

经济管理科学·生命科学·人文科学等专业适用

# 文科高等数学

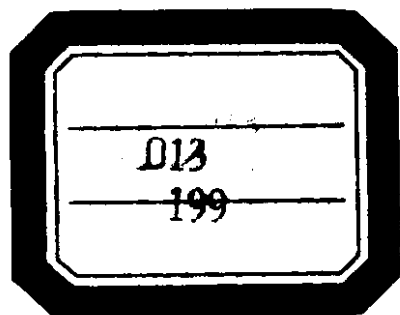
上册

刘光旭 萧永震 樊鸿康 编著

南开大学出版社

Mathematics The Music of Reason A Universal Language

1706123



# 文科高等数学

上册

刘光旭 萧永震 樊鸿康 编著

011/38/11



南开大学出版社



\*B1319001\*

## 内容提要

本书根据文科学生特点,对传统的高等数学内容作了删繁就简、避难从易、注重实用的处理.该书用大量实例讲解数学原理和方法,并辅以直观有趣的图形,便于读者自学和应用.

本书为与数学内容相配合,摘引名家格言、介绍数学家的趣闻轶事,阐述数学与文化的联系,在提高学生的数学素质方面有所创新.

数学方法与计算机的使用相结合,是本书的另一特点.为帮助学生掌握本课程,本书之末还附有“教学目标和目标检测”,供师生参考使用.

本书可作人文科学、社会科学、生命科学以及财经管理等专业的本科、专科高等数学课教材.

## 文科高等数学

上册

刘光旭 萧永震 樊鸿康 编著

---

南开大学出版社出版

(天津八里台南开大学内)

邮编 300071 电话 3508542

新华书店天津发行所发行

南开大学出版社照排中心排版

河北永清第一胶印厂印刷

---

1995年9月第1版 1995年9月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:12

字数:298千 印数:1-8000

ISBN 7-310-00855-3

O·92 定价:13.80元

# 前 言

在人类整个知识系统中,数学作为一门科学有其特殊的重要性,它不只是为了数学与自然科学、社会科学有着广泛而密切的联系,而且数学自身的发展水平也影响着人们的思维方式,影响着人文科学的进步.以古希腊文化为例,由于古希腊的数学家强调严密和推理以及由此得出的令人赞赏的结论,使得人们所关心的不仅是数学成果的实用性,而更重要的是教育人民去进行抽象思维、发扬理性主义的探索精神、激发人们对理想和美的追求.因此在那个时代产生了很难为后世超越的优美文学、极端理想化的哲学和理想化的建筑与雕塑.这一历史事实告诉我们:一个时代的文化特征在很大程度上是与这个时代的数学活动密切相关的.社会离不开数学,数学能促进社会的文明与进步.

数学不仅为研究自然科学和社会科学提供了有效的计算方法,使现代科学取得辉煌成就,而且数学更是一种寻求公理法思想的方法,这种方法包括明确地表述出将要讨论的概念的定义,以及准确地表述出作为推理基础的公设.具有严密逻辑思维能力的人从这些定义和公设出发,推导出结论.当你承认最初的数学原理,那么由此将可以推导出你必须承认的另一结论.一个大学生不论将来从事何种工作,逻辑推理能力总是必备的基本素质.严格的证明是数学的标志,一个学生若对数学证明从未留下印象,那他就缺少了一种基本思维训练的经历.实践证明,在文科教学过程中,高

等数学对于人才的培养,对于青年学生的科学思维和文化素质的哺育,所起的作用是极为重要的,也是其它学科所不能比拟的。

当今人类社会已进入信息时代,高等数学的语言已渗透到现代社会的每一个信息系统,数学成了语言所能达到的最高境界.广泛使用的计算像是摧化剂,促进了社会科学、人文科学数学化的进程.不仅在经济学中,由于大量采用高等数学作为研究工具,出现了数理经济学、计量经济学、经济控制论、经济预测以及经济信息等许多新的分支学科.数学与语言学相结合产生了计算语言学、代数语言学和模糊语言学.数量历史学则是数学与历史学相结合的产物,其它诸如计量法律学、量化政治学、数理哲学、数量人口学等新兴学科的盛行,都充分说明量化方法已成为研究社会科学、人文科学的重要方法.

高等数学将像一个智力放大器,使那些精文知理、掌握高等数学的大学生,在其以后的工作和研究中,占有绝对明显的个人优势.正是出于这种考虑,我们在南开大学的文科各系普遍加强了高等数学的教学工作.长期以来,坚持每学期实行校级统考,在师生的共同努力下,积累了许多宝贵的教学经验,本书正是在多年实践的基础上编写而成的.

如何体现文科特色,如何在内容和形式上做到知识性、科学性、实用性、趣味性和启迪性的综合与统一,是我们想要探索的问题,为此,我们做了如下尝试.

一、根据文科学生特点,对传统的高等数学内容作了删繁就简、避难从易、注重实用的处理.以一元微积分、线性代数、概率统计等基础数学为主线,配以大量的有趣实例讲解高等数学原理和方法,使学生便于自学和应用.

二、配合内容,在每一篇、每一章的开始,我们选编了有关赞赏数学的名家语录;在适当的段落,以文理渗透的形式融入现代数学哲学观点,穿插介绍数学发展简史.旨在引起文科学生的读书兴

趣,激发青年学生的创造热情,增强学生对数学本质和数学特征的认识.

三、为便于学生形象、直观地理解数学内容,掌握数学方法,本书辅以大量插图.相信这些典型、有趣的插图会提高学生的学习兴趣,加深对所学知识的印象.

四、数学方法与计算机的使用相结合,是本书的另一特点.在讲授积分近似计算时,我们画出详细的程序流程图,并根据流程图给出 Basic 语言程序.读者可以在计算机上直接操作.

五、为在宏观上控制高等数学的教学质量,我们为本课程设计了“教学目标及目标检测”,供师生在教学过程中参考.

六、在各章之末,结合数学概念和方法的发现创造过程,我们介绍了著名数学家的趣闻轶事.他们的风貌和行为实践将给人以启迪,望青年朋友能以古鉴今,从中找到人生奋斗的指南.

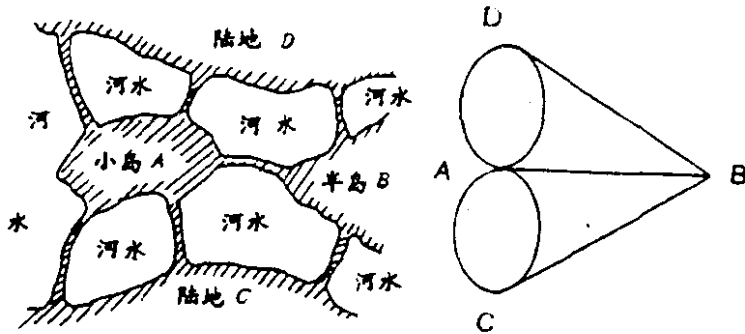
在本书编撰过程中,得到校、系领导和同事们热心指导和帮助,谨致以诚挚的谢意.

作者

# 目 录

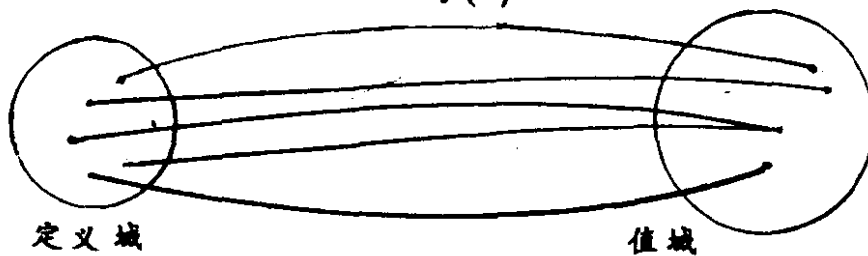
## (第一篇 微积分学)

### 预备知识

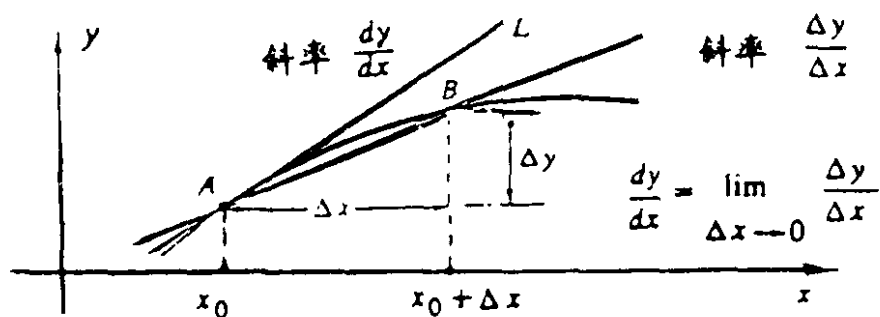


一、充分条件、必要条件及充要条件 .....	(2)
二、实数及其绝对值 .....	(3)
三、集合及其表示法 .....	(4)
四、区间 .....	(8)
五、数学模型 .....	(9)
附录一 高斯——数学界的光辉旗手 .....	(13)
第一章 函数 .....	(16)

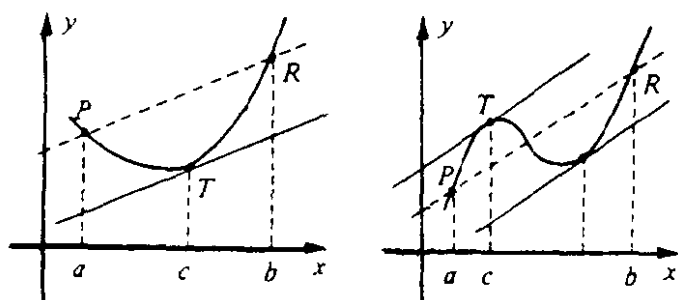
$$f: x \rightarrow f(x)$$



§ 1.1	函数概念 .....	(17)
§ 1.2	函数的图象 .....	(21)
§ 1.3	经济中常用的函数 .....	(23)
§ 1.4	函数的几种特性 .....	(25)
§ 1.5	复合函数与反函数 .....	(27)
附录二	笛卡儿——近代数学的奠基人 .....	(38)
<b>第二章</b>	<b>导数与微分</b> .....	<b>(42)</b>



§ 2.1	极限与连续 .....	(44)
§ 2.2	导数 .....	(72)
§ 2.3	微分 .....	(105)
附录三	柯西——业绩永存的数学大师 .....	(116)
<b>第三章</b>	<b>导数的应用</b> .....	<b>(119)</b>



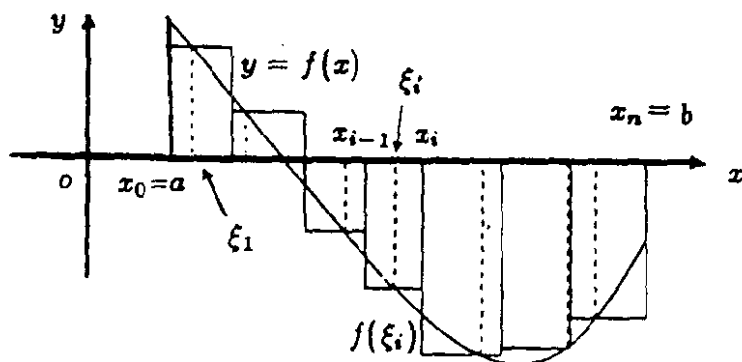
§ 3.1	中值定理 .....	(120)
§ 3.2	洛比达法则 .....	(128)
§ 3.3	泰勒公式 .....	(138)
§ 3.4	函数的极值与凹凸性 .....	(142)
§ 3.5	应用举例 .....	(162)



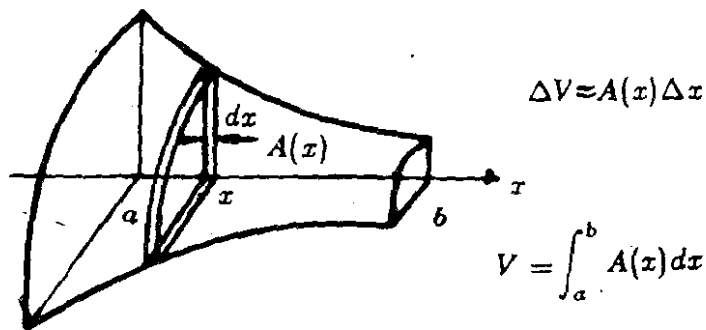
附录四 牛顿——一个为人类增添光辉的人 .....	(171)
<b>第四章 不定积分</b> .....	(174)

$$\int u(dv) = uv - \int (du)v$$

§ 4.1 原函数与不定积分的概念 .....	(174)
§ 4.2 不定积分的性质和基本公式 .....	(179)
§ 4.3 换元积分法 .....	(184)
§ 4.4 分部积分法 .....	(195)
§ 4.5 简单有理函数的积分法 .....	(199)
附录五 莱布尼兹——博学多才的数学符号大师 .....	(206)
<b>第五章 定积分</b> .....	(209)



§ 5.1 面积和定积分 .....	(209)
§ 5.2 定积分的基本性质 .....	(214)
§ 5.3 微积分基本公式 .....	(220)
§ 5.4 定积分的近似计算 .....	(231)
§ 5.5 广义积分 .....	(246)
附录六 黎曼——英年早逝的数学奇才 .....	(253)
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	(256)
§ 6.1 定积分的几何应用 .....	(257)
§ 6.2 定积分在社会科学中的应用 .....	(271)



§ 6.3 微分方程模型 .....	(276)
附录七 阿基米德——爱祖国爱人民的“数学之神” .....	(290)
<b>附录 A 习题答案</b> .....	(293)
<b>附录 B 备查公式</b> .....	(311)
<b>附录 C 希腊字母表</b> .....	(318)
<b>附录 D 教学目标及目标检测</b> .....	(319)

## 第一篇 微积分学

在一切理论成就中,未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了.

——恩格斯(F. Engels)

微积分,或者数学分析,是人类思维的伟大成果之一 它处于自然科学与人文科学之间的地位,并成为高等教育的一种特别的有效工具.遗憾的是,微积分的教学方法有时流于机械,不能体现出这门学科乃是一种憾人心灵的智力奋斗的结晶.

——柯朗(R. Courant)

## 预备知识

作为我们当今如此众多科技的首要基础，  
作为如同一门伟大创造艺术那样重要的分支，  
作为一个万能语言以及一个基本的思维方式，  
我们很难对数学是现代文化的完整部分这一断言提出什么争议。

——布柔德本(T. Broadbent)

### 一、充分条件、必要条件及充要条件

一个数学命题成立或者不成立，总是有条件的。通常我们所讨论的条件有：充分条件、必要条件以及既充分又必要的条件。

**充分条件** 如果条件  $A$  成立时结论  $B$  一定成立，则说  $A$  是  $B$  的充分条件，记作  $A \Rightarrow B$ ，表示由  $A$  可以推出  $B$ 。

例如，若三角形是等腰的，则其两底角相等。显然，“三角形等腰”是“两底角相等”的充分条件。

**必要条件** 如果条件  $A$  不成立时结论  $B$  一定不成立，那么就说明  $A$  是  $B$  的必要条件。

显然，“ $A$  不成立时  $B$  一定不成立”与“ $B$  成立时  $A$  一定成立”是一回事，因此，我们把“ $A$  是  $B$  的必要条件”，也记作  $B \Rightarrow A$ 。

在记号“ $A \Rightarrow B$ ”中，既可以说  $A$  是  $B$  的充分条件，也可以说  $B$

是  $A$  的必要条件. 到底怎么说, 要看在具体问题中, 哪一个是条件, 哪一个是结论.

**充要条件** 如果  $A$  既是  $B$  的充分条件, 又是  $B$  的必要条件, 那么我们就说  $A$  是  $B$  的充分必要条件, 简称**充要条件**, 记作  $B \Leftrightarrow A$ . 这时也称  $A$  与  $B$  是**等价的**.

例如,  $a^2 + b^2 = 0$  的充要条件是  $a = 0$  且  $b = 0$ .

## 二、实数及其绝对值

**1. 实数** 实数包括有理数及无理数. 正负整数、正负分数以及零, 统称为有理数. 有理数可以表示为  $p/q$ , 其中  $p, q$  为整数,  $q \neq 0$ , 并假定  $p$  与  $q$  无公因子. 无理数(例如  $\sqrt{2}, \pi$ , 等等)不能表为  $p/q$  的形式.

**2. 数轴** 规定了原点, 单位长以及正方向的直线称为**数轴**, 我们用原点  $O$  表示数  $0$ , 用正半轴上的点表示正实数, 用负半轴上的点表示负实数, 如图 1 所示. 这样, 便在实数与数轴上的点之间建立了一一对应的关系. 它是实数的连续性与直线连续性相统一的表现. 因此, 我们以后不再区分“数”与“点”. 有了数轴, 就有了“形”与“数”对应的基础.

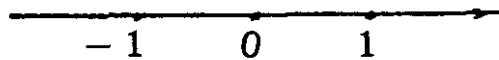


图 1

**3. 实数的绝对值** 设  $x$  为一实数.  $x$  的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

显然, 数  $x$  的绝对值  $|x|$  表示点  $x$  到原点  $O$  的距离. 而  $|x - a|$  表示点  $x$  与点  $a$  的距离.

由绝对值的定义容易理解如下性质

$$|a| \geq 0 \quad -|a| \leq a \leq |a| \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (\text{当 } b \neq 0)$$

#### 4. 几个常用的绝对值不等式

$$1^\circ \quad |x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$$

$$2^\circ \quad |x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

$$3^\circ \quad \text{三角形不等式 } |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$4^\circ \quad |a-b| \geq ||a| - |b||$$

### 三、集合及其表示法

集合是近代数学最基本的概念之一. 可以说几乎全部近代数学就是建立在集合这一概念的基础之上的. 集合论的创始人德国数学家乔治·康托(Georg Cantor)1897年指出:“把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象,也可以是思维的对象——放在一起,称为一个集合”. 所以,集合就是可以互相区别的事物的集体. 集合中的每一个事物称为该集合中的**元素**. 集合通常用大写的拉丁字母 A, B, C … 来表示,元素则用小写的拉丁字母如 a, b, x, y … 来表示. 当 x 是集合 E 的元素时,我们就说 x 属于 E, 记作  $x \in E$ ; 当 x 不是集合 E 的元素时,就说 x 不属于 E, 记作  $x \notin E$  或  $x \notin E$  (现常采用后者).

例如,若记 N 为全体自然数的集合, R 为全体实数的集合,则

$$\frac{2}{3} \in \mathbf{R}, \frac{2}{3} \notin \mathbf{N}.$$

设被讨论的全体对象为 U, 则称 U 为**论域**.

表示集合的方法通常有三种.

把集合中的元素列举出来,这种表示法称为**列举法**. 例如,自然数集合 N 可以表示为

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

把集合中元素所满足的条件写在元素的后面,用一条竖线隔开,外面写上大括号,这种表示法称为**描述法**.例如集合

$$E = \{x | x^2 \leq 9\}$$

表示所有满足不等式  $x^2 \leq 9$  的  $x$  的全体.而集合

$$A = \{x | x^2 + 5x + 6 = 0\}$$

则表示方程  $x^2 + 5x + 6 = 0$  所有解的全体.

集合的第三种表示法是**特征函数法**.它是用论域  $U$  上的函数  $\chi_E(x)$  表示集合  $E$ .若  $x \in E$ ,令  $\chi_E(x) = 1$ ;若  $x \notin E$ ,则令  $\chi_E(x) = 0$ .例如, $U$  为自然数全体, $E = \{1, 2, 3\}$ ,则用特征函数可将  $E$  写成

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x=1, 2, 3 \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为其它自然数} \end{cases}$$

习惯上常常将  $\chi(x)$  表示的集合  $E$  记在  $\chi$  与  $x$  之间的下方,即  $\chi_E(x)$ .

我们约定把“任意”记作  $\forall$ .例如,“若  $\forall x \in A$ ,则  $x \in B$ ”,就表示  $A$  的每个元素都属于集合  $B$ ,此时,称  $A$  是  $B$  的子集,记作  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ ),读作  $A$  包含于  $B$  (或  $B$  包含  $A$ ).若  $A \subset B$ ,且  $B \subset A$ ,则称  $A$  与  $B$  相等,记作  $A = B$ .不包含任何元素的集合称为空集,记作  $\emptyset$ ,例如

$$\{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$$

另外还要注意一个元素不能在同一个集合里重复出现.

所有属于  $A$  且属于  $B$  的元素所组成的集合称为  $A$  与  $B$  的交,记作  $A \cap B$ .即  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ .

把至少属于  $A, B$  之一的所有元素组成的集合称为  $A$  与  $B$  的并,记作  $A \cup B$ ,即  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ .

$A$  与  $B$  的**差集**也是一个集合,它是由属于  $A$  但不属于  $B$  的元素组成的集合,简称为  $A$  与  $B$  的**差**,甚至可以说成  $A$  减  $B$ ,记作  $A \setminus B$ .例如, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , $B = \{2, 4\}$ ,则

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$$

已知论域  $I$  及  $I$  的子集  $A$ , 由  $I$  中所有不属于  $A$  的元素组成的集合, 叫做集合  $A$  在集合  $I$  中的补集, 记作  $\bar{A}$  (读作“ $A$  补”), 即

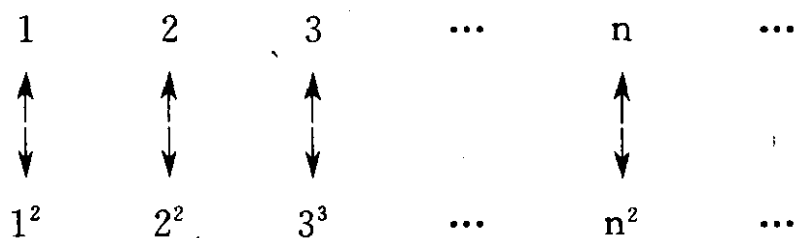
$$\bar{A} = \{x \mid x \in I, \text{且 } x \notin A\}$$

作为逻辑思维基础的概念和判断, 通常都要涉及到整体与部分、一般与特殊的关系. 这种关系用数学语言来描述就是集合与元素的关系.

集合的概念、术语和记号不仅构成简明有效的数学语言, 而且可使许多数学成果得以推广.

为了与另一个概念——模糊集相区别, 有时也把我们这里所讲的集合称为经典集, 或普通集, 或康托集.

当集合的元素有限时, 我们称该集合是有限集合; 而当元素的数目为无限时, 我们就称该集合是无限集合. 当集合是无限集合时会有一些不符合人们常识的性质. 例如整体大于部分是一般人都熟悉的常识, 但是无限集合却可以和它的子集一样“大”! 在集合论中, 一个集合的大小用“势”来描述, 一个集合的势就是它所包含元素的数目. 一个无限集合就具有无限的势. 因此上面所说的也就意味着一个无限集合可以和它的子集具有相同的势. 这似乎是难以理解的, 但这是事实. 典型的例子是自然数集合  $\{n\}$  与自然数平方的集合  $\{n^2\}$ . 平方数集合  $\{n^2\}$  显然是自然数集合  $\{n\}$  的子集. 但对于每一个自然数  $n$  都有它的一个平方数  $n^2$  与之对应, 且仅有一个平方数与之对应, 即



所以平方数的总数等于自然数的总数, 因此它们有相同的势, 也就是说它们一样“大”! 这说明我们在有限条件下得出的“整体大于部



分”的法则对于无限的世界是不适用的。

正像牛顿力学体系那样,相对地球而言,太阳系的有关量是无限大,而银河系的有关量则是高阶无限大.从纯数学角度,康托把无限集合也分了层次.

人类对于无限的认识越来越趋于丰富和深刻.相应的,人类的思维活动也飞跃到更广阔、更深奥的空间.

集合论中出现的悖论对于数学本身的发展和人类思想都产生过重大的影响.著名的罗素(Russell)悖论有一种通俗的说法:某村所有刮胡子的人可以分为两类:一类是自己给自己刮胡子,另一类是自己不给自己刮胡子,该村有个理发师给自己立了一条规定:他给而且只给村子里所有不给自己刮胡子的人刮胡子,试问这个理发师属于哪一类?如果说他属于自己给自己刮胡子的一类,则按其规定,他不能给自己刮胡子.因此他是不给自己刮胡子的人.若他属于自己不给自己刮胡子的一类,因之他又是一个自己给自己刮胡子的人.不论哪种说法,都导致矛盾,这就是**罗素悖论**.

如果采用集合的符号则可以把罗素悖论写成更加简洁的形式.定义一个集合  $S$ :

$$S = \{x | x \notin S\}$$

如果  $x \in S$ ,则按  $S$  的定义  $x \notin S$ ,显然产生矛盾.

如果  $x \notin S$ ,则按  $S$  的定义  $x \in S$ ,显然也产生矛盾.

在人们视为严格确定的数学中,特别是在作为数学基础的集合论中出现了悖论,不能不引起人们的震惊.因为集合论的悖论意味着我们可以从一个肯定的判断出发,通过严格的数学推理得出一个完全相反的结论.这种“是非不分”的局面当然是令人担忧的.

悖论的确引起了许多第一流数学家与哲学家的重视.他们的努力推动了数理逻辑的迅速发展,导致了1938年哥德尔(Gödel, 1906—1978,奥地利)不完备性定理的重要发现,从而克服了这一矛盾.这一定理是数理逻辑发展史上的重大研究成果,是数学基础