高等学校试用教材

解析几何

（第二版）

江苏师范学院数学系
《解析几何》编写组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

解析几何

（第二版）

江苏师范学院数学系
《解析几何》编写组编

人民教育出版社

本书是编者根据教育部审订的高等师范院校数学专业《解析几何》教学大纲，在江苏师院数学系 1960 年编写的《解析几何》(人民教育出版社出版)一书的基础上，根据多次教学实践的经验重新编写而成的．本书把平面部分的某些内容与空间部分适当地结合在一起而着重介绍空间解析几何．直角坐标系与仿射坐标系在本书中同时使用，而主要采用的是直角坐标系．叙述比较详细，便于学生阅读。

本书经高等学校理科数学、力学教材编委会委托西南师范学院赵宏量、刘海蔚、陈举、邓御寇初审，又经该编委会委托梅向明教授主持召开的审稿会议复审，同意作为高等师范院校和师范专科学校的试用教材．

高等学校试用教材

解 析 几 何

(第二版)

江苏师范学院数学系

《解析几何》编写组编

*

人民教育出版社出版

四川省新华书店重庆发行所发行

重庆新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 260,000

1960 年 9 月第 1 版 1982 年 10 月第 2 版 1983 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—30,500

书号 13012·0799 定价 1.05 元

前　言

这本教材是根据教育部审订的高等师范院校数学专业《解析几何》教学大纲，在我系于1960年编写的高等学校教学用书《解析几何》(人民教育出版社出版)的基础上，结合我们多年来从事教学实践的一些体会重新编写而成的，初稿完成后，曾试用过两遍.

高等师范院校的培养目标是合格的中学教师，为了提高学生处理中学教材的能力，对于平面解析几何中的一些重要内容，仍须在高等师范院校数学专业解析几何课程中作必要的复习与提高，但是由于近年来高中毕业生的水平在逐年提高，对于平面解析几何的不少内容已掌握得比较好，因此本书把平面部分的某些内容与空间部分适当地结合在一起，而着重介绍空间解析几何. 这样既加深了对平面解析几何内容的理解，也有利于空间解析几何的学习.

本书充分利用矢量代数这一工具，一开始就介绍矢量，并从矢量引进坐标系. 直角坐标系与仿射坐标系在本书中同时使用，但以直角坐标系为主.

为了使学生及时巩固基本概念，掌握解题的基本方法与技巧，我们在每一节后配备了一定数量的习题，其中个别习题还是教材内容的补充. 习题的编排尽量做到由易到难，综合性的习题，适当地分别安插在各节习题之中. 这些习题是本书的重要组成部分.

本教材可作为高等师范院校(包括师范专科学校)数学专业的试用教材或教学参考书. 全书共分七章，带有*号的各节，各校可根据实际情况进行取舍. 全部教材所需教学时数约为90学时(讲授与习题课的比例为3:1). 如果教学计划规定的教学时数为72学时，那么可在第六章与第七章中选取一章重点讲授，另一章作为

学生自学材料．如果教学时数为108学时，那么可将讲授与习题课的比例改为2:1。

行列式、矩阵与线性方程组等高等代数的初步知识，是学习解析几何的重要工具，因恐与高等代数的教学进度不易配合，所以我们编写了这些内容的一个附录，附于书末．

本书编写组由毛振璿(顾问)，吕林根，许子道与周瑶珍四同志组成．在教材编写过程中，大家集体讨论，分工执笔，最后由吕林根同志负责整理、修改、定稿．初稿完成后，高等学校理科数学、力学教材编委会委托西南师范学院赵宏量、刘海蔚、陈举、邓御寇对教材进行了初审，又委托北京师院梅向明教授主持召开审稿会进行复审，参加审稿会的有北京师院、西南师院、安徽师大、扬州师院、烟台师专、泰安师专、南通师专、金华师专等校的代表．参加审稿的同志对书稿提出了许多宝贵意见；在初稿的试用过程中，我系几何教研室的同志也提出了不少建议，在此一并致谢．

限于编者的水平，一定有不少不妥与错误之处，恳切地希望读者多多提出宝贵的意见．

编　　者

1982年6月于江苏师范学院数学系

目　　录

第一章　矢量与坐标

代数学与几何学的结合首先出现在解析几何里，这种结合是通过坐标系的建立，从作为几何学的基本对象——点与代数学的基本对象——数的联系而开始的．在这里，我们将首先引进矢量的概念，利用矢量来建立坐标系，通过矢量，把代数运算引到几何中来，使得某些几何问题更简捷地得到解决．矢量在其他的一些学科，例如力学、物理学和工程技术中也都是很有用的工具．

§1.1 矢量的概念

在力学、物理学以及日常生活中，我们经常遇到许多的量，例如像温度、时间、质量、密度、功、长度、面积与体积等，这些量，在规定的单位下，都可以由一个数来完全确定，这种只有大小的量叫做*数量*．另外还有一些比较复杂的量，例如像位移、力、速度、加速度等，它们不但有大小，而且还有方向，这种量就是矢量．

定义 1.1.1　既有大小又有方向的量叫做*矢量*，或称*向量*，简称*矢*．

我们用有向线段来表示矢量，有向线段的始点与终点分别叫做矢量的*始点*与*终点*，有向线段的方向表示矢量的方向，而有向线段的长度代表矢量的大小．矢量的大小叫做矢量的*模*，也称矢量的*长度*．始点是 A，终点是 B 的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$，有时用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$，$\cdots$ 或黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记矢量（图 1-1）．矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记做 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$．

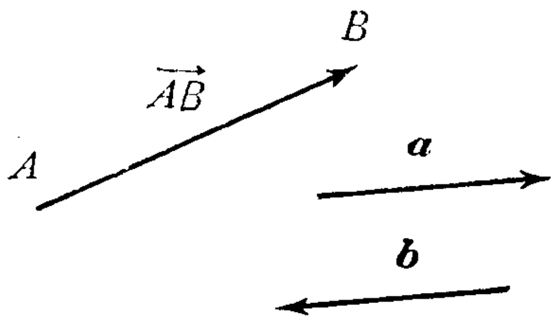


图 1-1

模等于 0 的矢量叫做零矢量，记做 $\mathbf{0}$，它是起点与终点重合的矢量，零矢量的方向不定．不是零矢量的矢量叫做非零矢量．

模等于 1 的矢量叫做单位矢量，与矢量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位矢量叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量，常用 $\boldsymbol{a}^0$ 来表示．

由于在几何中，我们把矢量看成是一个有向线段，因此象对待线段一样，下面说到矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，意思就是它们所在的直线相互平行，并记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，类似地我们可以说一个矢量与一条直线或一个平面平行等．

定义 1.1.2 两个矢量如果模相等且方向相同，那么叫做相等矢量．所有零矢量都相等．矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．

把两矢量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ 的起点 A 与 A'，终点 B 与 B' 分别连成两个线段 AA' 及 BB'，如果 $AA'B'B$ 组成一个平行四边形(图 1-2)，那么，显然有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$．

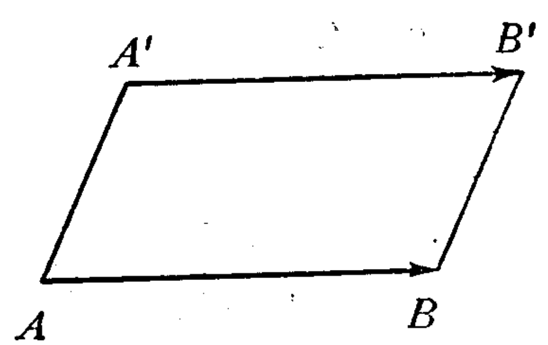


图 1-2

两个矢量是否相等与它们的始点无关，只由它们的模和方向决定，我们以后运用的正是这种始点可以任意选取，而只由模和方

向决定的矢量，这样的矢量通常叫做*自由矢量*．也就是说，自由矢量是可以任意平行移动而仍然代表着和原来同一矢量的矢量．在自由矢量的意义下，相等的矢量都看作是同一的自由矢量．由于自由矢量始点的任意性，按需要我们可以选取某一点作为所研究的一些矢量的公共始点，在这种场合，我们就说，把那些矢量归结到共同的始点．

必须注意，模相等的两个矢量不一定相等，因为它们可能不平行，即使平行，方向可能相反．

定义 1.1.3 两个模相等，方向相反的矢量叫做互为*反矢量*，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的反矢量记做 $-\boldsymbol{a}$．

显然，矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反矢量，也就是 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，或 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$．

如果把彼此平行的一组矢量归结到共同的始点，这组矢量一定在同一条直线上；同样，如果把平行于同一平面的一组矢量归结到共同的始点，这组矢量一定在同一个平面上．

定义 1.1.4 平行于同一直线的一组矢量叫做*共线矢量*．零矢量与任何共线的矢量组共线．

定义 1.1.5 三个或三个以上平行于同一平面的一组矢量，叫做*共面矢量*．零矢量与任何共面的矢量组共面．

显然，一组共线矢量一定是共面矢量，三矢量中如果有两矢量是共线的，这三矢量一定也是共面的，因此，今后我们所涉及的矢量的共面问题，一般总是指空间至少三个以上的互不共线的矢量．

习　　题

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

(2) 把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

(3) 把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点;

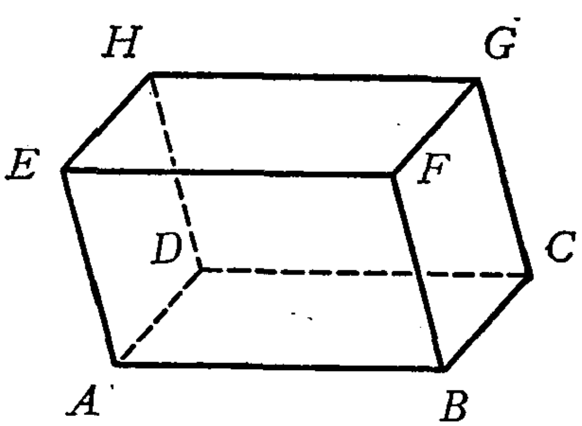
(4) 把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点.

2. 设点O是正六边形$ABCDEF$的中心，在矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$和$\overrightarrow{FA}$中，哪些矢量是相等的?

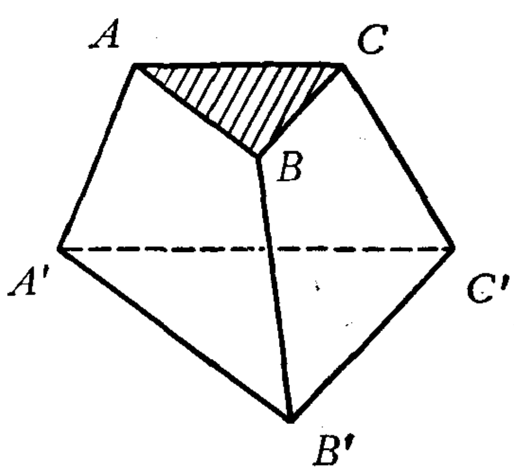
3. 设在平面上给了一个四边形$ABCD$，点K、L、M、N分别是边AB、BC、CD、DA的中点，求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. 当$ABCD$是空间四边形时，这等式是否也成立?

4. 设$ABCD$-$EFGH$是一个平行六面体，在下列各对矢量中，找出相等的矢量和互为反矢量的矢量：

(1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$；(2) $\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CG}$；(3) $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{EG}$；(4) $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{GF}$；(5) $\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CH}$.



第 4 题



第 5 题

5. 设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$分别是三棱台ABC-$A'B'C'$的上、下底面，试在矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$中找出共线矢量和共面矢量.

6. 回答下列问题:

(1) 如果矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$共线，矢量$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$也共线，矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$是否也共线?

(2) 如果矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$共面，矢量$\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$也共面，矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}$是否也共面?

(3) 如果矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$中$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$共线，矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$是否共面?

(4) 如果矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$共线，在什么条件下$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$也共线?

§ 1.2 矢量的加法

在物理学中，位移的合成用“三角形法则”，也就是接连在三角

形二边上作位移 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，合起来就得到第三边上的位移 $\boldsymbol{c}$(图 1-3)．力的合成通常用“平行四边形法则”，也就是作用于一点的两个力 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的合力是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\boldsymbol{c}$(图 1-4)，这个合力 $\boldsymbol{c}$ 也可归结为三角形法则去求，只要把一个力 $\boldsymbol{b}$ 的始点搬到另一个力 $\boldsymbol{a}$ 的终点上去就行了．

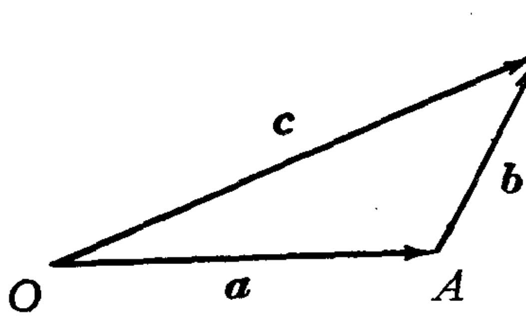


图 1-3

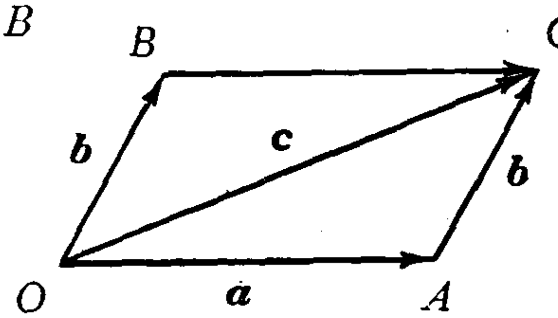


图 1-4

位移和力的这种合成法对于一般矢量也是有意义的．

定义 1.2.1 设已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以空间任意一点 O 为始点接连作矢量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ 得一折线 OAB，从折线的端点 O 到另一端点 B 的矢量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$，叫做两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．由两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做**矢量加法**．

根据定义 1.2.1，由图 1-3 我们有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}. \tag{1.2-1}$$

这种求两个矢量和的方法叫做**三角形法则**．由此再根据图 1-4 与定义 1.1.2 可得：

定理 1.2.1 如果把两个矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边组成一个平行四边形 $OACB$，那么对角线矢量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$．

这种求两个矢量和的方法叫做**平行四边形法则**．

根据矢量加法的定义，显然有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

定理 1.2.2 矢量的加法满足下面的运算规则：

交换律 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}; \tag{1.2-2}$$

结合律 $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \qquad (1.2\text{-}3)$$

证 先证交换律. 对于两矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线的情形，由图1-5

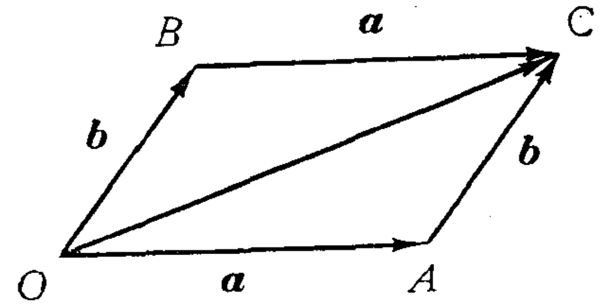


图 1-5

可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

对于两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线的情形，留给读者自行证明.

再证结合律. 自空间任意点 O 开始依次引 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$ (图 1-6)，根据矢量加法定义有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

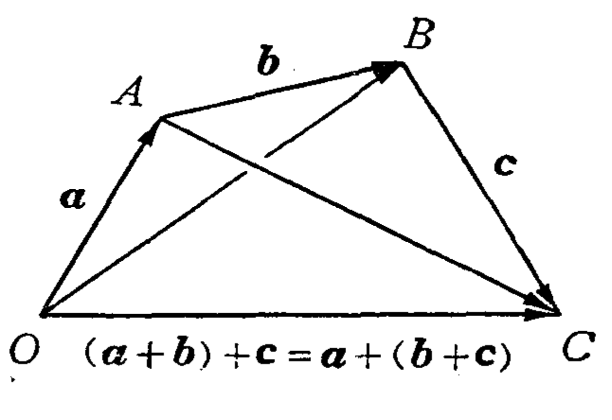


图 1-6

所以 $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

由于矢量的加法满足交换律与结合律，因此，对于任意有限个

矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，不论它们相加的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，所以可以记做

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

由三角形求和法则可以推广到求有限个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和的一般方法如下：自任意点 O 开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$（图 1-7），于是矢量

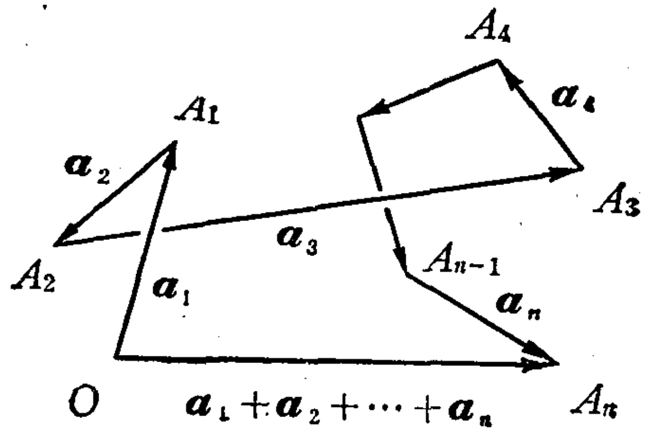


图 1-7

$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即
$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}. \tag{1.2-4}$$

这种求和的方法叫做**多边形法则**.

定义 1.2.2 当矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于矢量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把矢量 $\boldsymbol{c}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做*矢量减法*.

利用相反矢量，可以把矢量的减法运算变为加法运算.

因为如果 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，在等式两边各加 $\boldsymbol{b}$ 的反矢量 $-\boldsymbol{b}$，利用 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，便得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，因此

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1.2-5}$$

这表明求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差可以变为求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反矢量 $-\boldsymbol{b}$ 之和. 又

因为$-\boldsymbol{b}$的反矢量就是$\boldsymbol{b}$,因此又可得

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{1.2-6}$$

根据矢量加法的三角形法则,有$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, 因此根据矢量差的定义,总有

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}. \tag{1.2-7}$$

这里O为空间的任意的定点.

根据(1. 2-7)我们要求矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差, 可通过下列作图法得到:

自空间任意点O引$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 那么矢量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (图1-8).

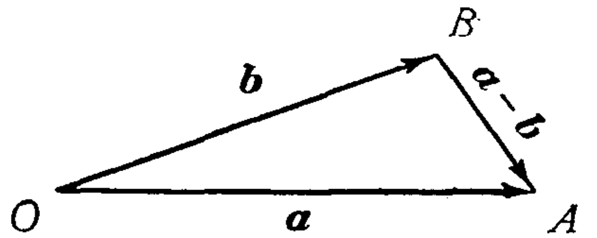


图 1-8

例 1 如图 1-9, 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$, 试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 来表示对角线矢量$\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.

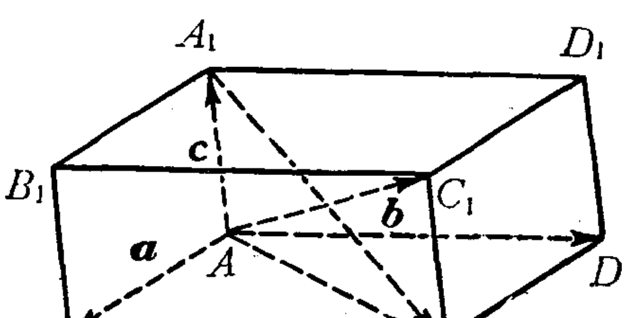


图 1-9

解 (1) $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

(2) $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,

或者 $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AA_1}$

$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

例 2 用矢量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于 O 点且互相平分(图 1-10)，从图可以看出：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

因此，$\overrightarrow{AB}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

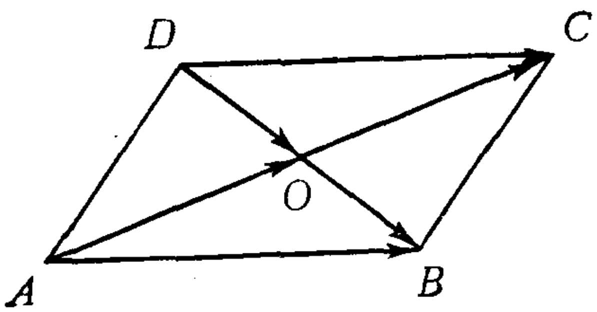


图 1-10

§1.3 数量乘矢量

定义 1.3.1 实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个矢量，记做 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 我们把这种运算叫做数量与矢量的乘法.

从这个定义我们立刻知道，当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=0$，所以 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，这时就不必考虑它的方向了. 当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反矢量，因此我们常常把 $(-1)\boldsymbol{a}$ 简写做 $-\boldsymbol{a}$.

已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位矢量 $\boldsymbol{a}^0$，下面的等式显然成立.

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,\quad 或\quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.3-1}$$

由此可知，一个非零矢量乘以它的模的倒数，结果是一个与它同方向的单位矢量.

一般地，根据定义 1.3.1，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 不是同方向就是反方向，因此矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 共线. 下面的重要定理，说明了共线矢量与数量乘矢量的关系.

定理 1.3.1 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与非零矢量 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分与必要条件是存在唯一的实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证 定理中的条件显然充分，因为 $\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，也就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. 为了证明条件必要，假定 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，可设 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=m$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，那么就取 $\lambda=m$，于是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 同向，且有 $|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，那么取 $\lambda=-m$，仍得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

最后证明 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 中的 λ 是唯一的，如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{b}$，那么 $|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda'\boldsymbol{b}|$，从而有 $|\lambda|=|\lambda'|$，并且显然 λ 与 λ' 有着相同的符号，所以 $\lambda=\lambda'$.

定理 1.3.2 数量与矢量乘法满足下面的运算规则：

(1) $$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a};\tag{1.3-2}$$

(2) 结合律 $$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};\tag{1.3-3}$$

(3) 第一分配律 $$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\tag{1.3-4}$$

(4) 第二分配律 $$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\tag{1.3-5}$$

这里 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为矢量，λ,μ 为任意实数.

证 (1) 根据定义 1.3.1，(1.3-2) 显然成立.

(2) 证明结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 成立.

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，或 λ,μ 中至少有一为 0 时，结合律显然成立. 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda\mu\neq0$ 时，由定义 1.3.1 有