

高等学校教学参考书

理论力学解题指南

郭新凯 张智明 译

(下)

吉林科学技术出版社

高等学校教学参考书

理论力学解题指南

(下)

郭新凯 张智明 译

吉林科学技术出版社

高等学校教学参考书

理论力学 解题指南 (下)

张智明 郭新凯 译

责任编辑: 滕少伍 珂 丽

封面设计: 马腾骧

出版 吉林科学技术出版社 850 × 1168毫米32开本 25,125印张

插页 2 600,000字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

发行 吉林省新华书店 印数: 1—2800册 定价: 6.90元

印刷 桦甸县印刷厂 ISBN 7-5384-0162-8/O.11

译 者 前 言

本书是根据俄文版《理论力学例题与习题汇编》上卷第二版、下卷第三版译出的。中译本定名为《理论力学解题指南》，仍分两卷出版。上卷内容为静力学、运动学。下卷内容为动力学。

原书编写的意图，是帮助读者学会运用理论力学的原理去独立解决具体的典型问题。本书的习题，取材于著名的И·В·密歇尔斯基的理论力学习题集和在苏联流行的其它种习题集，从中选出了各类最典型的习题。

本书的特点是：在每一章节中，首先对有关理论（定律、定理、重要概念）作出简明的叙述，指出求解同一类型的具体问题的方法和技巧，并提出几种不同的解法进行比较。因此，本书特别适合于自学参考之用。最终要达到的目的是，要使读者学完本书之后能牢固地掌握住基础理论知识，具有独立解决理论力学各类典型问题的本领。所以本书不是单纯的习题解答，而是一本学习指导书。

本书可供理工科院校的师生做为教学参考书；特别是，适合于我国各类业余大学、电视大学、函授学院的师生及工程技术人员做为教学和自学参考之用。

参加本书翻译工作的还有柴殿英、隋殿英、姜风岐同志。全书由张智明校订。

译文中错误或不当之处，欢迎批评指正。

原 书 再 版 序 言

《理论力学例题与习题汇编》的下卷，专门讨论动力学的内容，这是理论力学教程的第三篇，也是最重要的一篇。

解答具体的动力学习题时，往往免不了会遇到“怎样选择和运用某些定律和定理才最为适宜”这一困难问题。因此，在本书中特意加入了第十一章，在这一章里对解答动力学习题的方法作了简明的阐述。

根据作者的意图，在本书中只以笔记的形式给出理论的概述。这时，假定读者手中已有一套理论力学教程。在苏联出版的这一学科的大量教科书中，应当首推Л. Г. 洛强斯基和А. И. 路尔叶的《理论力学教程》(Ⅰ卷，1955年第5版)。这套教程确定了在高等工业院校中讲授理论力学的现代风格，并可供按完整的教学大纲学习理论力学的读者使用。其次是С. М. 塔尔格的《理论力学简明教程》(1963年第3版)。该书可供按精简的教学大纲学习理论力学的读者使用。

讲授理论力学解题方法和技巧的最有成效的途径，不是形式上简化一些规则和方法（往往有系统的指导对解题更有所帮助），而是在解题过程中指出如何应用这些规则和方法。因此，指导书中的主要注意力集中在求解具体的问题上。这些习题是为了两个目的而特意编入的。首先，省得读者对И. В. 密歇尔斯基的以及现今在苏联流行的习题集中的习题进行归纳分类；其次，可使读者在学习本书（或其中某些章节）之后具有独立求解各类典型习题的能力。

为了帮助读者主动地学习知识（只有这样学习才有意义），书

中的每一章节都指出了一些同类型习题的解题步骤，然后再详细地分析相同类型的习题，并常常对各种不同的解法进行比较和评价。

建议读者根据已学过的知识，在学习本指导书的同时还应独立地做一些И. В. 密歇尔斯基理论力学学习题集中的相应的习题，从而学会应用所得到的知识。

下卷中的第八、九、十、十一章及第十二章的§ 1由М. И. 巴契编写；第十三章由凯里宗编；第十二章的§ 2由Г. Ю. 章芮利泽编写，他还参与了其他章节：如第八章的§ 3、§ 4，第十章的§ 4、§ 5、§ 6，第十二章的§ 1，第十三章的§ 5、§ 6的编写，并负责全书的校对工作。

下卷第二版，对文中的许多地方和一些附图进行了修改，并作了若干补充。

作者愿向М. А. Александрова、Н. Н. Барановская、Г. Н. Валова、О. Е. Король、А. К. Колосовская、Д. Р. Меркин、Л. И. Мачабель、Т. В. Путята、Г. Н. Савин及В. Н. Щелкачев致以深切的谢意，他们给本书提出了宝贵的意见。

希望读者提出批评意见，帮助完善此书，作者将以感激的心情考虑这些意见。

Г. Ю. 章芮利泽

目 录

译者前言	1
原书再版序言	2

第三篇 动力学

第八章 质点动力学微分方程	4
§ 1. 质点动力学微分方程的基本形式	4
§ 2. 根据运动规律求作用力 (质点动力学的正问题)	5
§ 3. 根据已知力求运动规律 (质点动力学的逆问题)	24
§ 4. 振动	80
1°. 恢复力	80
2°. 质点的自由振动	81
3°. 与速度成比例的阻力对质点自由振动的影响	83
4°. 质点的强迫振动 · 强迫力	108
§ 5. 相对运动	142
第九章 动力学普遍定理	164
§ 1. 质点系的运动微分方程	164
§ 2. 质点系的惯性中心运动定理	166
1°. 质点系的惯性中心	166
2°. 质点系的惯性中心运动定理	170
3°. 质点系的惯性中心速度守恒的情况	193
§ 3. 质点系的动量主矢变化定理	197
1°. 力的冲量 · 质点系的动量主矢	197
2°. 质点的动量变化定理 (积分形式)	202
3°. 质点系的动量主矢变化定理 (积分形式)	207
4°. 质点系的动量主矢变化定理对连续介质的应用 (欧拉定理)	

.....	211
§ 4. 质点系的主动量矩变化定理·刚体的转动惯量	216
1°. 质点系的主动量矩	216
2°. 质点的动量矩变化定理	218
3°. 质点的动量矩守恒的情况	224
4°. 质点系的主动量矩变化定理	226
5°. 质点系的主动量矩守恒的情况	226
6°. 刚体绕固定轴转动的微分方程	244
7°. 相对运动中的质点系对惯性中心的主动量矩变化定理 ..	284
8°. 转动惯量和惯量椭球	286
§ 5. 刚体的平面运动动力学	297
§ 6. 质点系动能变化定理	324
1°. 力的功	324
2°. 质点和质点系的动能定理	338
3°. 质点的动能变化定理	358
4°. 质点系的动能变化定理	364
5°. 势能	394
6°. 机械能守恒定律	397
第十章 非自由质点系动力学	399
§ 1. 约束的分类·自由度·力的分类	399
§ 2. 动静法	403
1°. 惯性力·惯性力系简化为主矢和主矩	403
2°. 动静法	416
§ 3. 转动刚体对转轴的压力	446
§ 4. 可能位移原理	461
1°. 可能位移·理想约束	461
2°. 可能位移原理	464
3°. 儒可夫斯基杠杆	487
§ 5. 质点系的动力学普遍方程	492
§ 6. 第二类拉格朗日方程	541
1°. 广义坐标·广义力	541
2°. 广义坐标形式的动力学普遍方程·第二类拉格朗日方程	

.....	563
§ 7. 回转仪的近似理论	612
1°. 具有三个自由度的回转仪	612
2°. 具有两个自由度的回转仪	620
§ 8. 绕固定点转动的刚体动力学	626
1°. 具有固定点的刚体的惯性运动	626
2°. 具有固定点的对称刚体的规则进动	633
第十一章 动力学解题方法概述	643
§ 1. 绪论	643
§ 2. 质点动力学习题	643
§ 3. 质点系动力学习题	645
§ 4. 刚体动力学习题	646
1°. 刚体的平动	646
2°. 刚体绕固定轴转动	647
3°. 刚体平面运动	647
4°. 刚体绕固定点转动	648
5°. 自由刚体的运动	649
§ 5. 求解动力学习题的一般注意事项	649
第十二章 动力学专门问题	652
§ 1. 碰撞	652
1°. 两个物体的碰撞·物体与固定的障碍物的碰撞	652
2°. 质点系主动量矩变化定理对瞬时力的应用	668
3°. 两物体碰撞时动能的损失	675
4°. 对绕固定轴转动物体的碰撞	678
§ 2. 变质量质点动力学	688
第十三章 具有有限自由度体系的微振动理论·体系的平衡和运动的稳定性	693
§ 1. 体系平衡的稳定性	693
§ 2. 具有一个自由度体系的自由振动	699
§ 3. 具有两个自由度体系的自由振动	709
§ 4. 在正弦干扰力的作用下, 具有一个和两个自由度	

体系的强迫振动	719
§ 5. 回转力和粘滞阻力对具有两个自由度刚体的自由 振动和强迫振动的影响	725
1°. 回转力对具有两个自由度体系的自由振动的影响	725
2°. 粘滞摩擦力和回转力对具有两个自由度刚体的自由振动 的影响	732
3°. 考虑有回转力的情况下具有两个自由度刚体的强迫振动	735
4°. 粘滞摩擦力对具有两个自由度刚体的强迫振动的影响 ...	742
5°. 回转力对具有四个自由度刚体的自由振动的影响	745
6°. 回转力对具四个自由度刚体的强迫振动的影响 · 自定中心	755
7°. 共振时的刚体的强迫振动	769
§ 6. 运动的稳定性	773
1°. 直接的研究方法	773
2°. 一级近似的运动稳定性	779
3°. 有回转力存在时运动的稳定性	787
【附录】密歇尔斯基理论力学学习题集 (18—27版) 中供读者 独立求解的习题编号一览表	792

第三篇 动 力 学

理论力学中，研究物体的机械运动与引起这种运动的原因之间关系的部分，称做动力学。

在静力学中，我们研究了力系的简化和物体的相对平衡问题。在运动学中，讨论了机械运动的几何描述问题。而动力学（教程的主要部分），是根据静力学和运动学的知识，并按照动力学特有的规律去解决力与运动的关系问题。

物体的任何一种机械运动，都是在空间里和一定的时间内进行的。超越空间之外的物体的运动是不存在的，同样，超越时间之外的物体的运动也是没有的。如果抛开和不顾物体的运动，时间和空间便失去了意义。所以，时间和空间是运动物质存在的形式。

当物体的转动与平动相比可以忽略时，则称该物体为质点。因此，不一定把质点理解为非常小的物体。作平动的刚体，即可看作质点。

如果没有对质点的运动加上任何限制，则称该质点为自由质点。

若对质点加上限制其运动的约束，则此质点称为非自由质点。

动力学定律适合于描述物体相对于所谓“静止”或“绝对”坐标轴的机械运动以及描述物体相对于对静止坐标轴（惯性坐标

轴)作匀速直线运动的坐标轴的机械运动。取太阳中心为坐标原点,使坐标轴指向三个距离很远的星体,这样便构成了“绝对”坐标系。当然,自然界里没有静止的坐标轴,因为一切物体都在相互作用和运动着。但是,根据对计算结果的要求,可以把其它的坐标系近似地看作“静止”坐标系。这样,在解决许多工程技术问题时,可把与地球相联系的坐标轴当做“静止”坐标轴。关于把动力学定律应用于研究物体相对于运动参考系的机械运动问题,可参看后面第八章 § 5。

物理学定律,是被人类若干世纪的实践活动所证实的原理,它不但是动力学的基础,也是其他科学的基础。动力学定律的建立,是力学长期发展的结果。其间,伽里略(1564—1642)和牛顿(1643—1727)的研究成果,具有最重要的意义。

第一定律(惯性定律)。孤立质点保持自己速度的大小和方向不变。

这个定律,事实上肯定了惯性参考系的存在。

物体的运动,是在相互作用下,在空间里,经过一定的时间进行的。这些机械的相互作用的量度,叫做力。一个质点,当其它物体对它的作用可以忽略时,称为孤立质点(当然,这是一个抽象的概念)。

因此,在实际情况中,当作用于质点上的力可以忽略时,质点将作无加速度的运动,即作匀速直线运动或处于静止状态。

质点反抗改变自己速度的特性,称为惯性。

第二定律(动力学基本定律)。自由质点受力的作用时所具有的加速度,其方向与力的方向相同,数值与力的大小成正比:

$$F = m\alpha$$

力的特征不是用质点的速度来表示,而是用速度的变化即加

速度来表示。由动力学基本定律 $F = m\omega$ 可得，当 $F = 0$ 时，加速度 $\omega = 0$ 。

在动力学基本定律中，加速度前面的因子 m ，叫做质量。这个物理量，表征质点反抗改变自己速度的程度。即它是质点的惯性的量度。因此，质量是运动物质的特性之一（其他的特性还有：如延展性、不可渗透性、弹性等等）。

在经典力学中，只研究速度远远小于光速的物体的运动。这时，物体的质量可看成常量（在相对论力学中，质量是与质点运动速度有关的变量）。

在工程单位制中，基本单位为：长度的单位一米、力的单位一千克、时间的单位一秒，质量是导出单位，它以 $\text{千克秒}^2/\text{米}$ 来量度。

第三定律（作用与反作用相等定律）。质点 A 作用于质点 B 上的力（作用力）和质点 B 作用于质点 A 上的力（反作用力），大小相等、方向相反。两个力的方向沿同一条作用线。应该注意，所说的作用力和反作用力是作用在不同的质点上。例如，在非自由质点的情况下，“作用力”作用在质点上，而“反作用力”则作用在施加于质点的约束上。

第四定律（力的作用独立定律）。当质点同时受几个力的作用时，其加速度等于各力单独作用时该质点所具有的加速度的矢量和：

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n,$$

$$\text{式中 } \omega_1 = \frac{F_1}{m}, \omega_2 = \frac{F_2}{m}, \cdots, \omega_n = \frac{F_n}{m}.$$

就是说，求质点的加速度时，可以运用叠加法。但应注意，当求质点的速度时，与此相同的叠加法是没有的，亦即质点的速度不等于各力单独作用时该质点所具有的速度的矢量和。

第八章 质点动力学微分方程

§ 1. 质点动力学微分方程的基本形式

质量为 m 的质点,在力 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{F}_n$ 的作用下,其加速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可用动力学基本定律并配合以力的作用独立定律来确定:

$$m\boldsymbol{\omega} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n.$$

质点动力学微分方程在笛卡尔坐标轴上的投影式为:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz};$$

这里 $\ddot{x}$ 、 $\ddot{y}$ 、 $\ddot{z}$ 为加速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的投影,而 F_{kx} 、 F_{ky} 和 F_{kz} 是力 $\mathbf{F}_k$ 在相应的笛卡尔坐标轴上的投影.

质点动力学微分方程在自然坐标轴上的投影式可写作:

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb};$$

这里 v_τ 为速度在轨道的切线方向上的投影, v 是速度的大小, ρ 为轨道在给定点的曲率半径, $F_{k\tau}$ 、 F_{kn} 、 F_{kb} 为力 $\mathbf{F}_k$ 在自然坐标轴上的投影(τ 为切线, n 为主法线, b 是仲法线).

由最后一个方程得到,作用于质点上的合力在仲法线上的投影等于零,也就是说,合力恒位于轨道上给定点的密切面内.

质点的平面运动微分方程在极坐标上的投影式为:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \sum_{k=1}^n F_{kr}, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \sum_{k=1}^n F_{k\varphi},$$

这里 r 为质点的矢径, φ 是极角 (图110)

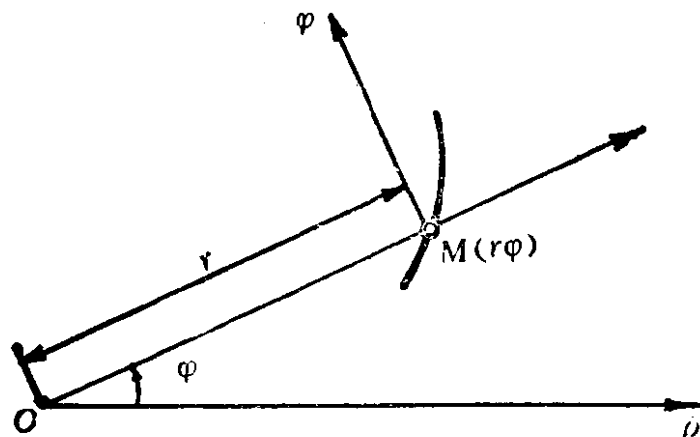


图 110

如果对所选择的各种不同的坐标系分别写出质点的微分方程, 这样, 可以得到柱面坐标的、球面坐标的、及其他曲线坐标的微分方程。后面, 在第十章 § 6 中列出了相对于任意坐标系的质点的运动微分方程。

应用质点的运动微分方程能够解决动力学的两个基本问题: 正问题和逆问题。

根据已知的质点的运动规律和质点的质量, 求作用于该质点上的合力, 称为正问题。

根据已知的作用于质点上的力和质点的质量, 求该质点的运动规律, 称为逆问题。

下一节将讨论求解质点动力学的正问题。

§ 2. 根据运动规律求作用力

(质点动力学的正问题)

如果给出了质量为 m 的质点在笛卡尔坐标系中的运动方程:
 $x = f_1(t)$ 、 $y = f_2(t)$ 、 $z = f_3(t)$, 则引起这个运动的力 $F =$

$F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ 的投影 F_x 、 F_y 和 F_z ，决定于下面的公式：

$$F_x = m \ddot{x}, \quad F_y = m \ddot{y}, \quad F_z = m \ddot{z}, \quad (1^*)$$

因而

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\hat{x}, \mathbf{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\hat{y}, \mathbf{F}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\hat{z}, \mathbf{F}) = \frac{F_z}{F}.$$

所以，对于质点动力学的正问题，只须把给定质点的运动方程对时间取微商便很容易得到解决。

假如给出了质量为 m 的质点沿轨道的运动方程，即 $\sigma = f(t)$ ，则引起这种运动的作用力 $\mathbf{F} = F_\tau \boldsymbol{\tau} + F_n \mathbf{n} + F_b \mathbf{b}$ 的投影 F_τ 、 F_n 、 F_b 决定于公式：

$$F_\tau = m \frac{dv_\tau}{dt}, \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0, \quad (2^*)$$

因而

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \quad \cos(\hat{\tau}, \mathbf{F}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{F}) = \frac{F_n}{F},$$

$$\cos(\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{F}) = 0.$$

在公式 (2*) 中， $v_\tau = \frac{d\sigma}{dt}$ 。

若给出了质量为 m 的质点在极坐标系中的平面运动方程：
 $r = f_1(t)$ 、 $\varphi = f_2(t)$ ，则引起这个运动的力 $\mathbf{F}$ 的投影 F_r 和 F_φ 决定于公式：

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}), \quad (3^*)$$

故

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2}, \quad \cos(\hat{r}, \mathbf{F}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\hat{\varphi}, \mathbf{F}) = \frac{F_\varphi}{F}.$$

如果作用于质点上的力的作用线，在质点运动的时间内始终通过叫做中心的固定点，则称此力为有心力。方向指向固定中心的称为引力。而方向背离固定中心的力，称为斥力。

质点在有心力的作用下，在矢径和质点的初速度矢量所在的平面内运动。为了方便地研究质点的运动，可采用极坐标并运用比耐公式：

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mC^2}F_r,$$

式中 C 为扇形面积速度，当作用力为有心力时它是常量： $C = \dot{S} = \frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2$ 。（运动质点的矢径 r 所扫过的面积 S 对时间的微商，叫做扇形面积速度 $\dot{S}$ ）。

假如给出了有心的轨道方程，运用比耐公式便能求出有心力的变化规律（正问题）。 F_r 为正值时，有心力是斥力；若 F_r 为负值，则有心力为引力。

非自由质点动力学的正问题，是需要求出质点所受的主动动力或作用在质点上的约束反作用力，为此可按下列步骤求解：

- 1) 在图上画出质点在某一时刻的位置和作用于质点上的主动动力；
- 2) 应用解除约束原理，表示出相应的约束反作用力；
- 3) 选择参考系（假如在题中未指出参考系的话）；
- 4) 根据质点的运动规律，求出质点的加速度和加速度在选定的坐标轴上的投影；
- 5) 建立适合于取定的参考系的质点运动微分方程；
- 6) 由已建立的方程组解出待求的物理量。

如果在求解质点动力学正问题时，需要求出作用于质点上的合力，则问题的求解归结为将已知的质点运动方程对时间取微商，并进一步利用公式 (1*)、(2*) 或在作平面运动时利用公式