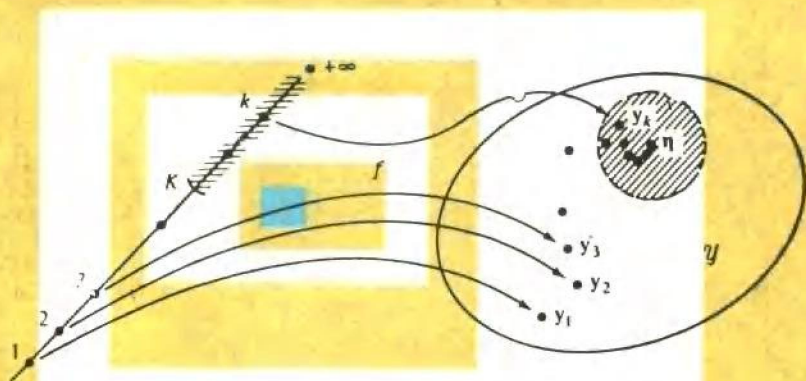




数学分析基础浅导

K · G · 宾莫尔 著 徐信之译 冷生明校

● 北京大学出版社

数学分析基础浅导

K.C.宾莫尔 著

徐 信 之 译

冷 生 明 校

北 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是剑桥大学出版社为大学生提供的一本极好的课外读物。书中系统地阐述了数学分析这门学科中用到的逻辑和代数的基础知识，对数学分析的内容作了总结和概括。并在此基础上引进了度量空间和拓扑空间的概念，为读者学习更深的内容，例如，实分析、复分析、泛函分析、及一般拓扑等奠定了新的基础。行文生动活泼，通俗易懂。论理严谨细致，深入浅出。

THE FOUNDATIONS OF ANALYSIS,
A STRAIGHTFORWARD INTRODUCTION

K.G. BINMORE

Cambridge University Press

数学分析基础浅导

K.G. 宾莫尔 著

徐之信 译

~~李生明~~ 校

责任编辑：翟定

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 14印张 360千字

1989年 6月第一版 1989年 6月第一次印刷

印数：0001—5,500册

ISBN 7-301-00751-5/0·136

定价：4.95元

前 言

本书的前12章以相当初等的水平非正式地，但是系统地阐述了数学分析这门学科中用到的逻辑和代数的基础知识。它完全自成体系，但对于已经学过或正在学数学分析基础教程的学生来说，是很有用的。这样一个课程必须集中力量研究收敛的概念和微分与积分计算的基本原理。因此，用来考虑其基础的时间不多。但是基础问题很重要，不能忽视，也不能把这部分内容完全放到代数教程里去处理（在代数中认为重要的东西在数学分析中不一定认为重要）。特别是，掌握好书中所讲的内容，并以此为基础对在数学分析方面作些进一步的工作是十分重要的。然而，仍存在东西多而容器小的问题。这么多的内容很难在指定的时间内来完成。我自己讲课时是这样处理这个问题的：我适当地鼓励学生在书上所讲的范围内自己去读一些更基本的资料，并通过习题课来检查他们的进步。看来，这样做很奏效。正是因为这个缘故，本书许多章节都是为了便于“自学”而写的。其中难免有些重复，某些问题的讨论会使一些读者感到很浅。如果可能的话，读者不妨略过这些章节。

本书的13—30章是用来填补数学分析的入门教科书与论述实分析、复分析、泛函分析以及一般拓扑的高等教科书之间的缺口的。在入门书中所采用的低水平与较为高等的著作相比，中间出现的间断常常给学生带来很大的困难，特别是当学生对基本内容掌握得不是那么牢固的时候。本书的作者竭力做到循序渐进地引进新的概念，并仔细地把它们与前面学过的，但并不总被充分地吸收的那些知识联系起来。因此本书的目的不仅是为学习更高等的著作作好准备，而且还要阐明和统一所要讲到的全部内容。

对拓扑学中的概念，人们乐于采用一种简洁而雅致的抽象的

说明。但是我发现较为明智的是以一种更平易，更从容的方式，踏踏实实地同 R^n 空间中的应用结合起来。例如相对拓扑的概念过早地引进就常常会要引起麻烦。

本书的13—21章涉及到度量空间（有时也略微涉及到拓扑空间）中的开集、闭集、连续性、紧性及连通性，但实际上所有的例子都取自 R^n 。因为这些概念都是各自独立于极限的概念而发展起来的，所以这些概念都可以在相当高的概括性的水平上相继引进来。我的经验是，所有的学生都很欣赏对“ ϵ ”的这种安排，许多学生虽然在他们第一次遇到极限过程时并不能充分理解它的意义，但是只要他们化费一些力气把现在的抽象定义与他们以前遇见过的许多的具体例子联系起来，就会发现，这样以相当抽象的方式引进概念还是很有启发性的。因此本书的其余部分都注重把这个想法应用到各种重要的具体场合。

本书的许多内容是大学生在一年级第二学期学习时所能理解的。其中一些较难的内容都用*号标出来了。不过事实上没有可能安排那么多的学时，在一年里把一年级学生在理论上可以理解的全部材料都教完。因此多数学生要在第二年或者以后的学习中遇到本书中的大部分内容。

书中标有*号的章节表示尽管这些材料互有关联，而且值得注意，但是我认为作为分析教程第一年的内容并不合适，通常或者因为这些内容太深，或者因为把它放在代数教程中讲授较好。这一事实反映在这些章节的写法上，我们把更多的东西留给了读者，而没有放在书中。偶而，诸如策梅洛-弗兰凯尔集合论或超限算术的一些课题，仅对一般的概念试图作简要的陈述。那些自学的人把标有*号的章节留到第二次读是明智的。对于在高等学校学习的学生来说，他们在第一学年与第二学年之间的漫长的假期中读这本书时，也可采用这种方式。

书中提供了大量的练习，应视之为正文的一个组成部分。我不打算使这些练习成为智力测验。总的说来，这些练习不需要什

么独创性，尽管如此，书中还是作了大量的提示。练习的目的在于给读者一个机会，检验他们对正文理解的程度如何。数学概念有时相当微妙，往往一眼看不出来。常常是人们直到去解一些以某个特定的概念为基础的探讨性的练习受挫时，才开始感到它们的微妙所在。一般来说，读一本数学书，而不同时去做书中给出的大量练习，就得不到其中本质的东西。

最后，我愿意向 M·贝尔表示感谢，他为我不辞辛苦地用打字机打出本书的原稿。我还要感谢 L.S.E 的学生们，多年来我对他们试用了各种类型的讲授方法。我发现他们总是一些充满生气又会欣赏的听众，从而这本书含有他们很多的贡献。

K.G. 宾莫尔

1980年6月

目 录

1 证明	(1)
1.1 什么是证明	(1)
1.5 数学证明	(3)
1.7 明显的	(6)
1.8 数学理论的解释	(6)
2 逻辑 (I)	(8)
2.1 命题	(8)
2.4 等价	(8)
2.6 非	(9)
2.7 与·或	(9)
2.10 蕴涵	(11)
2.12 当且仅当	(13)
2.13 证明方法	(14)
3 逻辑 (II)	(16)
3.1 谓词和集合	(16)
3.4 量词	(18)
3.6 量词的使用	(19)
3.10 再论否命题	(21)
3.13 例与反例	(22)
4 集合运算	(23)
4.1 子集	(23)
4.4 余集	(24)
4.7 并与交	(24)

*4.13	策梅洛-弗兰凯尔集合论	(28)
5	关系	(31)
5.1	序对	(31)
5.2	笛卡儿积	(31)
5.3	关系	(32)
5.5	等价关系	(33)
5.8	序	(35)
6	函数	(37)
6.1	正式定义	(39)
6.2	术语	(44)
6.5	复合	(45)
*6.6	二元运算与群	(46)
*6.8	选择公理	(49)
7	实数 (I)	(49)
7.1	引言	(49)
7.2	实数与长度	(49)
7.3	算术公理	(51)
7.6	一些算术定理	(55)
7.10	序公理	(56)
7.13	区间	(57)
8	归纳法原理	(61)
8.1	有序域	(61)
8.2	自然数	(61)
8.4	归纳法原理	(63)
8.7	归纳定义	(63)
8.10	N 的性质	(66)
8.13	整数	(68)

8.14	有理数	(68)
9	实数 (II)	(71)
9.1	引言	(71)
9.2	穷竭法	(71)
9.3	边界	(74)
9.5	连续公理	(75)
9.7	上确界与下确界	(76)
*9.11	戴德金分割	(79)
*9.13	幂	(80)
9.16	无限大	(83)
9.19	有理数的稠密性	(84)
*9.21	实数的唯一性	(85)
*10	数系的结构	(89)
*10.1	模型	(89)
*10.2	基本假设	(90)
*10.3	自然数	(90)
*10.4	皮亚诺公理	(91)
*10.6	四则运算与序	(92)
*10.10	度量长度	(95)
*10.11	正有理数	(96)
*10.13	正实数	(99)
*10.16	负数与位移	(102)
*10.17	实数	(103)
*10.19	线性方程与二次方程	(105)
*10.20	复数	(107)
*10.22	三次方程	(109)
*10.23	多项式	(111)
*11	数论	(113)
*11.1	引言	(113)

*11.2	整数	(115)
*11.3	带余除法	(116)
*11.5	因子	(116)
*11.8	欧几里得算式	(117)
*11.9	素数	(118)
*11.12	素数分解定理	(118)
*11.13	有理数	(119)
*11.16	用直尺与圆规作图	(120)
*11.20	根式	(125)
*11.21	超越数	(125)
12	势	(126)
12.1	计数	(126)
12.2	势	(127)
12.4	可数集	(129)
12.14	不可数集	(135)
*12.17	十进制小数展开式	(136)
*12.20	超越数	(138)
*12.23	计数不可数集	(140)
*12.24	序数	(143)
*12.25	基数	(145)
*12.26	连续统假设	(147)
13	距离	(148)
13.1	空间 R^n	(148)
13.3	R^n 中的长度与角度	(151)
13.5	一些不等式	(152)
13.9	模	(153)
13.11	距离	(154)
13.14	欧几里得几何与 R^n	(155)
*13.17	赋范向量空间	(162)
13.18	度量空间	(163)
*13.19	非欧几里得几何	(164)

13.20	点与集合之间的距离	(166)
14	开集与闭集(I)	(169)
14.1	引言	(169)
14.2	集合的边界	(168)
14.3	开球	(170)
14.7	开集与闭集	(174)
14.15	R^n 中的开集与闭集	(178)
15	开集与闭集(II)	(181)
15.1	内部与闭包	(181)
15.4	闭包的性质	(182)
*15.8	内部的性质	(183)
15.11	连接集合	(185)
16	连续性	(190)
16.1	引言	(190)
16.2	连续函数	(190)
16.7	代数运算的连续性	(193)
16.13	有理函数	(196)
*16.17	复值函数	(197)
17	连通集	(198)
17.1	引言	(198)
17.2	连通集	(198)
17.6	R^1 中的连通集	(200)
17.8	连续性与连通集	(201)
17.15	曲线	(204)
17.18	道路连通集	(205)
*17.21	分支	(207)
*17.25	R^n 中开集的结构	(209)

18	聚点	(212)
18.1	聚点	(212)
*18.4	聚点的性质	(214)
*18.9	康托尔集	(215)
19	紧集(I)	(218)
19.1	引言	(218)
19.2	中国盒	(219)
19.5	紧集与聚点	(221)
19.12	紧性与连续性	(225)
*20	紧集(II)	(229)
*20.1	引言	(229)
*20.2	开覆盖	(229)
*20.4	紧集	(229)
*20.7	在 R^n 中的紧性	(230)
*20.15	完备性	(235)
*20.16	一般度量空间的紧性	(237)
*20.20	球立方体	(239)
21	拓扑	(242)
21.1	拓扑等价	(242)
21.2	地图	(243)
21.3	区间之间的同胚	(244)
21.4	圆周和球面	(245)
21.6	连续函数与开集	(247)
21.8	拓扑	(248)
*21.9	相对拓扑	(249)
*21.15	拓扑空间初步	(255)
*21.18	乘积拓扑	(258)

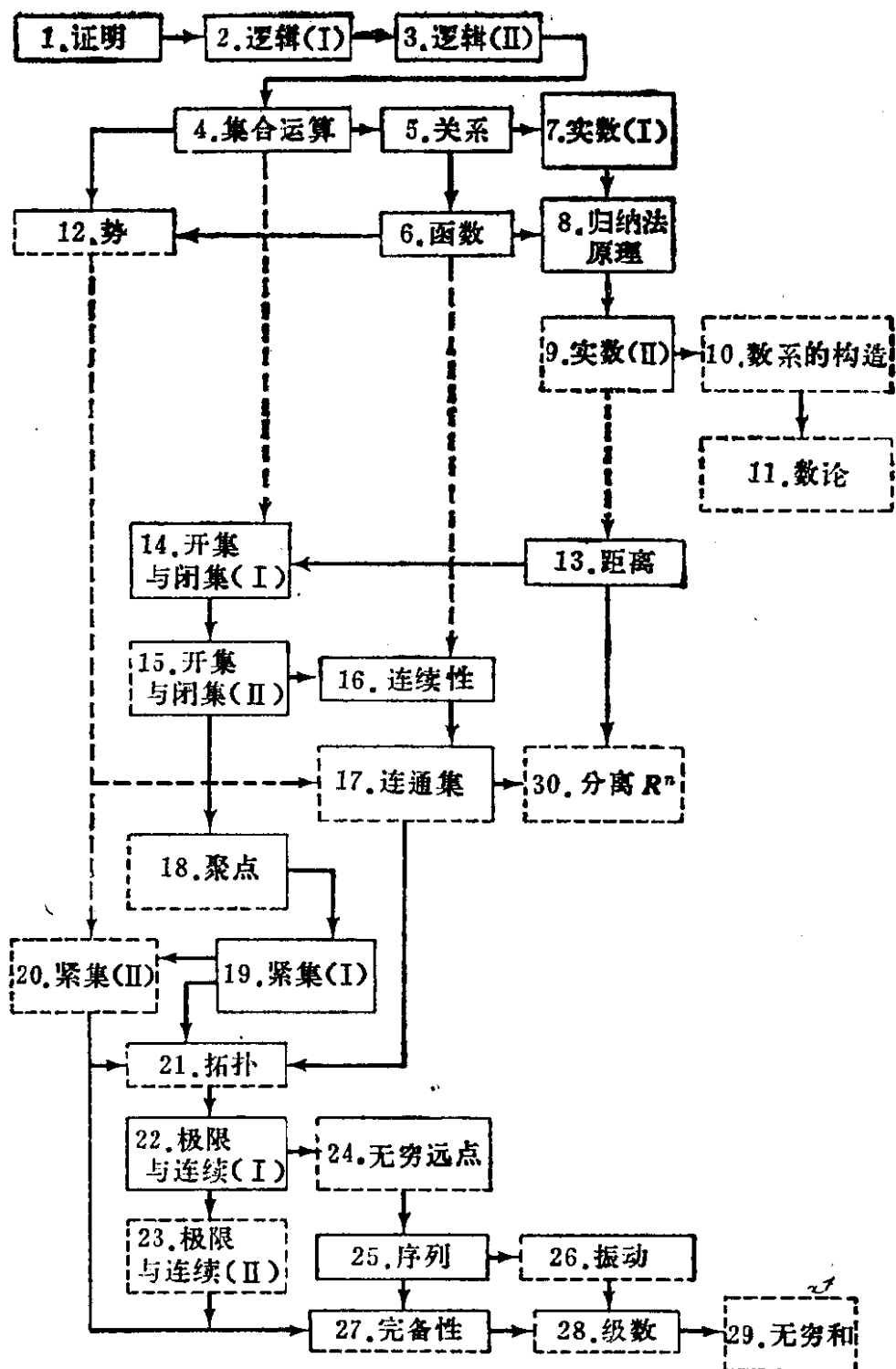
22	极限与连续(I)	(262)
22.1	引言	(262)
22.2	开集与“接近”	(265)
22.3	极限	(265)
22.4	极限与连续	(266)
22.9	极限与距离	(270)
22.12	右极限与左极限	(272)
22.15	一些记号	(275)
22.16	单调函数	(276)
22.19	反函数	(278)
22.23	根	(280)
22.25	极限的复合	(282)
*22.34	复变函数	(282)
*23	极限与连续(II)	(288)
*23.1	二重极限	(288)
*23.3	二重极限(续)	(290)
*23.5	累次极限	(291)
*23.11	一致收敛	(295)
*23.12	函数之间的距离	(297)
*23.20	一致连续	(305)
24	无穷远点	(309)
24.1	引言	(309)
24.2	实数的单点紧化	(311)
24.3	黎曼球与高斯平面	(314)
24.4	实数的两点紧化	(315)
24.5	收敛与发散	(318)
24.8	组合定理	(325)
*24.11	复变函数	(328)

*24.12	乘积空间	(328)
25	序列	(333)
25.1	引言	(333)
25.2	序列的收敛性	(334)
25.7	函数的收敛与序列的收敛	(336)
25.12	序列与闭包	(339)
25.18	子序列	(341)
25.23	序列与紧性	(343)
26	振动	(346)
26.1	发散	(346)
26.2	极限点	(347)
*26.5	振动函数	(349)
*26.11	上极限与下极限	(352)
27	完备性	(356)
27.1	柯西序列	(356)
27.2	完备性	(356)
27.8	一些完备空间	(360)
*27.13	不完备的空间	(363)
*27.16	度量空间的完备性	(365)
*27.18	完备性与连续统公理	(367)
28	级数	(370)
28.1	级数的收敛	(370)
28.7	绝对收敛	(372)
28.8	幂级数	(373)
*28.11	级数的一致收敛	(376)
*28.15	函数空间中的级数	(378)
*28.19	连续算子	(382)

*28.26	应用于幂级数	(385)
*29	无穷和	(389)
*29.1	交换律与结合律	(389)
*29.2	无穷和	(391)
*29.4	无穷和与级数	(392)
*29.9	完备空间与分配律	(395)
*29.17	绝对和	(399)
*29.23	累次级数	(408)
*30	R^n 的分离性	(408)
*30.1	引言	(408)
*30.2	分离性	(409)
*30.4	分离超平面	(409)
*30.8	R^n 中的范数与拓扑	(414)
*30.11	曲线与连续统	(416)
*30.12	简单曲线	(417)
*30.14	简单的连通区域	(418)
记 号		(421)
索 引		(423)

标*号的内容比较深，第一次读时可以略去。

下面的框图指出了本书的逻辑关系。由虚线所围的章的内容较深，第一次读时可以略去。虚箭头表示了某些章之间的依赖关系。



1 证 明

1.1 什么是证明

每个人都知道定理需要证明。证明不能理解得太广泛，数学上的证明与日常生活中认为够用的那种论证存在着本质的差别。这种差别是重要的。例如，要想构造一种数学理论去供政治家用它去争取选票，那是没有意义的。

正式的数学证明的概念将在 § 1.5 中解释。这里我们先来看几个富有启发性的例子，其中的论证初看起来似乎可以，但我们不能把它们作为证明来接受。

1.2 例 要问对于 $n = 1, 2, 3, \dots$ 表达式

$$n^3 - 4n^2 + 5n - 1$$

是否为正的。回答问题的一种方法是给这个表达式作一张表，只要你有耐性，表中可以取尽量多的 n 。

n	$n^3 - 4n^2 + 5n - 1$
1	1
2	1
3	5
4	19
5	49
6	101

从这张表看，似乎 $n^3 - 4n^2 + 5n - 1$ 的值越来越大。特别地，我们猜想：当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时， $n^3 - 4n^2 + 5n - 1$ 永远是正的，这似乎是合理的。但是很少有人认为这里给出的论述就是这一断言