弯斜桥计算理论
与 实 用 计 算

Wanxieqiao Jisuan Lilun
Yu Shiyong Jisuan

邢志成 著

人民交通出版社

（京）新登字091号

内 容 提 要

本书详尽地介绍了弯斜桥计算理论与实用计算。内容包括：曲梁的内力分析、曲线梁桥荷载的横向分布、我国第一座连续曲梁桥的设计与施工、单梁式曲线梁桥与直线梁桥的分析比较、斜梁的计算方法、斜梁桥荷载的横向分布和梁式桥扭转中心。

弯斜桥计算理论与实用计算

邢志成　著

插图设计：王惠茹　正文设计：刘晓方　责任校对：张　莹

人民交通出版社出版

本社发行

（100013　北京和平里东街10号）

北京市四季青印刷厂印刷

开本：$787\times1092\frac{1}{32}$　印张：9　字数：206千

1994年8月　第1版

1994年8月　第1版　第1次印刷

印数：0001—3000册　定价：11.00元

ISBN 7-114-01889-4

U·01253

目　　录

第一章　曲梁的内力分析

§1—1　曲梁的定义及其分类

一、　曲梁的定义

曲梁是相对于直梁而言的。所谓直梁，指的是在水平面内梁的轴线为直线；而在铅直平面内，常把它做成带预拱度的一条曲线。曲梁则是指在水平面内梁的轴线为曲线，曲线包括诸如圆曲线、抛物线、悬链线、缓和曲线等单曲线，还包括由两种及以上单曲线圆滑连成的复曲线。本书所指曲梁均为圆曲线梁。于是，曲梁的定义：

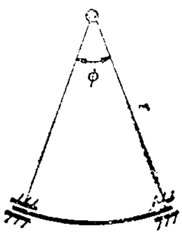

图　1-1

设有一结构的水平投影如图 1-1 所示，该结构两端设有支承（也可一端支承），轴线半径r为常数，所夹圆心角为ϕ，且长度$r\phi$与径向截面宽度B之比大于或等于 2，则该结构为曲梁。

二、　曲梁的分类

为了叙述方便，本书以连续曲梁为例，按支承方式把曲梁分为：

1）A型连续曲梁，如图1-2a）所示，即曲梁在支承处弯曲而不可转动。

2）B型连续曲梁，如图1-2b）所示，即曲梁的中间支承

无竖向位移，可弯曲和转动。

3）C型连续曲梁，如图1-2c）所示，即曲梁设置铰支承，在支承处均可弯曲和转动。

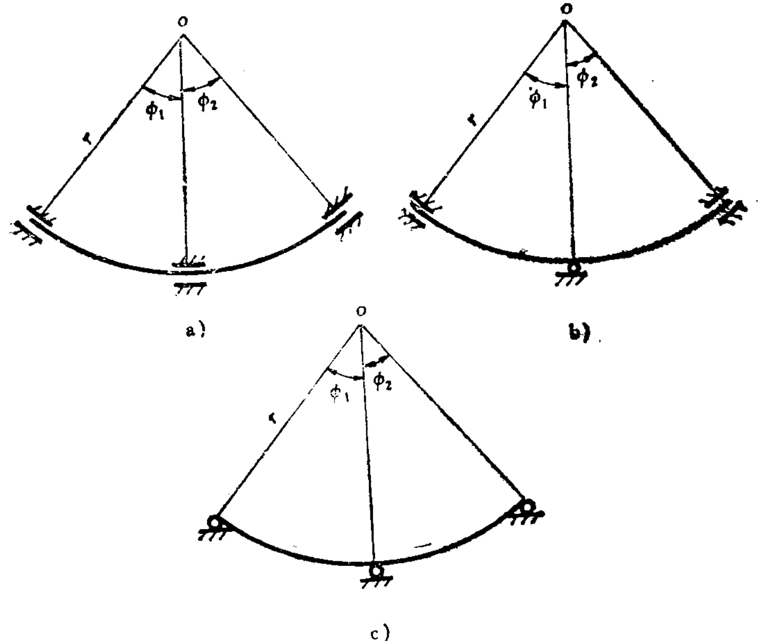

图 1-2

§1—2 竖向荷载下A型连续曲梁的内力影响线

§1—2.1 概述

曲线桥是公路等级提高的产物。目前，我国已建成的曲线桥梁，有黄土嘴桥，其结构形式为三跨连续曲梁桥。今后，随着四化建设的发展，高速公路、一级公路、二级公路将不断增多，曲线桥的建造也就会日益增多。

曲梁与直梁的区别，最直观的是几何形状不同。直梁的中心线是一条直线，曲梁的是一条曲线，并且是一条简单的圆弧线；从结构力学的观点看，直梁内力求解是平面问题，而曲梁的内力求解则是空间力系问题。曲梁与直梁的主要区别是，曲梁有曲率，在竖向荷载作用下，曲梁因曲率而产生扭转；在扭矩作用下，曲梁因曲率而产生弯曲。

曲梁采用连续的形式，肯定具有优越性。

下面介绍三跨A型连续曲梁内力影响线计算公式的推导及内力影响线形状。

§1—2.2　三跨A型连续曲梁内力影响线的计算

一、计算假定及基本结构

1. 计算假定。图1-3a）所示三跨A型连续曲梁，除满足小变形及平面假定外，支座横向刚度无限大，曲梁在支承处不发生横桥向角变位。

2. 取基本结构如图1-3b)，三跨A型连续曲梁的赘余未知力有五个。

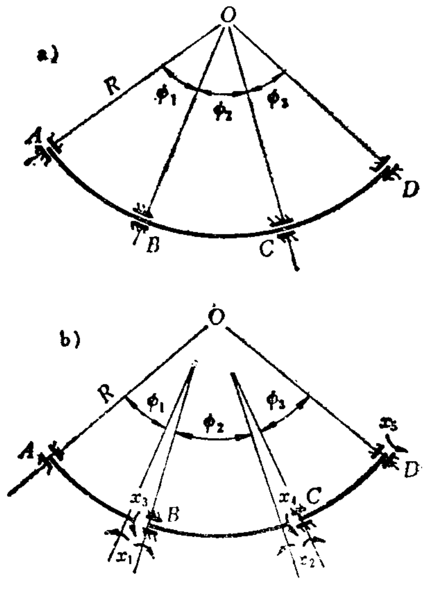

图　1-3

建立力法方程

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \delta_{14}x_4 + \delta_{15}x_5 + \Delta_1 = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \delta_{24}x_4 + \delta_{25}x_5 + \Delta_2 = 0$$

$$\delta_{31}x_1+\delta_{32}x_2+\delta_{33}x_3+\delta_{34}x_4+\delta_{35}x_5+\Delta_3=0$$

$$\delta_{41}x_1+\delta_{42}x_2+\delta_{43}x_3+\delta_{44}x_4+\delta_{45}x_5+\Delta_4=0$$

$$\delta_{51}x_1+\delta_{52}x_2+\delta_{53}x_3+\delta_{54}x_4+\delta_{55}x_5+\Delta_5=0$$

解一个有五个未知量的联立方程组比较繁。为了简化计算。拟先求算单跨一次超静定曲梁的内力。

3．符号规定：

M——弯矩；

T——扭矩；

Q——剪力；

P——竖向集中力；

T_i——i支座横向扭矩；

N_i——i支座竖向反力；

x_i——超静定赘余力；

δ_{ii}、$\delta_{ij}\pm1$——形常数；

Δ_{iP}、Δ_{iT}——载常数。

图1-4c)所示曲梁内力均为正；图1-4a）所示外力均为正，即竖向力P以向下为正，作用力T以使向曲率外侧旋转为正。

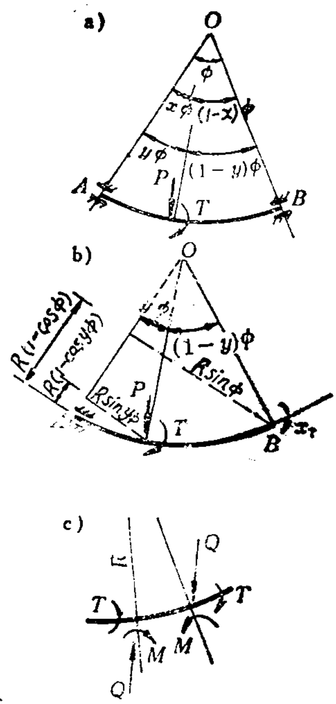

图 1-4

二、单跨一次超静定曲梁内力的计算公式

图1-4a）所示为单跨一次超静定曲梁，解除B支座的径向扭转约束，代之以赘余扭矩，得到图1-4b）所示的基本结构。

1．基本结构在P作用下的支座反力及扭矩

$$N_A=\frac{\sin\varphi-\sin y\phi}{\sin\phi}P;\quad N_B=\frac{\sin y\phi}{\sin\phi}P \tag{1-1}$$

注：在本书中符号φ等同于符号ϕ

$$T_A = -\left[1-\cos y\phi - \frac{\sin y\phi}{\sin\phi}(1-\cos\varphi)\right]RP \quad (1\text{-}2a)$$

$$T_B = 0 \quad (1\text{-}2b)$$

基本结构在P作用下的截面内力

$$Q = \frac{\sin\varphi - \sin y\phi}{\sin\varphi}P \quad (1\text{-}3a)$$

$$x<y\begin{cases} T = \dfrac{\sin(1-y)\phi\cos x\varphi - \sin\varphi + \sin y\phi}{\sin\varphi}RP & (1\text{-}3b) \\ M = \dfrac{\sin(1-y)\varphi\sin x\varphi}{\sin\varphi}RP & (1\text{-}3c) \end{cases}$$

$$x>y\begin{cases} Q = -\dfrac{\sin y\varphi}{\sin\varphi}P & (1\text{-}4a) \\ T = \dfrac{\sin y\varphi}{\sin\varphi}[1-\cos(1-x)\varphi]RP & (1\text{-}4b) \\ M = \dfrac{\sin(1-x)\varphi\sin y\phi}{\sin\varphi}RP & (1\text{-}4c) \end{cases}$$

其中：x——表示截面位置；

y——表示荷载作用的位置；

R、ϕ——表示曲率半径及圆心角，以下同。

2. 基本结构在T作用下的支座反力及扭矩

$$N_A = -\frac{\sin y\phi}{R\sin\phi}T \quad (1\text{-}5a)$$

$$N_B = \frac{\sin y\varphi}{R\sin\varphi}T \quad (1\text{-}5b)$$

$$T_A = -\left[\cos y\phi + \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin y\phi\right]T \quad (1\text{-}6a)$$

$$T_B = 0 \quad (1\text{-}6b)$$

基本结构在T作用下的截面内力

$$x<y\begin{cases} Q=-\dfrac{\sin y\varphi}{R\sin\varphi}T & \text{(1-7a)} \\ T=\dfrac{\sin y\phi+\cos x\varphi\cdot\sin(1-y)\varphi}{\sin\varphi}T & \text{(1-7b)} \\ M=\dfrac{\sin(1-y)\varphi\sin x\varphi}{\sin\varphi}T & \text{(1-7c)} \end{cases}$$

$$x>y\begin{cases} Q=-\dfrac{\sin y\varphi}{R\sin\varphi}T & \text{(1-8a)} \\ T=\dfrac{\sin y\varphi}{\sin\varphi}[1-\cos(1-x)\varphi]T & \text{(1-8b)} \\ M=\dfrac{\sin(1-x)\varphi\sin y\varphi}{\sin\varphi}T & \text{(1-8c)} \end{cases}$$

3. 基本结构在$x_T=1$作用下的支座反力及扭矩

$$N_A=-\frac{1}{R} \tag{1-9a}$$

$$N_B=\frac{1}{R} \tag{1-9b}$$

$$T_A=1 \tag{1-10a}$$

$$T_B=0 \tag{1-10b}$$

基本结构在$x_T=1$作用下的截面内力

$$Q=-\frac{1}{R} \tag{1-11a}$$

$$T=1 \tag{1-11b}$$

$$M=0 \tag{1-11c}$$

4. 图1-4a）所示的单跨一次超静定曲梁在P作用下的内力计算

建立力法方程：

$$\delta_{11}x_T+\varDelta_P=0$$

计算系数

$$\delta_{11}=\int_S \frac{\overline{M}_1^2}{EI}ds+\int_S \frac{\overline{T}_1^2}{GJ}ds \text{（略去剪力项）}$$

式中：I、J——截面的抗弯及抗扭惯矩，假定曲梁为等截面，I、J为常数，以下类同；

$\overline{M}_1$、$\overline{T}_1$采用公式(1-11c)及(1-11b)。

$$\therefore \qquad \delta_{11}=\frac{R\phi}{GJ}$$

$$\Delta_{1P}=\int_S \frac{\overline{M}_1 M_P}{EI}ds+\int_S \frac{\overline{T}_1 T_P}{GJ}ds \qquad \text{（略去剪力项）}$$

式中：$\overline{M}_1$、$\overline{T}_1$采用公式(1-11c)及(1-11b)，

T_P采用下式：

$$x<y \qquad T_P=\frac{\sin(1-y)\varphi\cos x\varphi-\sin\varphi+\sin y\varphi}{\sin\varphi}RP$$

$$x>y \qquad T_P=\frac{\sin y\varphi-\sin y\varphi\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}RP$$

$$\therefore \quad \Delta_{1P}=\frac{PR^2}{GJ}\int_0^{y\phi}\frac{\sin(1-y)\varphi\cos x\varphi-\sin\varphi+\sin y\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\cdot dx\varphi+\frac{PR^2}{GJ}\int_{y\varphi}^{\varphi}\frac{\sin y\varphi-\sin y\varphi\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}dx\varphi$$

$$=\frac{PR^2\phi}{GJ}\left[\frac{\sin y\varphi}{\sin\varphi}-y\right]$$

$$x_T=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\left[\frac{\sin y\varphi}{\sin\varphi}-y\right]RP$$

图1-4a）所示单跨一次超静定曲梁在P作用下的截面内力：

$x<y$

$$\begin{cases} Q=(1-y)P & (1\text{-}12a) \\ T=\left[\dfrac{\sin(1-y)\varphi\cos x\varphi}{\sin\varphi}-(1-y)\right]RP & (1\text{-}12b) \\ M=\dfrac{\sin(1-y)\varphi\sin x\varphi}{\sin\varphi}RP & (1\text{-}12c) \end{cases}$$

$x>y$

$$\begin{cases} Q=-yP & (1\text{-}13a) \\ T=\left[y-\dfrac{\sin y\varphi\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}\right]RP & (1\text{-}13b) \\ M=\dfrac{\sin(1-x)\varphi\sin y\varphi}{\sin\varphi}RP & (1\text{-}13c) \end{cases}$$

5．图1-4a）所示单跨一次超静定曲梁在T作用下的截面内力

$x<y$

$$\begin{cases} Q=0 & (1\text{-}14a) \\ T^*=\dfrac{\sin(1-y)\varphi\cos x\varphi}{\sin\varphi}T & (1\text{-}14b) \\ M=\dfrac{\sin(1-y)\varphi\sin x\varphi}{\sin\varphi}T & (1\text{-}14c) \end{cases}$$

$x>y$

$$Q=0 \qquad (1\text{-}15a)$$

$$\begin{cases} T^*=-\dfrac{\sin y\varphi\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}T & (1\text{-}15b) \\ M=\dfrac{\sin y\varphi\sin(1-x)\varphi}{\sin\varphi}T & (1\text{-}15c) \end{cases}$$

其中T^*与T在同一式中时，带*号者为内力，不带*号者为荷载，M^*与M含义相同。

6．图1-4a）所示单跨一次超静定曲梁，在A端作用弯矩M，如图1-5a）所示，求截面内力。

去掉B端转动约束，代之以扭矩 x_T，得基本结构如图 1-5b)。基本结构在$x_T=1$作用下的内力

$$M=0,\quad T=1,$$

$$Q=-\frac{1}{R}$$

见公式（1-11）。基本结构在M作用下（如图1-5b)

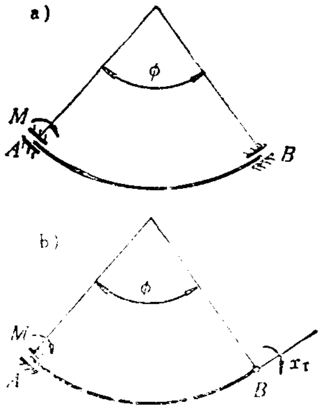

图 1-5

$$\sum M_{A0}=0$$

$$N_B\cdot R\sin\varphi-M=0$$

$$N_B=\frac{M}{R\sin\varphi}\qquad(1\text{-}16a)$$

$$N_A=-\frac{M}{R\sin\varphi}\qquad(1\text{-}16b)$$

$$\sum M_{过A切线}=0$$

$$T_A=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\qquad(1\text{-}17a)$$

$$T_B=0\qquad(1\text{-}17b)$$

基本结构在M作用下的截面内力

$$M^*=N_AR\sin x\varphi+T_A\sin x\varphi+M\cos x\varphi$$

$$=\frac{\sin(1-x)\varphi}{R\sin\varphi}M\qquad(1\text{-}18a)$$

$$T=T_A\cos\varphi-N_AR(1-\cos x\varphi)-M\sin x\phi$$

$$=\frac{1-\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}M\qquad(1\text{-}18b)$$

$$Q=N_A=-\frac{M}{R\sin\varphi}\qquad(1\text{-}18c)$$

建立力法方程

$$\delta_{11}x_T+\Delta_{1M}=0$$

计算系数

$$\delta_{11}=\frac{R\varphi}{GJ}$$

$$\Delta_{1M}=\int_S\frac{\overline{M}_1M_M}{EI}ds+\int_S\frac{\overline{T}_1T_M}{GJ}ds\text{（略去剪力项）}$$

式中：$\overline{M}_1$、$\overline{T}_1$用公式(1-11b)及(1-11c)

M_M、T_M用公式(1-18a)及(1-18b)

$$\therefore\qquad \Delta_{1M}=\frac{RM}{GJ}\int_0^{\varphi}\frac{1-\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}dx\varphi$$

$$=\frac{RM}{GJ}\cdot\frac{\varphi-\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

$$x_T=-\frac{\Delta_{1M}}{\delta_{11}}=\frac{\sin\varphi-\varphi}{\varphi\sin\varphi}M$$

图1-4a）所示结构在A端作用M时的截面内力：

$$\begin{cases} M^*=\dfrac{\sin(1-x)\varphi}{\sin\varphi}M & (1\text{-}19a)\\[2ex] T=\left[\dfrac{1}{\varphi}-\dfrac{\cos(1-x)\varphi}{\sin\varphi}\right]M & (1\text{-}19b)\\[2ex] Q=-\dfrac{M}{R\varphi} & (1\text{-}19c)\end{cases}$$

7．图1-4a）所示单跨一次超静定曲梁在B端作用M时（如图1-6所示）的截面内力

$$\begin{cases} M^*=\dfrac{\sin x\varphi}{\sin\varphi}M & (1\text{-}20a)\\[2ex] T=\left[\dfrac{\cos x\varphi}{\sin\varphi}-\dfrac{1}{\varphi}\right]M & (1\text{-}20b)\\[2ex] Q=\dfrac{1}{R\varphi}M & (1\text{-}20c)\end{cases}$$

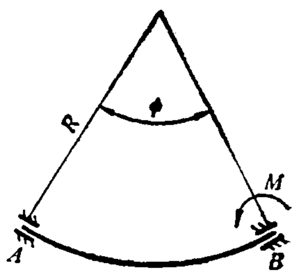

图 1-6

三、三跨等截面A型连续曲梁中支点处弯矩影响线计算公式

单跨一次超静定曲梁的截面内力知道后，前面示出的五元一次联立方程组就得到了简化。这时，三跨连续曲梁和直梁的赘余未知力个数相等，力法方程类似。如图1-7b)取基本结构。建立力法方程：

$$\begin{cases}\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\Delta_1=0\\ \delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\Delta_2=0\end{cases}$$

1. 计算形常数

$$\delta_{11}=\sum\left(\int_S\frac{\overline{M}_1^2}{EI}ds+\int_S\frac{\overline{T}_1^2}{GJ}ds\right)\text{（略去剪力项）}$$

式中：EI、GJ为常数。

$\overline{M}_1$及$\overline{T}_1$为$x_1=1$时图1-7b）所示基本结构的截面内力。AB跨用公式（1-20），ϕ用ϕ_1代，并且，令$M=1$；BC跨用公式（1-19），ϕ用ϕ_2代，同样令$M=1$。

$$\delta_{11}=\overbrace{\int_0^{\varphi_1}\frac{R}{EI}\left[\frac{\sin x\varphi_1}{\sin\varphi_1}\right]^2 dx\varphi_1+\int_0^{\varphi_1}\frac{R}{GJ}\left[\frac{\cos x\varphi_1}{\sin\varphi_1}-\frac{1}{\varphi_1}\right]^2 dx\varphi_1}^{AB跨}$$

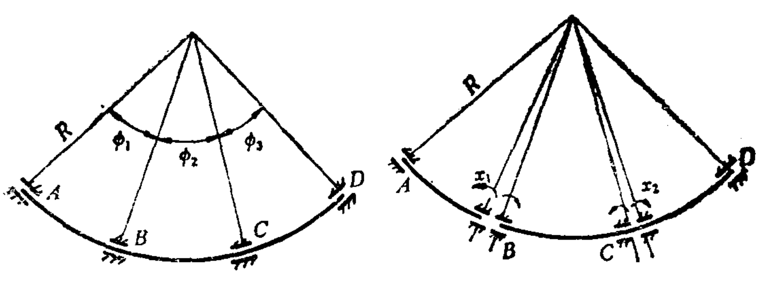

图 1-7

$$+\overbrace{\int_0^{\varphi_2}\frac{R}{EI}\left[\frac{\sin(1-x)\varphi_2}{\sin\varphi_2{}^2}\right]^2 dx\varphi_2+\int_0^{\varphi_2}\frac{R}{GJ}\left[\frac{1}{\varphi_2}-\frac{\cos(1-x)\varphi_2}{\sin\varphi_2}\right]^2 dx\varphi_2}^{BC跨}$$

$$=\frac{R}{EI\sin^2\varphi_1}\left[\frac{1}{2}\phi_1-\frac{1}{4}\sin2\varphi_1\right]+\frac{R}{GJ}\left\{\frac{1}{\sin^2\varphi_1}\left[\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\sin2\varphi_1}{4}\right]-\frac{2\sin\varphi_1}{\varphi_1\sin\varphi_1}+\frac{\phi_1}{\varphi_1{}^2}\right\}+\frac{R}{EJ\sin^2\varphi_2}\left[\frac{\varphi_2}{2}-\frac{\sin2\varphi_2}{4}\right]+\frac{R}{GJ}\left\{\frac{\varphi_2}{\varphi_2{}^2}-\frac{2\sin\varphi_2}{\varphi_2\sin\varphi_2}+\frac{1}{\sin^2\varphi_2}\left[\frac{\varphi_2}{2}+\frac{\sin2\varphi_2}{4}\right]\right\}$$

$$=\frac{R}{EI}\left[\frac{\phi_1}{2\sin^2\phi_1}-\frac{\operatorname{ctg}\phi_1}{2}+\left(\frac{\phi_2}{2\sin^2\phi_2}-\frac{\operatorname{ctg}\phi_2}{2}\right)\right]+\frac{R}{GJ}\left[\left(\frac{\phi_1}{2\sin^2\phi_1}+\frac{\operatorname{ctg}\phi_1}{2}-\frac{1}{\phi_1}\right)+\left(\frac{\phi_2}{2\sin^2\phi_2}+\frac{\operatorname{ctg}\phi_2}{2}-\frac{1}{\phi_2}\right)\right] \qquad (1\text{-}21a)$$

$$\delta_{22}=\sum\left(\int_S\frac{\overline{M}_2{}^2}{EI}ds+\int_S\frac{\overline{T}_2{}^2}{GJ}ds\right) \qquad （略去剪力项）$$

式中：EI、GJ为常数。

$\overline{M}_2$及$\overline{T}_2$ 为$x_2=1$作用下图1-7b）所示基本结构的截面内力。BC跨用公式(1-20)，ϕ用ϕ_2代，令$M=1$；CD跨用公

式（1-19），ϕ代ϕ_3，也令$M=1$。

$$
\begin{aligned}
\delta_{22} = {} & \overbrace{\int_0^{\varphi_2}\frac{R}{EI}\left(\frac{\sin x\varphi_2}{\sin\varphi_2}\right)^2 dx\varphi_2 + \int_0^{\varphi_2}\frac{R}{GJ}\Big[\frac{\cos x\varphi_2}{\sin\varphi_2}}^{BC跨} \\
& -\frac{1}{\phi_2}\Big]^2 dx\varphi_2 + \overbrace{\int_0^{\varphi_3}\frac{R}{EI}\Big[\frac{\sin(1-x)\varphi_3}{\sin\varphi_3}\Big]^2 dx\varphi_3}^{CD跨} \\
& + \int_0^{\varphi_3}\frac{R}{GJ}\Big\{\frac{1}{\varphi_3} - \frac{\cos(1-x)\varphi_3}{\sin\varphi_3}\Big]^2 dx\varphi_3 \\
= {} & \frac{R}{EI\sin^2\varphi_2}\Big[\frac{\varphi_2}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi_2\Big] + \frac{R}{GJ}\Big\{\frac{1}{\sin^2\phi_2}\Big[\frac{\varphi_2}{2} \\
& + \frac{\sin 2\phi_2}{4}\Big] - \frac{2\sin\phi_2}{\phi_2\sin\varphi_2} + \frac{\varphi_2}{\varphi_2^{\,2}}\Big\} + \frac{R}{EI\sin^2\phi_3}\Big[\frac{\varphi_3}{2} \\
& - \frac{\sin 2\phi_3}{4}\Big] + \frac{R}{GJ}\Big\{\frac{\phi_3}{\varphi_3^{\,2}} - \frac{2\sin\varphi_3}{\varphi_3\sin\varphi_3} + \frac{1}{\sin^2\varphi_3}\Big[\frac{\phi_3}{2} \\
& + \frac{\sin^2\varphi_3}{4}\Big]\Big\} \\
= {} & \frac{R}{EI}\Big[\Big(\frac{\phi_2}{2\sin^2\phi_2} - \frac{\mathrm{ctg}\,\phi_2}{2}\Big) + \Big(\frac{\phi_3}{2\sin^2\varphi_3} - \frac{\mathrm{ctg}\,\phi_3}{2}\Big)\Big] \\
& + \frac{R}{GJ}\Big[\Big(\frac{\phi_2}{2\sin^2\phi_2} + \frac{\mathrm{ctg}\,\phi_2}{2} - \frac{1}{\phi_2}\Big) + \Big(\frac{\phi_3}{2\sin^2\varphi_3} \\
& + \frac{\mathrm{ctg}\,\phi_3}{2} - \frac{1}{\phi_3}\Big)\Big] \qquad (1\text{-}21b)
\end{aligned}
$$

$$
\delta_{12} = \delta_{21} = \int_s \frac{\overline{M}_1\cdot\overline{M}_2}{EI}ds + \int_s \frac{\overline{T}_1\cdot\overline{T}_2}{GJ}ds\text{（略去剪力项）}
$$

式中：$\overline{M}_1$、$\overline{T}_1$为图1-7b）所示的基本结构在$x_1=1$作用下的

截面内力，用公式(1-19)；$\overline{M}_2$、$\overline{T}_2$为图1-7b）所示基本结构在$x_2=1$作用下的截面内力，用公式(1-20)。不论公式(1-19)、(1-20)均令$M=1, \phi=\phi_2$。另外，从图1-7b)看出，x_1、x_2所引起的基本结构内力，仅在BC跨有乘积。

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int_0^{\varphi_2}\frac{R}{EI}\frac{\sin(1-x)\phi_2}{\sin\phi_2}\frac{\sin x\phi_2}{\sin\phi_2}dx\phi_2$$

$$+\int_0^{\phi_2}\frac{R}{GJ}\left[\frac{1}{\phi_2}-\frac{\cos(1-x)\phi_2}{\sin\phi_2}\right]\left[\frac{\cos x\phi_2}{\sin\phi_2}-\frac{1}{\varphi_2}\right]dx\phi_2$$

$$=\frac{R}{EI\sin^2\phi_2}\left\{-\frac{\sin\phi_2}{4}(\cos2\phi_2-1)-\cos\varphi_2\left(\frac{\phi_2}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\sin2\phi_2\right)\right\}+\frac{R}{GJ}\left\{\frac{\sin\phi_2}{\phi_2\sin\phi_2}-\frac{1}{\phi_2}-\frac{1}{\sin^2\phi_2}\right.$$

$$\cdot\left[\cos\phi_2\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{1}{4}\sin2\phi_2\right)-\frac{\sin\phi_2}{4}(\cos2\phi_2-1)\right]$$

$$\left.+\frac{1}{\phi_2\sin\phi_2}[\cos\phi_2\sin\phi_2-\sin\phi_2(\cos\phi_2-1)]\right\}$$

$$=\frac{R}{EI}\frac{1}{2\sin^2\phi_2}[\sin\phi_2-\phi_2\cos\phi_2]+\frac{R}{GJ}\left[\frac{1}{\phi_2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sin^2\varphi_2}(\sin\phi_2+\phi_2\cos\phi_2)\right] \tag{1-21c}$$

2. 计算载常数

(Ⅰ)AB跨作用有单位荷载。

①$P=1$　（见图1-8）

$$\Delta_{1P}=\int_S\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}ds+\int_S\frac{\overline{T}_1T_P}{GJ}ds$$

（略去剪力项）

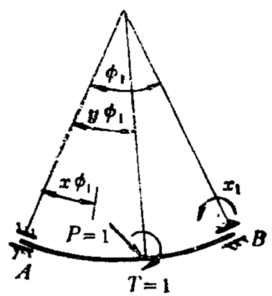

图 1-8

式中：$\overline{M}_1$、$\overline{T}_1$用公式(1-20) M_P、T_P