阶段和应力-应变关系特性，连续固体材料（包括金属、岩土和混凝土等）的本构关系分为以下几种类型和亚类，见表1-1和图1-1a、b、c。

一、各种本构关系的特点

1. 弹性本构关系又分线弹性本构关系和非线性弹性本构关系，如图1-1a所示，线弹性本构关系即一般的弹性力学，其应力-应变关系服从广义Hooke定律。非线性本构关系的应力-应变

连续固体材料本构关系分类

表1-1

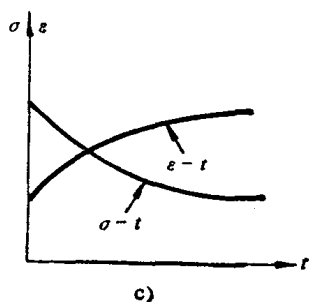
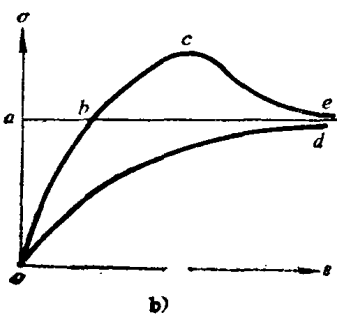
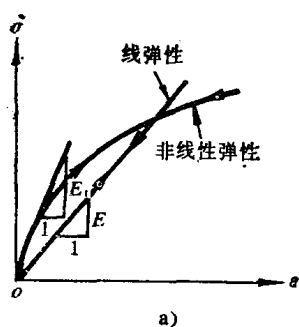
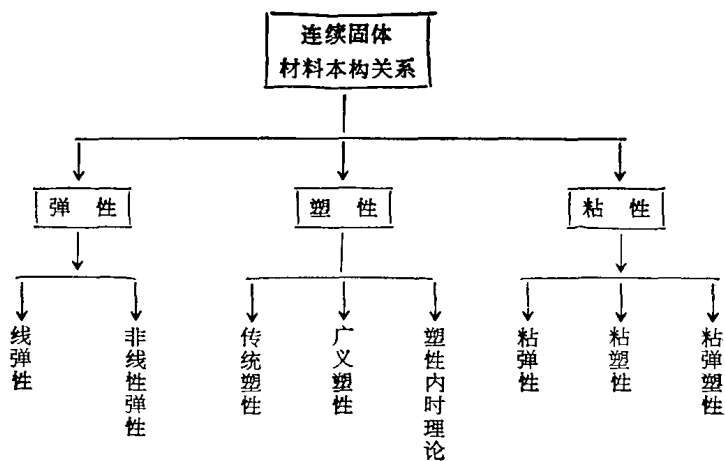


图1-1 连续固体材料本构关系类型

a) 弹性; b) 塑性; c) 粘性

曲线是非线性的，但是加卸载仍然沿着一条曲线。弹性本构关系的基本特征是：

1) 应力和变形的弹性性质或可逆性；

2) 应力与应变的单值对应关系或与应力路径和应力历史的无关性。即无论材料单元在历史上受过怎样的加卸载过程或不同的应力施加路径，只要应力不超过弹性限度，应力与应变都是一一对应的；

3) 应力与应变符合叠加原理；

4) 正应力与剪应变、剪应力和正应变之间没有耦合关系。

因此，根据广义Hooke定律有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= 3K\varepsilon_m \\ \tau &= G\gamma \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 σ_m 和 τ 分别为正应力和剪应力； ε_m 和 γ 分别为平均应变和剪应变， K 、 G 为体积弹性模量和剪切弹性模量。1-2式说明：正应力只产生正应变或体应变，而对剪应变没有贡献；剪应力只产生剪应变而对正应变或体应变没有贡献。这就是说 σ_m 与 γ 及 τ 与 ε_m 之间没有耦合关系。以下我们将看到，岩土类材料的本构关系具有这种耦合特性。

5) 对于各向同性的弹性体，主应力与主应变的方向是一致的。

当岩土体中的应力水平较低时，可以将岩土材料视为弹性材料。

2. 塑性本构关系的类型与特征

1) 塑性本构关系分类

如表1-1与图1-1所示，塑性本构关系可分为三种类型。其中传统塑性理论主要适用于金属类材料。因此，相对于广义塑性理论，传统塑性理论亦称为经典塑性理论或金属塑性理论。它的基本特征是材料的屈服和硬化都与静水压力无关；而且材料只可能产生硬化（或强化）不可能产生软化（或弱化）。与传统塑性理论不同，广义塑性理论认为材料不仅可以屈服与硬化，而且可以

产生软化；同时，屈服、硬化与软化都可以与静水压力相关；它主要适用于岩土类材料，同时也适用金属类材料；因此称为广义塑性理论。塑性内时理论 (Plastic Endochronic Theory) 是近 20 多年来发展起来的一种没有屈服面概念，而引入反映材料累计塑性应变的材料内部时间 (Intrinsic Time) 的新型塑性理论，详见第六章。

除不排水条件下的饱和纯粘性土可视为理想塑性材料外，一般的岩土材料都属于应变硬化或软化型的。

2) 塑性变形的基本特性

无论是理想塑性材料或应变硬化或软化型塑性材料，其塑性本构关系和变形都有如下的特征：

(1) 应力值必须达到或超过某一临界值 (屈服极限) 才能发生塑性变形；

(2) 塑性变形是不可逆的；

(3) 应力与应变之间无唯一对应关系。这是由于塑性应力-应变关系受应力历史和应力路径影响的结果。如图1-2所示。

(4) 应力-应变关系的非线性和由此而引起的应力和应变的不可叠加性。如图1-3所示的应变硬化塑性材料，在塑性变形阶段，施加应力 σ_1 时产生的应变为 ε_1 ；施加的应力达 σ_2 时，相应的应变为 ε_2 ；而当施加的应力为 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ 时，相应的应变为 $\varepsilon \neq \varepsilon_1$

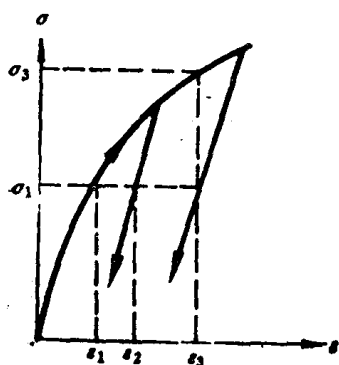


图1-2 塑性状态下应力-应变的对应关系

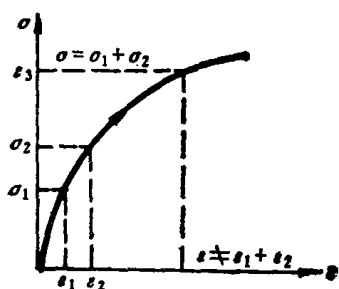


图1-3 塑性状态下应力-应变的不可叠加性

+ ε_2 ，应变 ε 的大小与应力所处的阶段和材料应力-应变非线性的程度有关。

(5) 在塑性变形阶段，加载和卸载时应力-应变之间服从不同的本构关系。

3) 经典塑性理论对材料性质的假设

经典或理想塑性理论根据对金属材料力学性质的试验结果，对材料的塑性性质作了进一步的假设。

(1) 静水压力只产生弹性体积变化，不产生塑性体应变；因此，材料屈服与静水压力无关。同时，静水压力与剪应变，剪应力与弹性体应变之间无耦合关系。

(2) 材料属于理想塑性材料或应变硬化塑性材料（即稳定

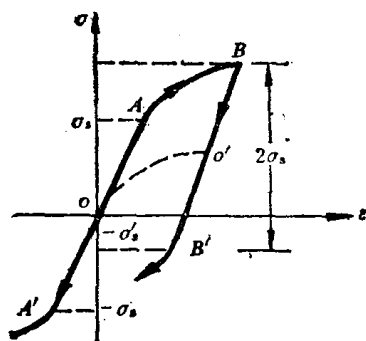


图1-4 Bauschinger效应

性材料），故不可能发生软化现象（不稳定性材料）。关于稳定性材料的定义详见第五章第三节。

(3) 抗拉屈服极限与抗压屈服极限相同；

(4) 材料具有 Bauschinger 效应。所谓Bauschinger效应就是当应力超过屈服点

后，拉伸（或压缩）应力的硬化将引起反向加载时压缩（或拉伸）屈服应力的弱化。如图1-4所示。

(5) 塑性应变增量方向服从正交流动法则，即塑性应变增量方向沿着屈服面的梯度或外法线方向（详见第五章）。

关于应变硬化或软化塑性本构关系的基本特征见第三节。

3. 粘性本构关系

上述弹性本构关系和塑性本构关系都假设材料的应力-应变关系与时间或应变速度无关。当材料的应力或应变随时间（不是指加载过程的时间）而变化时，这种性质就称为粘滞性或简称粘

性，相应的应力-应变关系就称为粘性本构方程。材料的粘滞性常常和弹性或塑性性质同时发生。因此。材料的粘性本构方程分为粘弹性、粘塑性和粘弹塑性三种类型。在工程中，我们常称材料的粘性性质为流变；常称应力下变形随时间的不断变化为材料的蠕变；常称应变下应力随时间的下降为应力松弛。如图1-1c所示。

二、岩石力学与土力学的理论基础与假设

目前的工程设计常常使用岩石力学与土力学的理论与方法。而岩石力学和土力学都是工程力学，即考虑岩石与土的工程特性，将变形固体力学的基本理论应用于岩石和土，就形成了工程实用的岩石力学与土力学。分析传统的工程实用岩石力学与土力学内容，其共同的理论基础与假设是：

1) 以弹性理论为基础进行岩土体的应力分布和变形（或沉降）计算。

2) 在处理土压力，岩土边坡稳定及地基承载力等岩土体强度与稳定性问题时，采用了假设滑动面的静力极限平衡法或塑性力学的滑移线场解与极限分析法。

3) 有效应力原理。由于岩石和土体的孔隙中存在着空气和水。因此，对于饱和的岩石或土体，施加的总应力 σ 等于岩土体的固体骨架所承受的有效应力(σ')和孔隙水应力(u)之和，即：

$$\sigma = \sigma' + u \quad (1-3)$$

4) 土体的强度破坏服从Mohr-Coulomb强度条件，即：

$$\tau_f = \sigma' \tan \varphi' + c' \quad (1-4)$$

式中 τ_f 、 σ' 分别为破坏面上的剪应力与有效正应力； φ' 与 c' 分别为岩土材料的有效摩擦角与粘聚力。

5) 通过岩土体的渗流符合Darcy定律；岩土体本身的渗压固结过程按Terzaghi和Biot固结理论计算。