

# 现代 机械 设备 设计 手册

3

● 非标准机械设备设计

机械工业出版社

# 第16篇 物流系统及其设备

主 编 胡宗武

编 者 石永铎(第1章,第2章,第3章)

李士瀛(第4章)

虞和谦(第5章)



# 第1章 物流系统规划与设计

## 1 概述

对一个物流系统应用系统工程的基本思想,从物流系统整体效益出发采用工程技术的优化方法进行组织管理、规划设计的技术,叫做物流技术。也就是说,物流技术是各种流通物资从供应者转移给需要者的过程中,实现各种流通形态的停顿与流动功能所需要的材料、机械、设施等硬技术和计划、运用、评价等软技术的总和。

### 1.1 基本特点

#### 1.1.1 全局性(系统性、整体性)

物流系统是由很多部分组成的,同时,系统的目的性或特定功能也往往由若干目标或指标形成,所以不能单从一个部分或某一个指标来思考和解决问题,而是要从系统的整体出发,将各组成部分按预期目标有机地组合,并相互配合,探索出一个最好或较好的整体方案。

#### 1.1.2 关联性

由于系统各组成部分本身及它们相互之间都有着联系和制约的关系,如系统的输出与输入的关系,系统所有组成部分中的参数变量与系统特定功能之间的关系,都表示着系统的相互作用和相互依赖关系。在研究物流系统时,必须设法描述这种相互关系,而且要用明确的方式(如用定量或者图、表等方式)加以表示。

#### 1.1.3 最优性

规划、设计和使用物流系统的最终目的是要它完成特定的功能,并且希望完成功能的效果最好,也就是说,以最少的人力、物力和财力消耗,在最短的时间里获得最大效益。这种统筹安排,选择最优的过程,就是物流系统工程最优性的思想。

#### 1.1.4 综合性

由于物流系统涉及面广,不但有技术因素,还有经济因素、社会因素。所以只靠一两门学科知识是不够的,需要诸如数学、运筹学、经济学、机械设计、计算机技术、控制论及心理学等各方面的科学知识,要把这些学科横向交叉和综合在一起来规划、设计和研究物流系统工程。

#### 1.1.5 实践性

物流系统工程是非常着重实用的,如果离开具体的项目和工程,也就谈不上物流系统工程。

### 1.2 基本要素

在物流系统工程中,物资、设备、资金以及信息、人和他的决策是六个基本要素。

上面这六个要素在系统工程中的全部活动可以归纳为三种流,即人流、物流和信息流。广义地讲,社会上一切有形和无形的物质流动都叫物流,不过通常讲的物流主要是指工厂、企事业的物料搬运系统。它是建立在现代科学技术成就上的物流技术,包括整个生产、流通领域中的装卸、搬运、生产、装配、储存和包装等过程,其活动范围是从物料供应地点开始运进工厂和企事业,经过加工和制作、装配和包装以及中间各环节的储存、直到发运出工厂和企事业,送到用户那里,并在全部过程的所有环节上,做到按规定时间、数量、保质保量地送到规定的地点。

物流系统是离不开起重、装卸、运输等机械设备的,离开这些机械设备,物流系统也就流通不起来,也不成为物流系统。为此,不仅要注意单机的选择,更重要的是使整个系统各环节良好衔接并使机械设备合理匹配,甚至对非标准的物流机械进行设计,从而达到整体最优的目的。

## 2 规划与设计

### 2.1 影响因素

#### 2.1.1 地点

地形——平原、山地等;地质——土层、岩层等;交通——公路、港区、铁路等;市场——原料产地、销路用户等;动力能源——煤、石油、水、电等;水文——水源同地质的关系等;行政机关……。

#### 2.1.2 建筑物

楼房或多层车间就要考虑水平与垂直运输机械;大厅或车间一般考虑采用桥式和单梁起重机以及工业搬运车辆、散料运输机械等。

#### 2.1.3 物流线路

一般的物流线路如图 16.1-1 所示。

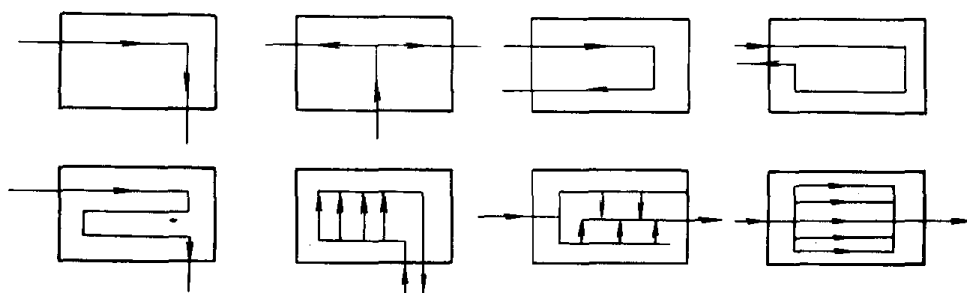


图 16.1-1 物流线路

2.1.4 物料品种

物料主要分为散、件、液、气四种。散货分为块状、粉状和粒状；件货分为箱、袋、桶、捆等；液体和气体分为瓶装、罐装或通过管道输送。

2.1.5 物料的批量

在生产和流通过程中，单件及多品种物料的生产 and 流通采用通用机械设备，而大批量及单品种物料的生产 and 流通宜采用专用机械设备，处于中间状况者，可采用通用和专用两种机械设备。

2.2 基本原则

2.2.1 提高物料搬运的活性原则

无论是在生产系统还是流通系统中，总希望物料搬运方便、节省搬运时间、提高流通效率。影响物

料搬运方便性和流通效率的主要因素是物料的存放状态。这种存放状态将决定下一道作业的难易程度（或称机动性），一般把衡量物料搬运方便性的存放状态称为该物料获得的“活性”。不同的“活性”用指数来表达，称为“活性指数”。活性指数从0→4，分为五个等级，如表16.1-1所示。

一般平均活性指数小于2的主要是手工操作；大于2而小于3的是部分手工搬运、部分手推车和机械搬运；大于3而小于4的基本上是无手工搬运，大于4的主要是机械化搬运。由此可见，在搬运系统中，物料的活性指数越低，其机械化搬运水平就越低，搬运的效率也就越低。因此，合理地改善物料的存放状态，即提高物料的活性指数是提高搬运效率的必要条件。

表 16.1-1 物料因存放状态不同的活性指数

序号	物料的支承状态	简图	活性指数	物料搬运的方便性
1	物料放置在地面上		0	物料移动时，需要逐个用人力搬运，或集中到运输工具中才能搬运，最不方便
2	物料放置在容器中		1	可用人工一次搬运，一搬不便于机械叉取作业（采用特殊属具例外）
3	物料放在垫起的容器中		2	可以方便地采用带货叉的搬运机械搬运
4	物料由带轮的器具支承		3	毋需借助于另外的机械就可以方便地搬运
5	物料放置在移动着的运输设备上		4	物料已经处于移动状态，所以活性指数最高

2.2.2 集装单元化原则

通常，从发货单位到收货单位的储运作业要经过取货、装货、运输、储存等基本作业，并伴随着质量检查、点数等作业内容。如果在上述作业中每次只搬运一件或少量的物品，作业的全过程将十分繁杂，并存在大量的重复搬运，作业效率必然很低。如果把

多件物品汇集成一个重量或容积单位，使用机械来进行储运作业，就能提高搬运效率，并带来一系列的其他好处。我们把一定量的物品或材料，整体地集装为一个便于储运的单元，这个单元利用集装的器具（如托盘、集装箱）或组合包装、或各种属具将货物集装成一个容积或重量单元，再进行机械化储运的思

想,称为集装单元化原则。

### 2.2.3 减少重复搬运的原则

搬运一次需要一定的设备和费用。因为重复搬运不仅增加机械设备和费用,还增加流通环节,甚至造成流通混乱,所以需要加强计划管理工作,合理地制定贮运工艺路线,减少重复搬运。

### 2.2.4 利用重力的原则

在物料搬运的过程中,可以利用坡度,溜板,溜管等通过重力的作用使物料很容易地搬运和流动,如高架仓库的重力式货架,货架每格的进口和出口有一定的高度差,形成一定的坡度,货物从货架进口侧进去靠重力从另一侧出去。此外还可利用气垫、水垫来减少物品在搬运和流动中的摩擦,只要有一定坡度,靠重力作用就更容易流动。同样道理,浮力也会给搬运带来很大方便。

### 2.2.5 机械化原则

随着科学技术的发展,在物流系统中,起重、装卸、运输等新机种、新型号机械不断出现,以各种机械代替人力的各种操作来完成装卸搬运作业。机械化可以大大地改善劳动条件,减轻劳动强度,增强安全作业,提高作业效率和效益。对于作业量很大,特别是重大件货物,起动机频繁、重复、节拍短促而有规律的作业,适宜于采用机械化作业。

采用机械化作业,不能只顾物流系统中某个环节机械作业效率最好,而是要考虑各个环节机械作业的合理匹配,使整个物流系统最优。

采用机械化作业,人仍然是决定因素,不断提高职工各方面的素质,是改进装卸、搬运作业的关键。机械化包括机械、设备、吊索辅具和集装用具四个方面。要发挥机械化的效用,还必须有与其相配套的设施(作业场、码头、库场、装卸线、站台……)来保证,货物的包装也应符合运输要求,车、船、库要为提高装卸搬运效率创造有利条件。作业方法、信息和管理等软因素是机械设备等硬因素能否发挥作用的关键。机械与设施的维修保养和人员的继续教育等保障系统,是机械化作业系统长期稳定发挥作用的保证。

### 2.2.6 自动化原则

自动化主要适用于那些要求作业效率高、精度高,或者影响工作人员的健康、有危险的作业场合。

自动导向搬运车是自动化起重运输机械的一个典型例子。它的工作原理简图如图 16.1-2 所示。

根据搬运工艺的要求,事先在搬运路线的地面上画出一条白漆线,或在地面下 3~5cm 处埋设电线并通以高频电信号。这些线路标志自动导向搬运

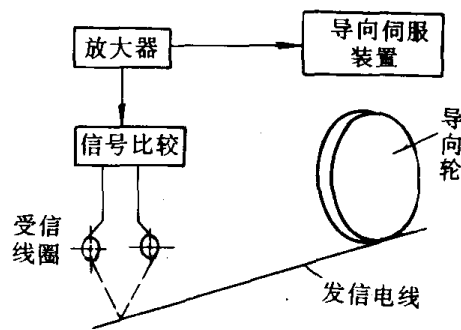


图 16.1-2 自动导向搬运车工作原理简图

车所要经过的路线。自动导向搬运车上至少装有一对探测器,对于白漆线安装的是两个光电探测器。搬运车按规定线路正确运行时,两个探测器等距跨在线路左右两侧。此时,光电探测器发出的光电信号,经过白漆道反射回来后对两个探测器是相同的。同样,埋线的电磁场使两个电磁感应的探测器感应到同样的信号。如搬运车偏离线路,则两个探测器得到的信号产生差别,信号通过差分比较、放大、然后输出一个信号去操纵导向车轮的电动机,使车轮相应转动,搬运车便回到正确位置上并沿着导向线运行。自动导向搬运车除采用上述光电导向和电磁导向外,还可采用其他导向技术,例如,激光红外线导向等。

### 2.2.7 减少空载原则

尽量减少人员和设备的空载运输和减少作业点上的物料储存。一般用空载系数来表示一个搬运系统空载运输的总体情况

$$\text{空载系数} = \frac{\text{人移动距离(或次数)} - \text{物料移动距离(或次数)}}{\text{物料移动距离(或次数)}}$$

其中,人的移动距离包括带物和不带物两种情况。

### 2.2.8 减轻体力搬运原则

从人机观点看,有些地方还需要人搬运,但要尽量减少人力搬运,减少人员步行距离,减少弯腰的搬运作业。例如,最简单的可用手推车减少人力搬运;可用升降台减少或不用弯腰进行搬运作业。应尽量减少搬运、装卸的距离和次数,减少作业人员上下作业、弯腰的次数和人力码垛的范围和数量。

### 2.2.9 工艺直线布置的原则

物流走直线,减少转弯和迂回,尽可能靠近作业接收区,特别是重工件应优先靠近接收区。

### 2.2.10 在流动中进行作业的原则

物流在流动的同时,又进行各种作业,即将储运工艺流程与加工制作、装配以及检验和包装等一些辅助作业结合在一起同时进行,如各种流水生产线、汽车装配线等。

### 2.2.11 利用空间的原则

利用有效的空间进行物流作业。如架空布置的悬挂输送机、天桥、高架(立体)仓库、筒仓等。使用托盘和集装箱进行堆垛,安放货架进行高层堆放,向空中发展,这样可减少占地面积,提高土地利用率。

#### 2.2.12 保护运件的原则

物料在搬运和装卸的过程中要避免扔、甩,防止工件受磕、碰、划、擦等损伤,采用把物料、工件等装入托盘、托架、箱以及进行包装等措施进行搬运。还要考虑取物装置的安全、可靠,不使货物突然掉下,不能使货物损伤。

#### 2.2.13 安全的原则

重视物流作业中人的安全是首要的。同时还要重视工位器具、设备、设施、物品的安全和完善,保持作业区周围环境的整洁、通畅,考虑采用各种安全防护设备、工具和设施,消除物料到处乱堆、乱放和无运输包装的现象。同时还必须注意防火、防潮、防霉、防腐、防风、防雨、防雪、防爆、防触电、防放射等。人流、车流和物流应尽可能分道运行。

#### 2.2.14 标准化原则

使搬运、装卸和储存作业统一化,应使运件的外形尺寸标准化。尽可能采用标准的设备、器具和设施,降低成本,提高利用率,这样也便于制造、使用、维修和管理。

以上这些原则的应用,还必须从实际情况出发,以达到整个物流系统的流通效率高、效益好、投资少、建设快、改善劳动条件、减轻劳动强度、少占土地、使用和维修与管理方便且便于发展的最佳目的。

### 2.3 物流合理化

#### 2.3.1 计划化

计划化是实现物流合理化的首要条件,也是提高物流服务质量的重要标志。应根据购销业务,及时、合理地制定物流计划,妥善安排货物储存和运输。按照顾客要求的时间、地点,有计划地如期把原材料运到工厂和企业,把商品运到商店或消费者手中,使顾客满意,提高物流社会效益。

#### 2.3.2 直达化

物流企业在组织货物调运时,应尽量减少中间环节,特别是物流过程中的运输、储存环节,把货物由生产厂(地)直接运送到销地或用户。这样既可以缩短货物运送时间,又可以降低物流费用。

#### 2.3.3 短距化

在组织物流活动时,对一般普通的大宗物资或商品,应采用就近、分片供应和调运的办法,使物流的里程最近,以节省运输吨公里数,降低物流费用。

#### 2.3.4 钟摆(往复)化

按物流合理化要求,在组织货物调运时,应强调往复、回程货源,避免回程空载,达到运输钟摆化,减少运力浪费,节约运输费用。

#### 2.3.5 集中化

集中化也称大量化,就是物流企业在组织货物配送时,凡是发往同一地区,同一方向的货物,在计划化的基础上,要集零为整,变小量为大量,采取混装的形式,进行集中运送,以提高运输工具的装载效率。

#### 2.3.6 社会化

物流企业社会化是实现物流合理化的一个重要内容。打破部门、地区的限制,面向社会服务,加强横向经济联系,谋求全社会整体的物流合理化,提高综合经济效益。

#### 2.3.7 服务(标准)化

物流企业属于第三产业的范畴,它既有技术,又有经营、服务。要提高工作人员素质,制订服务规范,为社会提供高标准的服务。所以,提高服务质量,并使服务标准化,是实现物流合理化的一项重要内容。

### 2.4 工作程序

#### 2.4.1 确定目标

从整体出发,系统地提出问题,并确定需要达到的总目标和衡量目标的标准。根据目标进行合理的选址和科学的预测,来验证选择的地址是否合适和确定的总目标是否合理。确定目标是物流系统工程的首要问题。

#### 2.4.2 功能分析

根据任务和要求,对整个系统及各个分系统的功能,以及它们的相互关系进行分析,在选址的基础上,对系统、库场、设施、道路、流通途径等进行初步布置。

#### 2.4.3 收集资料

通过对各种有关情报资料的收集和分析,整理出必要的资料,提供出必要的数据库,给定合理的假设和条件,分清可控和不可控因素,确定相应的约束条件,使所要分析的问题既能抓住主流,又得到简化,并能提出初步的设计对策。

#### 2.4.4 指标分配

在对上述各方面问题充分调研的基础上,确定各个分系统的要求、各项指标以及机械设备性能要求、数量和配置。

#### 2.4.5 方案研究

为了完成预定的目标和各个分系统的指标要

求, 还要考虑机械化系统乃至自动化系统是否合理可行, 需要制定出各种可能实现的方案。提出的方案不妨多一点, 以便集思广益, 反复比较。

2.4.6 建立模型

把可行的方案建立在实践和理论上都能处理的模型上, 找出能反映问题本质因素的数学方程和逻辑框图, 或者建立实物和类比等模型。这一点是系统工程方法的核心和难点, 模型建立的好坏, 直接影响后续程序的质量。

2.4.7 优化计算

根据具体情况分析系统的特点, 研究采用的计算方法。通过软件程序在计算机上进行方案优化, 或者通过实物和类比等模型进行实验和分析, 再提出可供选择的若干方案, 并对模型进行必要的分析、计算, 求出最优解。

2.4.8 分析评价

根据目标评价标准, 对各方案试验、计算分析的结果和实际情况进行综合比较, 作出客观的评价和鉴定, 提供给领导和决策部门择优, 选择出最佳方案。

2.4.9 系统实施

如果决策者对所选择的最佳方案感到满意, 则由专业部门付诸系统设计、试验与实施运行。如果决策者对所选方案提出不满意的意见, 则要立即重新设计或进行修改调整, 重新计算分析, 再选出最佳方案, 直到满意后整个系统才能进行设计、试验与实施运行。图 16.1-3 给出了物流系统的规划与设计程序框图。

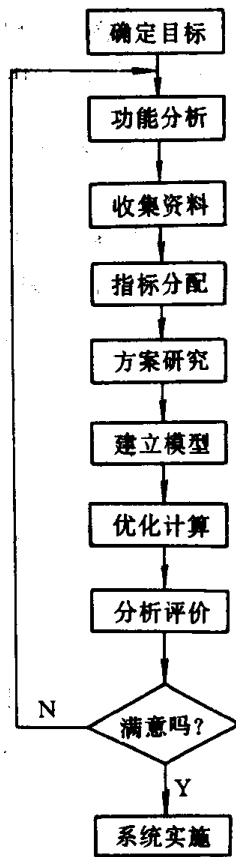


图 16.1-3 物流系统规划与设计程序框图

3 模型与预测

3.1 系统模型

在物流系统的设计中, 为了对众多的备选方案进行分析比较, 往往要建立一定的模型。一般情况下, 模型总是要比实体系统简洁得多, 它所表达的因素也只是实体中因素的主要部分。模型比现实系统

容易操作或处理, 尤其一些参数值的改变在模型中操作或处理比现实问题中要容易。有些因素在现实中要很长时间才能看出变化情况, 但用模型研究时可以很快看出变化规律, 从而迅速地抓住其本质特征, 即把这些方案与系统评价目标联系起来, 找出目标函数与各变量以及约束因素间的基本规律。这一抽象化过程就是建立模型的过程。系统模型一般分为以下几种。

3.1.1 实体模型

按物体实物的结构放大或缩小, 它能较好地反映物体的某些特征, 表达实体系统的主要结构和因素, 但不能搞得太复杂。否则就难以处理, 起不到模型的作用。主要缺点是不能表示超过三度空间的事物。

3.1.2 数学模型

用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式以及配有图表、图象等来描述客观事物的特征及其内在联系的模型称为数学模型。简单地说, 就是用数学公式表达一个系统的特性和抽象概念。

例如, 以  $Y=ax^b$  为基本表达式的幂函数模型, 它在一般工程及其管理中有着广泛的用途。其图形见图 16.1-4。

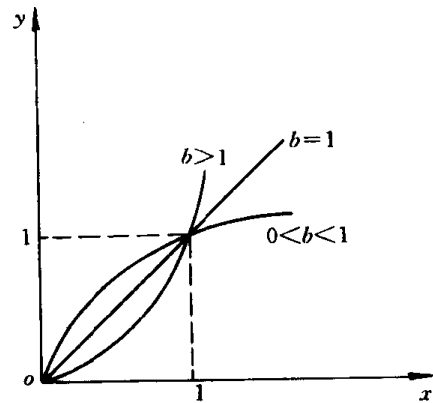


图 16.1-4  $Y=ax^b$  数学模型

3.1.3 类比模型

由于在物流系统中相当多的一部分问题难以建立数学模型, 但用类比模型就容易表达出事物的特征和内在联系, 以便在不同假设情况下进行实验分析。这种方法简单易懂、形象直观, 也可以作为建立数学模型前的粗略模型, 在工程上已得到普遍的应用。

(1) 顺序图 目前, 在企业中广泛采用的进度表是最简单的图形, 如图 16.1-5 所示。

(2) 点线图 点线图用来描述物流中各系统、各事项或各状态之间的关系。它不仅具有顺序性, 而且具有清晰的相互关联性。通常用圆圈表示系统、事



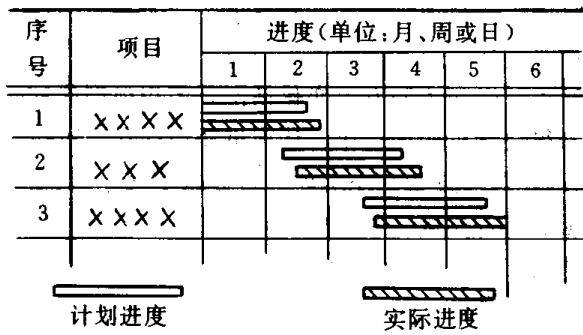


图 16.1-5 顺序图

项或状态,用线段表示两者之间的关联。当事项没有方向性时,线段不带箭头;当两者之间有不可逆的关系时,线段一端带有箭头。

点线图的绘制以清楚、醒目为宜,在排列上要尽量减少线段间的交叉,以便能直观地看出采取一个决策行为后会牵扯到哪些因素,为选择优化的方案提供一种方法。如图 16.1-6a 所示,显然  $s_2$ 、 $s_3$ 、 $s_4$ 、 $s_5$  都与  $s_1$  相关,而  $s_4$ 、 $s_5$  又分别与  $s_3$ 、 $s_2$  相关。为了观察方便起见,有时要抓住事项间最主要的依从关系,可以对此图形进行简化,如图 16.1-6b 所示,这就更清楚地表达了事物之间的基本关系。

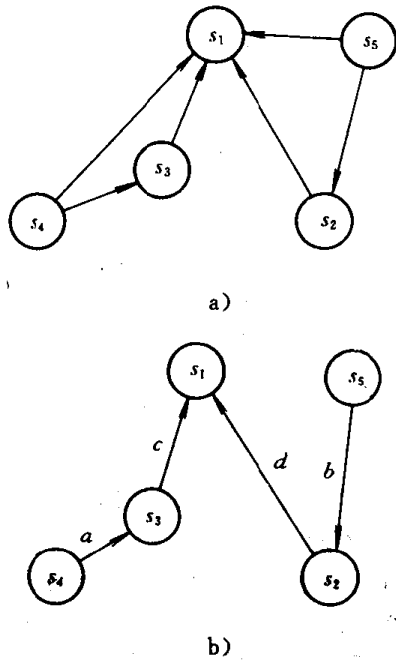


图 16.1-6 点线图

(箭头表示车间内工作流向)

有些事项相互间不仅存在着顺序性,而且还有一定的数量关系,此时可以把有关的数字标在线段上,见图 16.1-6b。

(3) 矩阵 在点线图中,当事项过多、相互关系过于复杂时,便失去了点线图的优点,这时可改用矩阵表示。其中用 1 表示事项相关; 0 表示无关, 0 通

常不需标出。为了表示方向性,规定表示相关的方法是从行到列。与图 16.1-6a 相对应的矩阵见图 16.1-7a;与图 16.1-6b 相对应的矩阵见图 16.1-7b。假设图 16.1-6a 没有方向性只有关联性,这时的矩阵只有用对角线的一半表示,称为三角阵,如图 16.1-8 所示。

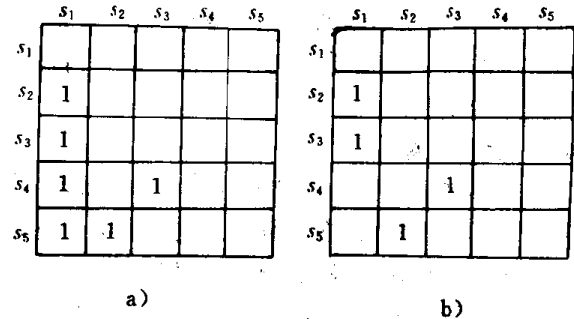


图 16.1-7 矩阵图

(4) 流程图 流程图用来描述系统的工作过程。它的特点是清晰、扼要。典型的流程图见图 16.1-9。

(5) 方框图 用于描述系统之间的任务关系, 图 16.1-8 三角阵图

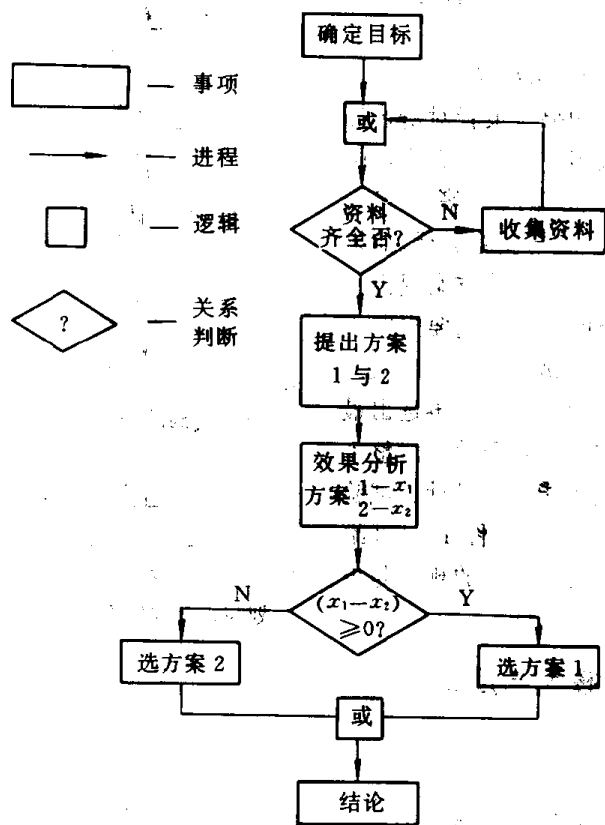


图 16.1-9 流程图

具有图文并茂的优点。图 16.1-10 所示为开环传递,如搬运系统又回到始点就为闭环传递。

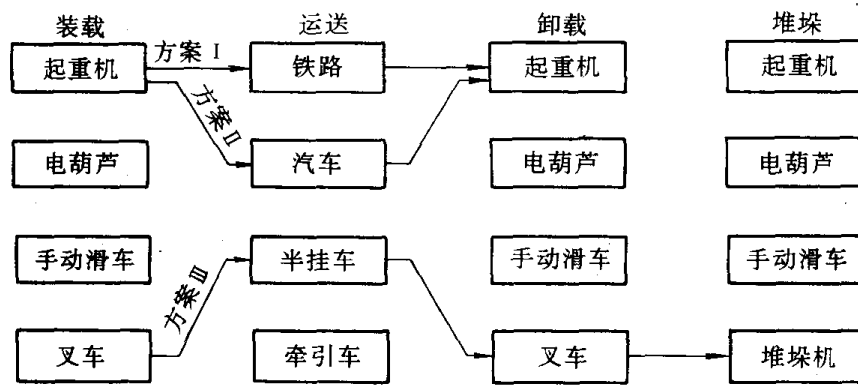


图 16.1-10 方框图

(6) 方块图 方块图与方框图有本质上的差别,前者的信息流是单向的,它在反馈控制系统中具有重要的作用。图 16.1-11 示出了投入-产出反馈控制模型。图中的方块表示输入输出的函数关系。对系统的数学模型要进行拉氏变换。在实践中,由于有些问题无法全部用数学模型描述,所以在系统工程中方块图的应用还受到一定限制。

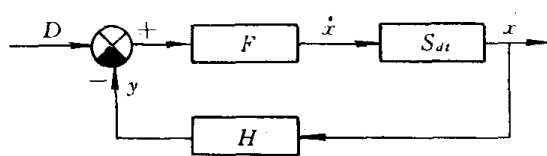


图 16.1-11 方块图

(7) 树形图 树形图可用来描述事项的从属关系,如图 16.1-12 所示。

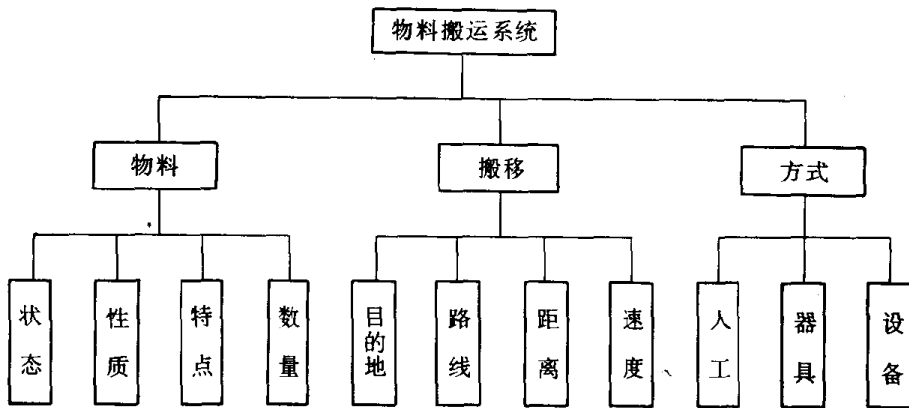


图 16.1-12 树形图

(8) 曲线图 在系统中,描述各种事件的曲线甚多,它们可能是根据实际统计纪录而得出的一组折线,可能是按计算数据而绘制的某种曲线,也可能是一条回归线或组合线等。

### 3.2 系统预测

预测可以提供未来的信息,为当前人们做出有利的决策提供依据。预测工作实际上是这样一个过程:从过去和现在的已知情况出发,利用一定的方法或技术探索或模拟不可知的、未出现的或复杂的中间过程,推断出未来的结果。物流系统的预测,就是对生产和流通领域的物资的规格、流向、流量、所占用的资金周转情况及供求规律进行调查研究,取得各种资料和信息,运用预测的方法和技术推测未来一定时间内物资的需求量、供应量以及场地面积、仓库容积、机械数量等,以便作出正确的决策和合理的投资。

预测工作的基本步骤和内容如下:

#### 3.2.1 确定预测目标

预测是为物流系统的决策服务的,所以要根据决策所提出的要求来确定预测目标。

#### 3.2.2 收集、处理资料

资料是进行决策的依据,应根据预测目标的具体要求,收集为预测所需要的各种资料,然后分析和判别资料的真实和可用程度,最后进行加工和整理。

#### 3.2.3 选择预测技术

目前,用于预测技术的方法很多,对于每个物流系统,都可用多种预测技术求得预测结果。实际工作中,主要是根据决策和设计规划对预测结果的要求,并结合开展预测工作的条件和环境,根据经济、方便、效果好的原则,合理选择预测技术。

#### 3.2.4 建立预测模型

预测模型是对预测对象发展规律的近似模拟。利用选定的预测技术确定或建立可用于预测的模

型, 然后进行计算和分析, 得出各种可能的结果。

### 3.2.5 评价模型

根据收集到的有关未来情况的资料, 对得到的预测模型及其可能的结果加以分析和研究, 评价其是否能够应用于对未来情况的预测。

### 3.2.6 利用模型预测

根据收集到的预测有关资料, 利用经过评价所确定的预测模型, 就可以计算或推测出预测对象发展的未来结果。

### 3.2.7 分析预测结果

得到预测结果之后, 都应对其加以分析和评价。通常是根据常识和经验, 检查、判断预测结果是否合理, 是否存在较大的偏差等, 以确定预测结果是否可信, 并找出一些办法对预测结果加以修正, 使之更接近于实际。此外, 在条件允许时, 可采用多种方法进行预测, 然后经过比较或综合, 确定出可信的预测结果。图 16.1-13 示出了预测的基本步骤。

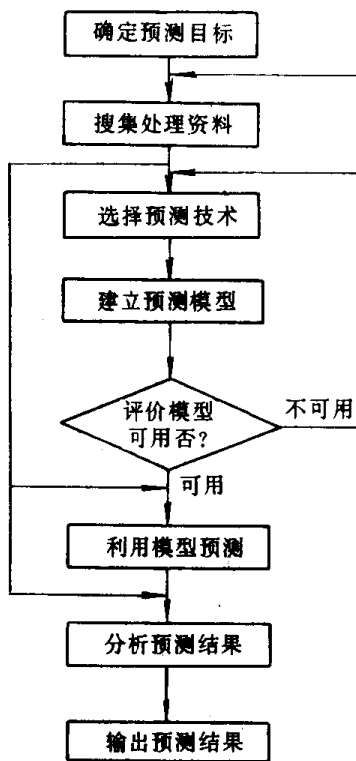


图 16.1-13 预测的基本步骤

由上述可以看出, 预测过程是一个资料、技术和分析的结合过程。资料是基础和出发点, 预测技术的应用是核心, 分析则贯穿了预测的全过程。

## 4 物流技术的应用

### 4.1 极值问题

在物料搬运系统及组织管理工作中, 常常要求

对物资进行统一分配、合理调运、正确规划、全面安排, 经常会遇到多种解决方案, 决策者就是要按照一定的目标选择最佳方案。

例如, 制定最佳的投资计划和生产计划, 选择最佳的生产布局和物料搬运系统流程, 要求工厂企业的劳动生产率最高, 资源的利用效率最高, 生产的积累或利润最大, 或要求生产费用最小, 材料消耗最少, 运输距离和费用最小等, 衡量最佳方案的标准可以从不同的角度出发, 以求得某项指标达到最大值或最小值。也就是说, 最佳方案的标准是可以有有限的资源获得最大效果, 或者用最小的消耗达到预定的目标等。下面通过例题介绍极值的求法。

**例 4-1** 某地邮局有 30 个邮箱、300 个邮包和 500 个邮袋, 需要从甲地运往乙地, 有两种邮车, A 型邮车每趟能运 9 个邮箱和 50 个邮袋, B 型邮车每趟可运 3 个邮箱、100 个邮包和 100 个邮袋。A 型车和 B 型车每一趟运费分别为 20 元和 15 元。要把全部邮件从甲地运到乙地, 试问 A 型和 B 型邮车各运几趟则总运费最小?

**解** 写出这个问题的数学模型, 设 A 型邮车运  $x_1$  趟, B 型邮车运  $x_2$  趟。

$$\left. \begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 &\geq 30 \\ 100x_2 &\geq 300 \\ 50x_1 + 100x_2 &\geq 500 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{约束条件}$$

$$C = 20x_1 + 15x_2 \text{ —— 目标函数}$$

一般情况下, 应用电子计算机就可以求解。由于是两个变量, 可以用简单、直观的特殊方法来求解, 称为图解法, 如图 16.1-14 所示。该图中横坐标表示 A 型邮车运行趟数  $x_1$ , 纵坐标表示 B 型邮车运行趟数  $x_2$ , 直线 1、2 和 3 分别表示约束条件 1、2 和 3 的边界, 它们的共同部分是画斜线的区域, 令目标函数为零, 可得到斜率, 画出来也是一条直线(图中虚线), 由于约束条件和目标函数都是直线, 所以称为

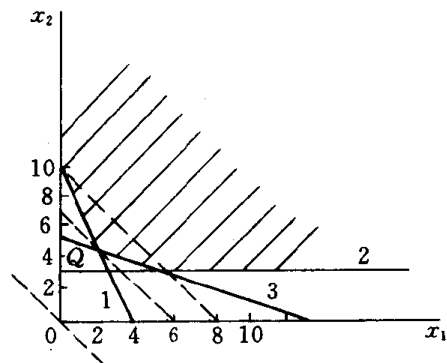


图 16.1-14 最小值图解法

线性。规划就是指完成一项任务,在这里是指安排邮车调度。这也是线性规划名称的由来。

图 16.1-14 中画斜线的部分表示在这个区域内和边界线上的  $x_1$  和  $x_2$  数值能满足所有三个约束条件,因而都可作为这个邮件运输问题的解,叫可行解。要求目标函数的最小值,可作一过原点的直线,把这一目标函数线平行移动与解域刚好相交于点 Q,这时就不能再移了,否则就进入阴影区,便不是最小值。所以 Q 点是最优解,它的位置是  $x_1=2, x_2=4$ , 即 A 型邮车运二趟, B 型邮车运四趟,这时的运费最低。

**例 4-2** 某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品,这些产品分别需要在 A、B、C、D 四种不同的设备上加工。按工艺规定,产品 I、II 在各设备上所需要的加工台时数分别为 2、1、4、0 和 2、2、0、4。已知各设备在计划期内有效台时数分别为 12、8、16 和 12(1 台设备工作 1 小时称为 1 台时)。该工厂每生产一件产品 I 可得利润 2 元,每生产一件产品 II 可得利润 3 元。问应如何安排生产计划,才能使获得的利润最多?

按例 4-1 的方法作出这个问题的数学模型

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 &\leq 16 \\ 4x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{约束条件}$$

$$C = 2x_1 + 3x_2 \text{——目标函数}$$

画出这些约束条件,如图 16.1-15 所示,这个问题与例 4-1 相反,是求最大值,阴影区是全部约束条件直线的共同部分与两个坐标轴所围成的区域(包括边界线)。令目标函数过原点的直线(虚线)从阴影区沿法线方向向右上方移动,一直移动到与阴影区的边界上的  $Q_2$  点相交。此时  $Q_2$  点就是最优解,它的位置是  $x_1=4, x_2=2$ 。说明该工厂的最优生产计划是:在计划期内生产产品 I 4 件,产品 II 2 件,可得

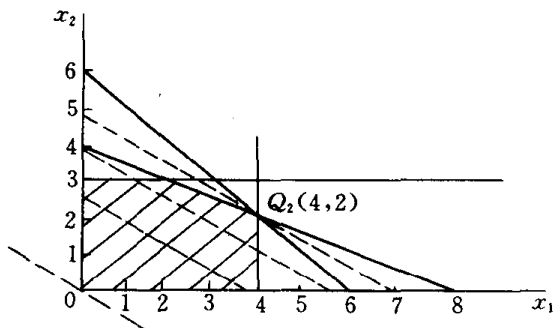


图 16.1-15 最大值图解法之一

到最大利润 14 元。

将上述的图解法总结如下:

第一步:建立数学模型。

第二步:绘约束条件不等式图,作出可行域。

第三步:画目标函数图。令目标函数为零,可得到斜率,有了斜率就可以作一过原点的直线,若绘出问题是求最大值,把目标函数平行移动到与解域最后相交的点,这点即为最优解;若绘出问题是求最小值,把目标函数平行移动到与解域相交的点,这点为最优解。

第四步:解联立方程组,即由两根直线所确定的最后(或最前)交点组成的方程组,可以得到问题的精确最优解。

若将例 4-2 的目标函数变为

$$C_{\max} = 2x_1 + 4x_2$$

则表示目标函数中以 C 为参数的这族平行直线(虚线)与约束条件  $x_1 + 2x_2 \leq 8$  的边界直线相平行。如图 16.1-16 所示,当目标函数过原点的直线从阴影区沿法线方向向右上方移动,与约束条件直线  $Q_2Q_3$  重合时,就不能再移动了。这表明线段  $Q_2Q_3$  上任意一点都使目标函数 C 取得相同的最大值。于是,该问题有无限多个最优解。

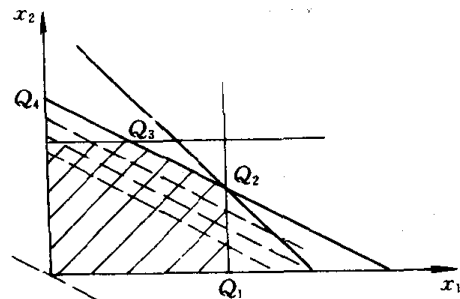


图 16.1-16 最大值图解法之二

如果有的问题是如下数学模型

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{约束条件}$$

$$C = x_1 + x_2 \text{——目标函数}$$

应用图解法见图 16.1-17,从图中可以看到,可行域无界。目标函数值的直线从阴影区沿法线方向向右上方移动,直到无穷大,即  $C \rightarrow \infty$ ,这种情况无最优解。在实际问题中,当数学模型有错误时,才可能发生这种情况。

通过图解法看到,线性规划问题的所有可行解构成的可行域一般是凸多边形(有时可行域是无界的)。若存在最优解,则一定是在可行域的某顶点上得到;若在两个顶点上同时得到最优解,则这两顶

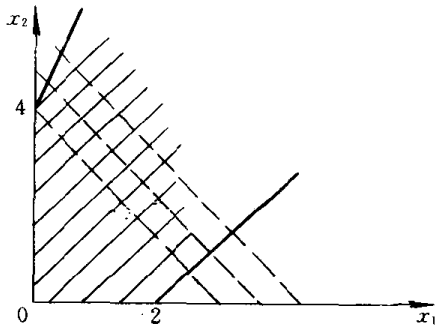


图 16.1-17 最大值图解法之三

点连线上的任一点都是最优解。若可行域无界，则可能发生最优解无界的情况，这时称最优解不存在，或无最优解。

图解法虽然有直观、简便等优点，但都只包含两个变量，而在变量多的时候，即高维的情况下，就无能为力了。实际工作中遇到的问题要复杂得多，有时包含  $n$  个、 $n+1$  个变量。可是只要作出数学模型，一般就可以用电子计算机求解。

#### 4.2 运输问题

在物流系统中，经常要碰到物资调拨和流通中

的运输问题，这类问题要解决的是，把某种物资从若干个产地调运到若干个销售地。根据现有的交通运输网，在每个产地的供应量和每个销售地的需求量已知的前提下，如何在许多可行的调运方案中，确定一个使总的运输费或运输量最少的方案。

运输问题可以用线性规划的一般方法和电子计算机求解。但根据它的约束方程组的系数矩阵具有特殊的结构，可得出一种更为简便的解法，称为表上作业法。

下面通过例子来具体说明表上作业法的计算步骤。

**例 4-3** 某公司下设三个粮食加工厂，每天的生产量分别为： $A_1$ —7t， $A_2$ —4t， $A_3$ —9t。该公司把这些产品分别运往四个地区的门市部销售，各地区每天的销售量为： $B_1$ —3t， $B_2$ —6t， $B_3$ —5t， $B_4$ —6t。已知从每个产地到各销售门市部粮食产品的运价如表 16.1-2 所示（在每个格的右上方），问该公司应如何调运才能在满足各门市部销售需要的情况下，使总的运费支出为最少。

说明表上作业法的计算步骤前，先画出这个问题的产销平衡和运价表，见表 16.1-2。

表 16.1-2 产销平衡及运价表

销地 \ 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产量(t)
$A_1$	3	11	3	10	7
$A_2$	1	9	2	8	4
$A_3$	7	4	10	5	9
销量(t)	3	6	5	6	

①                      ④                      ③                      ⑥

注：1. ①、②、③、④、⑤、⑥ 表示产或销平衡的顺序。  
2. 在右上角的数字单位为元/t。

##### 4.2.1 初始方案的确定——最小元素法

确定初始方案的方法很多，这里介绍最小元素法。它比较简单可行，而且可使迭代次数较少。这种方法的基本思想是“就近供应”，即从单位运价（表 16.1-2）中最小元素（运价）开始，尽量调度运输，直到求出最初方案为止。

第一步：从表 16.1-2 中找出最小运价为 1。这表示先将  $A_2$  的产品供应给  $B_1$ 。由于  $A_2$  每天生产 4t， $B_1$  每天需要 3t，即  $A_2$  每天生产的除满足  $B_1$  全

部需求外，还余 1t。所以在表 16.1-2 中 ( $A_2, B_1$ ) 的交叉格处填上 3，表中  $A_2$  调运 3t 产品给  $B_1$ 。此时将  $B_1$  这一列运价划去，表示  $B_1$  的需求已满足，不需要再继续调运。

第二步：从表 16.1-2 未划去的元素中找出最小的运价 2，即  $A_2$  每天剩余的产品应供应  $B_3$ 。 $B_3$  每天需要 5t， $A_2$  只能供应 1t，因此在表 16.1-2 ( $A_2, B_3$ ) 交叉处填写 1，划去表 16.1-2 中  $A_2$  这一行，表示  $A_2$  的产品已分配完。

第三步:再从表 16.1-2 未划去元素中找出最小元素为 3,这表示将  $A_1$  的产品先供应给  $B_3$ 。 $A_1$  每天生产 7t,  $B_3$  尚缺 4t,因此在  $(A_1, B_3)$  交叉格内填上 4。由于  $B_3$  的需求已满足,在表 16.1-2 中划去  $B_3$  列元素。

这样一步一步地进行下去,一直到表 16.1-2 上行和列都划去为止。最后,在表 16.1-2 中得到一个调运方案,这个调运方案的总运费为 86 元。

上面得出的调运方案能否作为表上作业法计算的初始方案呢?这要看这个方案是否满足下列两点要求:①表中填数字的格应有  $(m+n-1)$  个;②不存在以有数字的格为顶点构成的闭回路。

有时在中间过程,当选定最小元素后,该元素所在行的产量等于所在列的销量,则在表上填一个数时就要同时划去一行和一列,为了使初始方案中的数字仍为  $(m+n-1)$  个,需要在同时划去的行或列的任一空格位置添一个零。

这个例子中  $m=3$  个,  $n=4$  个,  $m+n-1=6$  个,即在初始方案中要求填写数字的格有 6 个。所谓存在有数字的格为顶点构成的闭回路,是指从调运方案的某一有数字格出发,沿水平或垂直方向前进,依次进行下去,最后要能找到一条回到原出发点的回路。否则,就不存在这种闭回路。

此例题根据表 16.1-2 分析和检验,符合上述两点要求。所以,此例题用最小元素法绘出的调运方案可以作为该表上作业法的初始方案。

#### 4.2.2 改进方案的方法之一——闭回路法

上述初始方案是否最优,还需要判断和检验。可以采用闭回路法。这种方法是在给定初始方案的空格处填上检验数,见表 16.1-3。此检验数的确定,是在包括一个空格、其余均由数字格为顶点组成的闭回路中(参见表 16.1-3 虚线组成的闭回路,在每格右上角都填上运价)进行的。

从空格运价减去经过第一个顶点的运价,再加

表 16.1-3 检验数表之一

产地 \ 销地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产量(t)
$A_1$	(1) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	(2) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	7
$A_2$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	(1) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	(-1) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>	4
$A_3$	(10) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	(12) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	9
销量(t)	3	6	5	6	

上经过第二个顶点的运价,再减去经过第三个顶点的运价……,如此加减交替进行直到闭回路最后一顶点为止。由此算出的数就是该空格的检验数。如表 16.1-3 括号所示,其一虚线组成闭回路,计算检验数为  $3-3+2-1=1$ ,把 1 填入空格  $(A_1, B_1)$  处,另一虚线所组成的闭回路计算检验数为  $7-1+2-3+10-5=10$ ,把 10 填入空格  $(A_3, B_1)$  处,为清楚起见,该空格的检验数 1 和 10 加上括号。表 16.1-3 中其余空格都按此方法计算填入检验数,所有检验数如果都是正值时,初始方案就是最优方案;如果检验数出现负值,说明方案需要进一步改进。就从检验数为负的空格出发,组成除该空格外其余顶点均为有数字格组成的闭回路,此方案  $(A_2, B_4)$  空格的检验数为 -1,就在  $(A_2, B_4)-(A_1, B_4)-(A_1, B_3)-(A_2, B_3)$  这条闭回路中,对运量作最大可能的调整。在  $(A_2, B_3)$  和  $(A_1, B_4)$  两数字格中,最少的运量为 1,这样在原方案中,  $(A_2, B_3)$  格减去 1t,  $(A_2, B_4)$  格加 1t,  $(A_1, B_4)$  格减去 1t,  $(A_1, B_3)$  格加 1t, 组

成新的方案,如表 16.1-4 所示,还要重新求出每个空格的检验数,如果都是正值就是最优方案,否则还要继续改进方案。

表 16.1-4 检验数表之二

产地 \ 销地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产量(t)
$A_1$	0	0	$4+1=5$	$3-1=2$	7
$A_2$	3	0	$1-1=0$	$0+1=1$	4
$A_3$	0	6	0	3	9
销量(t)	3	6	5	6	

#### 4.2.3 改进方案的方法之二——位势法

用上述闭回路法判断一个方案是否最优,需要通过每一个空格寻找闭回路,以及根据闭回路求出每个空格的检验数。当一个运输问题的产地和销地数很多时,用这个方法计算检验数的工作十分繁重。

下面介绍一种比较简便的求检验数的方法——

位势法。

仍采用例4-3来说明如何用位势法求检验数：

第一步用最小元素法确定初始调运方案表，将表16.1-3有数字格的地方换上对应的运价，如表16.1-5所示。

第二步把表16.1-5下面增加一行和右面增加一列并填上数字，要求所在行及所在列的数字之和刚好等于新换上对应的运价数字，通常用  $u_i (i=1, \dots, m)$  和  $v_j (j=1, \dots, n)$  来代表这些新填的数字， $u_i$  和  $v_j$  分别称为第  $i$  行和第  $j$  列的位势。由于这些  $u_i$  和  $v_j$  的数值是相互关联的，所以填写时可以先任意决定其中的一个，然后推导出其他位势的数值，参见表16.1-6。

表 16.1-5 位势表之一

销地 \ 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$			3	10	
$A_2$			2		
$A_3$	$(\lambda_{31})$	4		5	
$v_j$					

表 16.1-6 位势表之二

销地 \ 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	(2)	(9)	3	10	1
$A_2$	1	(8)	2	(9)	0
$A_3$	(-3)	4	(-2)	5	-4
$v_j$	1	8	2	9	

先令  $v_1=1, \therefore v_1+u_2=1, \therefore u_2=0$

又  $u_2+v_3=2, \therefore v_3=2$

$v_3+u_1=3, u_1=1$

$u_1+v_4=10, v_4=9$

$v_4+u_3=5, u_3=-4$

$u_3+v_2=4, v_2=8$

再看各空格的检验数。令  $\lambda_{31}$  代表空格  $(A_3, B_1)$  的检验数。由闭回路计算得到

$$\begin{aligned} \lambda_{31} &= C_{31} - (v_4 + u_3) + (v_4 + u_1) \\ &\quad - (v_3 + u_1) + (v_3 + u_2) - (v_1 + u_2) \\ &= C_{31} - (u_3 + v_1) \end{aligned}$$

$C_{31}$  是空格  $(A_3, B_1)$  对应的单位运价， $(u_3 + v_1)$  恰好就是该空格所在行的位势和所在列的位势之和。类似地我们可以求得任一空格的检验数为

$$\lambda_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$$

只要把表16.1-5中所有空格处的行位势和列位势加起来(即  $u_i + v_j$ )，便得空格处的位势，也就是

表16.1-6括号内的数字。

再用对应的运价减去表16.1-6对应格的数字，便得表16.1-7，这就是要求的各空格处的检验数。可以看出，表16.1-7的数字同用闭回路法求得的表16.1-3上的数字(括号内的数字)完全一致。

表 16.1-7 位势表之三

销地 \ 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	1	2		
$A_2$		1		-1
$A_3$	10		12	

如表16.1-7中出现有负的检验数时，对方案进行改进和调整的方法同前面闭回路法部分一样。对给定的初始方案，只要首先给出一个位势，则其他行和其他列的位势存在而且唯一。

综上所述，可以将表上作业法求解运输问题的步骤画成框图的形式，见图16.1-18。

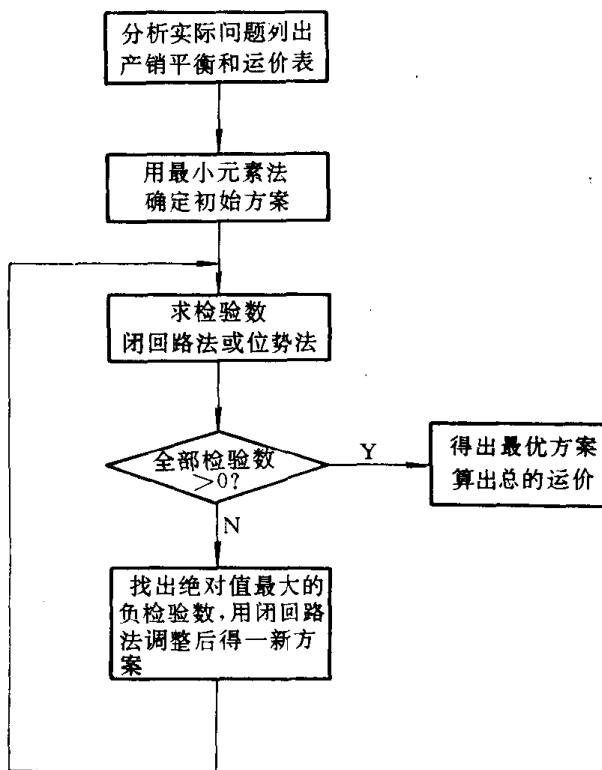


图 16.1-18 表上作业法计算步骤框图

### 4.3 调运问题

物资的调运实际上也是个运输问题，根据它的特点，再介绍一种实用又简便的方法，这是从实际工作中总结出来的，已经得到了数学上的验证。

例4-4 在许昌、宿县、衡水、兰封等地分别生

产 45、60、65、35t 粮食，而石家庄、邯郸、郑州、德州、济南、泰安、徐州、开封等地需要 50、10、15、15、20、25、35、35t。生产和需要是平衡的。试问应怎样编一个调运方案，使粮食运行的“t·km”数为最小？

首先绘出里程图，如图 16.1-19 所示，用“×”表示收点，用“○”表示发点，括号内数字表示收点或发点的吨数，线旁的数字表示该线段公里数。

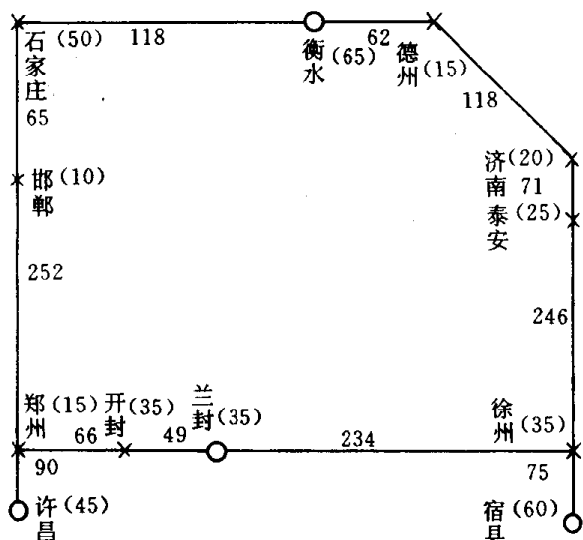


图 16.1-19 图上作业法里程图

因为郑许支线和徐宿支线运出粮食必须分别通过郑州和徐州，所以可以把郑州和许昌合并，看成是一发点，发量是 30t，同样可把徐州和宿县看成一发点，发量是 25t。类似这样的支线问题，总可化为无支线问题来讨论。用箭头（起点是发点，终点是收点）表示流向，在流向线旁的数字表示流量的吨数。若在圈中每个发点吨数全部运完，每个收点所需吨数均满足，则称此图为流向图。如果在一个流向图中发生对流现象（即在同一条直线段上有不同方向的流向），则容易看出，所确定的调配方案一定不是最好的。所以，只需讨论没有对流的流向图，如图 16.1-20 所示。

下面是相应于这个流向图的调运方案，如表 16.1-8 所示。

表 16.1-8 图上作业法的调运方案表

收点 \ 发点	石家庄	邯郸	德州	济南	泰安	开封	发量 (t)
郑州		10				20	30
徐州				20	5		25
衡水	50		15				65
兰封					20	15	35
收量 (t)	50	10	15	20	25	35	

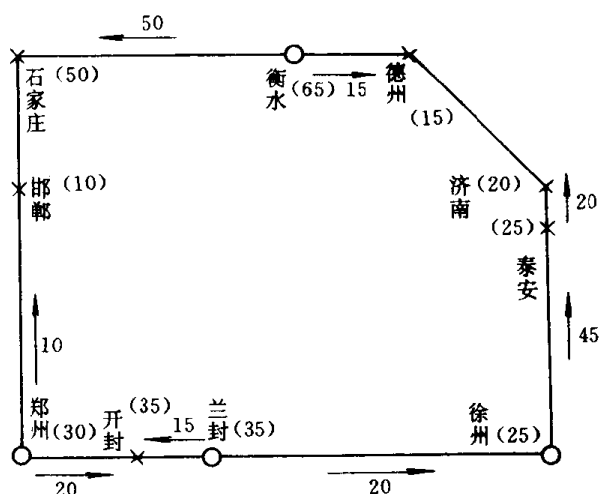


图 16.1-20 图上作业法调运方案图

按此调运方案运行的“t·km”数是

$$(50 \times 118 + 15 \times 62 + 20 \times 71 + 45 \times 246 + 20 \times 234 + 15 \times 49 + 20 \times 66 + 10 \times 252) \text{t} \cdot \text{km} = 28577 \text{t} \cdot \text{km}$$

流向图上逆时针流向在圈的外面，顺时针流向在圈的里面。在圈外称为外圈流向；在圈里称为内圈流向；图上没有流向的各段里程之和称为空圈长。

流向图所确定的调运方案为最好的充要条件是：流向图上没有对流，且内圈长和外圈长分别都小于或等于全圈长的一半。

现在来讨论上面的方案。根据计算得到内、外圈长分别为 363km 和 735km，全圈长是 1381km，可以看出外圈长大于全圈长的一半，所以这个方案不是最好的，必须进行调运，将外圈缩短（如果内圈长大于全圈长的一半则将内圈缩短）。

将外圈最细的（即流过吨数最少的）郑开线流去掉，郑州 20t 向北经邯郸供应给石家庄，其不足的 30t 仍由衡水供给，再将衡水多下来的 20t 供给济南，并将兰封供给济南的 20t 供给开封，由此又得出一个新流向图（图 16.1-21）和相应的调运方案（表

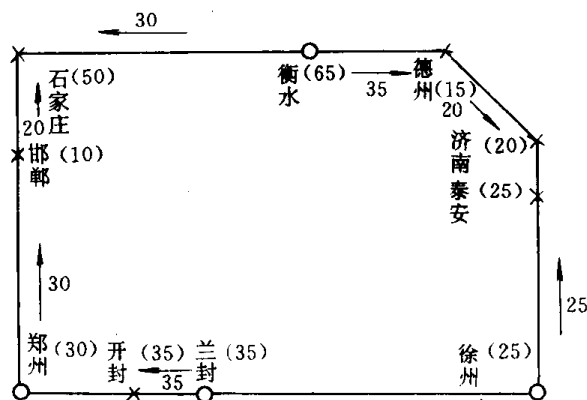


图 16.1-21 调整后调运方案图



16.1-9)。

这个调运方案的“t·km”数是

$$(30 \times 118 + 35 \times 62 + 20 \times 118 + 25 \times 246 + 35 \times 49 + 30 \times 252 + 20 \times 165) t \cdot km = 26795 t \cdot km$$

表 16.1-9 调整后调运方案表

收点 发点	石家庄	邯郸	德州	济南	泰安	开封	发量 (t)
郑州	20	10					30
徐州					25		25
衡水	30		15	20			65
兰封						35	35
收量(t)	50	10	15	20	25	35	

在这个流向图中，外圈长是 364km，内圈长是 646km，都小于全圈长之半，所以这个调运方案是最好的。从上面计算的结果看，较调整前的结果小，也证实了这一点。

若给出的流向图中，外(内)圈长大于全圈长的一半，经调整外(内)圈后，新流向图的外(内)圈仍大于全圈长的一半，那么还要进行调整，直到外(内)圈都小于或等于全圈长的一半为止。

上述是单圈，如果是多圈就要每个每个圈验证是否符合充要条件，若不符合，就要按照单圈的同样方法进行调整。

最后，我们把图上作业法求解调运问题的步骤小结如下：

- 1) 列出物资收、发平衡数据。
- 2) 画出包括收、发站的里程图，在图上用“○”表示发站，用“×”表示收站。在收发站旁注上输入或输出的数量(数字在括号内)，在站与站的

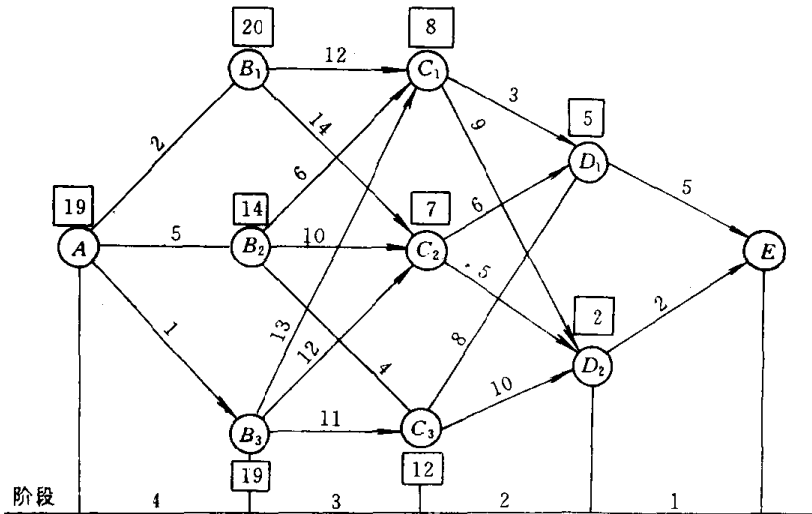


图 16.1-22 网络图

线段旁注上该线段的公里数。

3) 在里程图上给出一个没有对流的物资调运方案的流向图(在没有圈的情况下，这就是最好方案的流向图)。

4) 将图上的圈进行检查，即检查每个圈的内、外圈流向之长是否都小于或等于这个圈长的一半。

5) 若每个圈都符合上述要求，那么这个调运方案一定是最好的。

6) 若某几个圈的内圈或外圈长大于全圈长的一半，那么，需要进行调整，就要缩短内圈或外圈，使每个内、外圈长都小于或等于这个圈的全圈长之半。

7) 根据最后的流向图制出调运方案表。

#### 4.4 网络问题

##### 4.4.1 最短路

在物流系统中，物资流路线最短是最经济的，如图 16.1-22 所示为一线路网络，其中有 10 个结点，A, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, ..., E, 要从 A 点到各结点，最后到 E 点铺设道路，图中两点间连线上数字表示两结点的距离(单位为 km)，要求选择一条将物资自 A 运送到 E 的最短线路。

首先将整个线路网络分成 4 个阶段，如图 16.1-22 所示。

下一步是对每个阶段的决策问题求解。次序是按阶段 1, 2, ..., 也称逆序过程，因为阶段编号是按逆序进行的。求解每个阶段的决策，就是从各个阶段的每个输入结点应当选择哪一条路线到阶段的一个输出结点，以使该输入结点到终点 E 的距离最短。图 16.1-22 中每个结点上面的数字(在长方形框中)表示该结点到终点 E 的最短距离，通过该数字和所经过的线路列出表 16.1-10。

表 16.1-10 决策表之一

输入 结点	决策 线路	输出 结点	到终点 E 的 最短距离
D <sub>1</sub>	D <sub>1</sub> E	E	5
D <sub>2</sub>	D <sub>2</sub> E	E	2
C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub> D <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	8
C <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> D <sub>2</sub>	D <sub>2</sub>	7
C <sub>3</sub>	C <sub>3</sub> D <sub>2</sub>	D <sub>2</sub>	12
B <sub>1</sub>	B <sub>1</sub> C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	20
B <sub>2</sub>	B <sub>2</sub> C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	14
B <sub>3</sub>	B <sub>3</sub> C <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>	19
A	A B <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	19