结构振动分析
习题解答

朱世杰　颜玉玲　编译
张建周　　校

中　国　铁　道　出　版　社

1989年·北京

结构振动分析
习题解答

朱世杰　颜玉玲　编译
张建周　　校

中　国　铁　道　出　版　社

1989年·北京

内 容 提 要

本书是我社已出版的《结构振动分析》一书的习题解答，习题解答共计66题，属单自由度结构的19题，多自由度结构的21题，连续结构的8题，结构中的阻尼18题。本书涉及许多实际问题，可供有关结构动力专业的本科生、研究生和从事结构振动专业的工程技术人员参考。

结构振动分析习题解答

朱世杰 颜玉玲 编译

张建周 校

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑 刘曼华 封面设计 翟 达

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米$\frac{1}{32}$ 印张：4.5 字数：101 千

1 9 8 9 年2月 第1版 第1次印刷

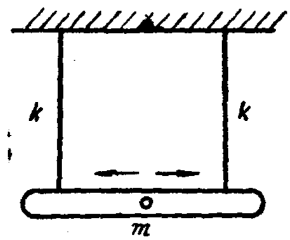
印数：1—2,000册 定价：1.45元

目　　录

一、单自由度结构的振动

1. 一结构的模型为一刚性的水平构件，其质量为3000 kg，每端用竖直轻型弹性构件支承，弹性构件的弯曲刚度为2MN/m。

求刚性构件作微幅振动时的频率。



习题 1 图

解：由频率公式得

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

式中 $k=2\times2\text{MN/m}=4\times10^{6}\text{N/m}$

$$m=3000\text{kg}$$

$$\therefore\quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\times10^{6}}{3000}}=5.8\text{Hz}$$

2. 有一结构的一部分为刚性细杆，其质量为m，下端铰接(如图所示)，并由两根刚度为k的弹簧支持成垂直位置。

求细杆绕枢轴微幅振动时的频率。

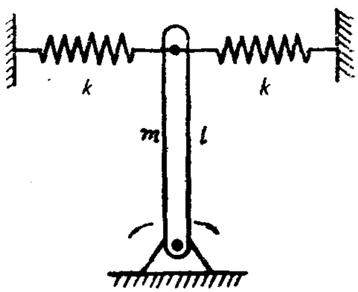
解：由频率公式

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_T}{I}}$$

式中 $k_T=2kl^2-mg\frac{l}{2}$

符号——见《结构振动分析》。

$$I=\frac{1}{3}ml^2$$



习题 2 图

$$\therefore\quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}(4kl^2-mgl)\Big/\frac{1}{3}ml^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12kl-3mg}{2ml}}\text{Hz}$$

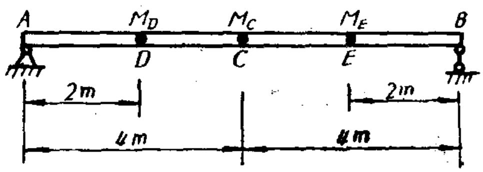
3．一长度为 8 m的两端简支均质梁，承受 300kg/m的均布荷载和三个物体，放在跨中的一个物体质量为1000kg，另两个的质量各为1500kg，且各距梁端 2 m。梁的面积二次矩为$10^{-4}m^4$，材料的弹性模量为$200GN/m^2$。

假设距梁端为 x 处的挠度y_x由下式给出，计算梁在挠曲振动时的最低自振频率。

$$y_x=y_c\sin\pi(x/l)$$

式中　y_c——跨中挠度；

l——梁长。



习题 3 图

解：如图中所示，各集中质量分别为：

$M_C=1000kg$，$M_D=M_E=1500kg$

梁的弹性模量　$E=200\times10^9N/m^2$

梁的截面惯矩 $I=10^{-4}\mathrm{m}^4$

应用能量法求最大动能T_{max}和最大势能V_{max}并令其相等，得频率方程。

$$\because \quad y_x=y_c\sin\frac{\pi x}{l},$$

$$\therefore \quad \dot{y}_x=\dot{y}_c\sin\frac{\pi x}{l} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-y_c\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi x}{l}$$

如令 $\quad y_x=y_c\sin\omega t$

则 $$\dot{y}_x=\omega y_c\cos\omega t, \qquad (\dot{y}_x)_{max}=\omega y_c$$

求各部分动能的最大值：

$$T_c=\frac{1}{2}M_c\dot{y}_c^2$$

$$T_D+T_E=2\cdot\frac{1}{2}M_D\dot{y}_x^2\Big|_{x=l/4}=\frac{1}{2}M_D\dot{y}_c^2$$

$$T_B=\int_0^l\frac{1}{2}m\left(\dot{y}_c\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{4}ml\dot{y}_c^2$$

故得总动能最大值为：

$$\begin{aligned}T_{max}&=T_C+T_D+T_E+T_B\\&=\frac{1}{2}\left(1000+1500+\frac{1}{2}\cdot300\times8\right)\dot{y}_c^2\\&=1850\dot{y}_c^2\end{aligned}$$

势能的最大值为：

$$\begin{aligned}V_{max}&=\int_0^l\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx\\&=\frac{1}{2}EI\int_0^l\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2dx\cdot y_c^2\\&=\frac{EI\pi^4}{4l^3}y_c^2=4756.3\times200y_c^2\end{aligned}$$

由 $$T_{max}=V_{max}$$

并注意到 $$\dot{y}_c=\omega y_c$$

得圆频率的平方为

$$\omega^2=\frac{4756.3\times200}{1850}=514.19\text{rad/s}^2$$

$$\omega=22.68\text{rad/s}$$

最低自振频率

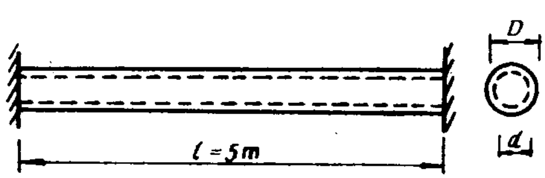
$$f=\frac{\omega}{2\pi}=3.6\text{Hz}$$

4. 一蒸馏车间的钢管直径为120mm，厚度为10mm，长度5 m。假设管子长度为 l，每端嵌固，距管子一端为 x 处的挠度 y 如下式：

$$y=\frac{mg}{24EI}x^2(l-x)^2$$

式中 m——管子单位长度的质量。

计算管子充满水时横向振动的最低自振频率。取$\rho_{钢}=7750\text{kg/m}^3$，$\rho_{水}=930\text{kg/m}^3$，$E_{钢}=200\text{GN/m}^2$。



习题4图

解：如图示，钢管外径$D=0.12$m，内径$d=0.1$m，钢的密度$\rho_s=7750\text{kg/m}^3$，水的密度$\rho_{水}=930\text{kg/m}^3$，$E_s=200\text{GN/m}^2$

钢管的挠曲方程为

$$y=\frac{mg}{24EI}x^2(l-x)^2$$

$$=y_m\cdot\frac{16}{l^4}(l^2x^2-2lx^3+x^4)$$

式中 $y_m=\dfrac{mgl^4}{384EI}$为钢管中点挠度

并有 $$\dot{y}=\dot{y}_m\left(\frac{16}{l^4}\right)(l^2x^2-2lx^3+x^4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{16}{l^4}\right)y_m(2l^2-12lx+12x^2)$$

最大动能

$$T_{max}=\int_0^l\frac{1}{2}m\dot{y}^2dx$$

$$=\frac{1}{2}m\int_0^l\left(\frac{16}{l^4}\right)^2(l^2x^2-2lx^3+x^4)^2dx\cdot\dot{y}_m^2$$

$$=0.2032ml\dot{y}_m^2$$

最大势能

$$V_{max}=\int_0^l\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}EI\int_0^l\left(\frac{16}{l^4}\right)^2(2l^2-12lx+12x^2)^2dx\cdot y_m^2$$

$$=102.4\frac{EI}{l^3}y_m^2$$

由 $$T_{max}=V_{max}$$

并注意到 $$\dot{y}_m=\omega y_m$$

得

$$\omega^2=\frac{102.4EI}{l^3}\cdot\frac{1}{0.2032ml}$$

$$=503.937\frac{EI}{ml^4}\tag{1}$$

$\because$ $$I=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=5.27\times10^{-6}m^4$$

$\therefore$ $$EI=200\times10^9\times5.27\times10^{-6}$$

$$=1.054\times10^{6}\text{N}\cdot\text{m}^{2}$$

$$\because\qquad m_s=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)\times7750$$

$$=\frac{\pi}{4}(0.12^2-0.10^2)\times7750$$

$$=26.784\text{kg/m}$$

$$m_w=\frac{\pi}{4}d^2\times930=7.304\text{kg/m}$$

$$\therefore\qquad m=m_s+m_w=33.818\text{kg/m}$$

将EI，m和l代入圆频率ω的公式（1）得

$$\omega^2=251.3\times10^2\text{rad/s}^2$$

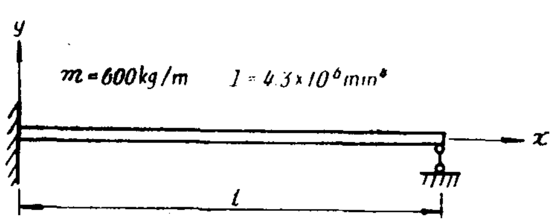
$$\omega=158.52\text{rad/s}$$

最低自振频率

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=25.22\text{Hz}$$

5. 一水平均匀钢梁的一端嵌固在一刚性结构中；另一端铰接而不能竖直运动，但在其它方向却不受限制。梁长8m，相应横截面的面积挠曲二次矩为$4.3\times10^6\text{mm}^4$，梁本身的质量和附着在梁上的质量相当于600kg/m。

对梁的挠曲振型，应用正弦组合函数，计算梁在竖直面挠曲振动时的最低自振频率。



习题 5 图

解：设挠度曲线$y(x)$为

$$y(x)=A\sin\frac{\pi x}{l}+B\sin\frac{2\pi x}{l}$$

由边界条件：

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

得 $$A\cdot\frac{\pi}{l}+B\cdot\frac{2\pi}{l}=0,$$

即 $$A=-2B$$

故有 $$y(x)=-2B\sin\frac{\pi x}{l}+B\sin\frac{2\pi x}{l}$$

梁的最大动能

$$\begin{aligned}T_{max}&=\frac{\omega^2}{2}\int_0^l m(x)dx\cdot y^2(x)\\&=\frac{\omega^2}{2}mB^2\int_0^l\left(-2\sin\frac{\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l}\right)^2dx\\&=\frac{m}{2}B^2\omega^2\left\{\int_0^l 4\sin^2\frac{\pi x}{l}dx\right.\\&\quad\left.-4\int_0^l\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}dx+\int_0^l\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx\right\}\\&=\frac{m}{2}B^2\omega^2\times\frac{5}{2}l\end{aligned}$$

梁的最大势能

$$V_{max}=\frac{1}{2}EI\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx$$

其中

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2B\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi x}{l}-B\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\sin\frac{2\pi x}{l}$$

代入积分得

$$V_{max}=\frac{1}{2}EIB^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\times 10l$$

根据能量法

$$T_{max}=V_{max},$$

得

$$\omega^2=\frac{4EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4}{m}$$

代入已知数据及$E_{钢}=200\text{GN/m}^2$，得

$$\omega^2=136.071\text{rad/s}^2$$

$$\omega=11.665\text{rad/s}$$

最低自振频率

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=1.856\text{Hz}$$

6. 一烟囱的高度为100m，距烟囱基础的距离假设为y，它的质量用一系列的集中质量M来代替，距地面距离y及相应的质量如下表所示：

y_i(m)	20	40	60	80	100
M_i(10^3kg)	700	540	400	280	180

烟囱作为悬臂梁考虑，偏移时计算沿烟囱的状态挠度x为

$$X=x\left(1-\cos\pi\frac{y}{2l}\right)$$

式中 $l=100\text{m}$；

$X=0.2\text{m}$。

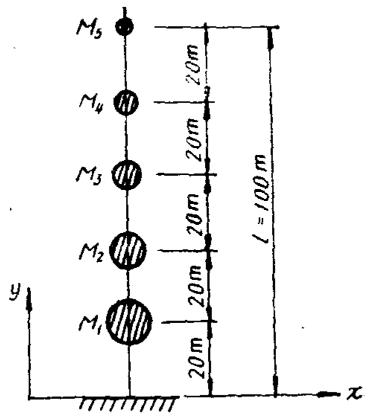
和已经算出的频率比较，实际的频率应该多少？

解：已知弯曲变形

$$X(y)=X\cdot\left(1-\cos\frac{\pi y}{2l}\right)$$

$$X=0.2\text{m},\quad l=100\text{m},$$

$M_1=700\times10^3$kg，
$M_2=540\times10^3$kg，
$M_3=400\times10^3$kg，
$M_4=280\times10^3$kg，
$M_5=180\times10^3$kg。



习题 6 图

烟囱的最大动能

$$T_{max}=\frac{1}{2}\omega^2\cdot\sum_{i=1}^{5}M_iX_i^2$$

X_i的计算如下：

y(m)	20	40	60	80	100
X_i(m) $X_i=0.2\left(1-\cos\frac{\pi y}{200}\right)$	0.009789	0.03820	0.08244	0.1382	0.2

由此得最大动能

$$\begin{aligned}T_{max}&=\frac{\omega^2\times10^3}{2}[700\times0.009789^2+540\times0.03820^2\\&+400\times0.08244^2+280\times0.1382+180\times0.2^2]\\&=\frac{\omega^2}{2}\times16.1214\times10^3\end{aligned}$$

最大势能

$$\begin{aligned}V_{max}&=\frac{1}{2}g\cdot\sum_{i=1}^{5}M_iX_i\\&=\frac{1}{2}g\times10^3[700\times0.009789+540\times0.03820\\&+400\times0.08244+280\times0.1382+180\times0.2]\\&=\frac{1}{2}g\times135.1523\times10^3\end{aligned}$$

由 $T_{max}=V_{max}$，得

$$\omega^2=82.1574\text{rad/s}^2$$

$$\omega = 9.064\text{rad/s}$$

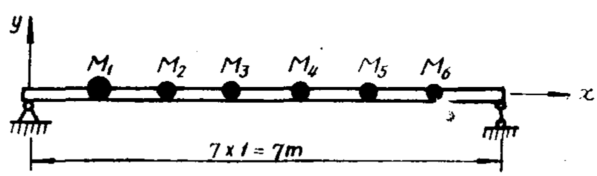
自振频率

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.44\text{Hz}$$

由于给出烟囱的挠度曲线等于增加了刚度，故算出的频率比实际的要高。

7．一轻型梁长度为7m，沿梁长等间距承受6个集中质量，试计算梁的最低自振频率。测记每个质量下面的静挠度为如下表：

质量(kg)	1070	970	370	370	670	670
挠度(mm)	2.5	2.8	5.5	5.0	2.5	1.0



习题7图

解：已知各集中质量的静力位移（如上表），用能量法，则得

最大动能

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{6} M_i y_i^2$$

$$= \frac{\omega^2}{2} \times [1070 \times 2.5^2 + 970 \times 2.8^2 + 370 \times 5.5^2$$

$$+ 370 \times 5.0^2 + 670 \times 2.5^2 + 670 \times 1.0^2] \times 10^{-6}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \times 39.5923 \times 10^{-3}$$

最大势能

$$V_{max}=\frac{1}{2}g\sum_{i=1}^{6}M_iy_i$$

$$=\frac{1}{2}g\times[1070\times2.5+970\times2.8+370\times5.5$$
$$+370\times5.0+670\times2.5+670\times1.0]\times10^{-3}$$
$$=\frac{1}{2}g\times11621\times10^{-3}$$

由

$$T_{max}=V_{max},$$

得

$$\omega^2=\frac{11621g}{39.5923}=2876.46\text{rad/s}^2$$
$$\omega=53.63\text{rad/s}$$

自振频率 $$f=\frac{\omega}{2\pi}=8.54\text{Hz}$$

8. 一均匀刚性房屋其建筑高度为30m，横截面为10m×10m，支承在刚度系数为$0.6\times10^6\text{N/m}^3$的弹性地基上。（刚度的定义为：单位面积产生单位变形时所需的力）。

如果房屋建筑的质量为2×10^6kg，在基底绕其摆动轴的惯量为$500\times10^6\text{kg}\cdot\text{m}^2$，试计算摆动（微幅）周期。

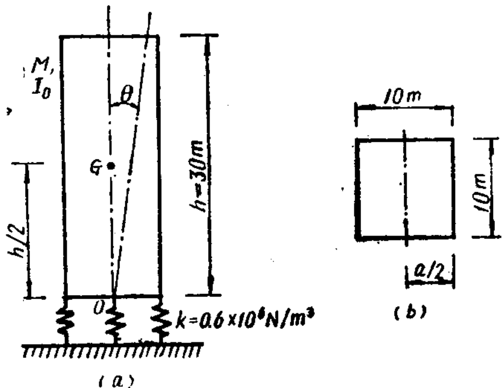
如果$Strouhal$数为0.22，多大的风速就会激起这样的振动？并且计算建筑物在失稳前的最大高度。

解：如图示，已知：

$$M=2\times10^6\text{kg},\quad h=30\text{m}$$
$$k=0.6\times10^6\text{N/m}^3,\ I_0=500\times10^6kg\cdot\text{m}^2$$
$$a=10\text{m}$$

假定系统微幅振动时转角为θ，则最大动能为

$$T_{max}=\frac{1}{2}I_0\omega^2\theta^2{}_{max}$$



习题 8 图

最大势能为

$$V_{max}=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{a/2}kadx(x\theta)^2-Mg\frac{h}{2}(1-\cos\theta)$$

$$=\left(\frac{ka^4}{24}-\frac{h}{4}Mg\right)\theta^2_{max}$$

式中取　　$(1-\cos\theta)\approx 1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\approx\frac{\theta^2}{2}$

由　　$T_{max}=V_{max}$，得

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2\theta^2{}_{max}=\left(\frac{ka^4}{24}-\frac{h}{4}Mg\right)\theta^2{}_{max}$$

代入已知数据，得

$$\omega^2=0.412\mathrm{rad/s^2}$$

$$\omega=0.6419\mathrm{rad/s},\ f=0.1022\mathrm{Hz}$$

周期　　$T=\frac{2\pi}{\omega}=9.8\mathrm{s}$

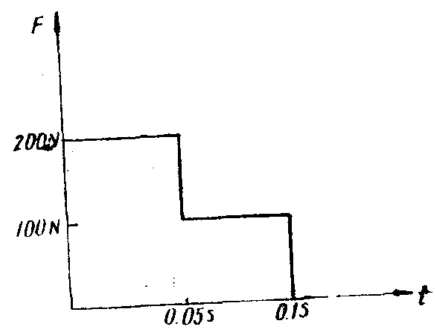
由公式

$$Strouhal\ No.=\frac{f_sD}{v}=0.22$$

式中f_s为激振频率。

此处$f_s=f=0.1022\text{Hz}$，$D=\dfrac{4\times(a\times a)}{2\times(a+a)}=a=10\text{m}$，故得激起振动的风速$V=\dfrac{0.1022\times10}{0.22}=4.645\text{m/s}$

9. 一单自由度系统具有一质量为10kg的物体和一刚度为1kN/m的弹簧，忽略阻尼，所受的力F随时间变化的规律如下图所示。确定所受的力移去后物体自由振动的幅值。



习题9图

解：已知无阻尼单自由度系统

质量 $m=10\text{kg}$

刚度 $k=1000\text{N/m}$

则圆频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1000}{10}}=10\text{rad/s}$$

根据Duhamel积分，求响应值$x(t)$($t>0.1$)，故有

$$x(t)=\frac{1}{m\omega}\left[\int_0^{0.05}200\sin\omega(t-\tau)d\tau+\int_{0.05}^{0.1}100\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\frac{200}{m\omega^2}\left[\cos\omega(t-\tau)\Big|_0^{0.05}\right]+\frac{100}{m\omega^2}\left[\cos\omega(t-\tau)\Big|_{0.05}^{0.1}\right]$$