

# 相关平差概论

---

XIANGGUANPINGCHAGAILUN

冯 浩 鉴

# 相关平差概论

---

冯 浩 鉴

测绘出版社

本书应用矩阵代数、概率论与数理统计学的基本知识,着重讨论了相关观测量的平差以及精度估计问题。总共七章,前三章介绍概率论关于正态分布以及数字特征的一般性结论;后三章是这些结论在间接平差、条件平差以及分组平差中的应用;最后一章扼要介绍观测量的统计相关现象,它是相关平差的实践基础。

本书适合掌握微积分、古典测量平差理论以及矩阵代数基础知识的测绘工作者阅读。也可供其他从事数据处理的专业人员参考。

## 相 关 平 差 概 论

冯 浩 鉴

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16·印张 14 1/4·字数 329 千字

1982 年 11 月第一版·1982 年 11 月第一次印刷

印数 1—44000 册·定价 1.50 元

统一书号: 15039·新 217

## 前 言

1947年由荷兰工业大学 Tienstra, J.M.提出的相关平差理论,迄今已有三十余年。在这期间,由于矩阵代数以及数理统计学的应用,这一理论得到进一步完善和发展。相关观测成果的数据处理也由平差向误差分析、拟合推估等方面扩展。

本书目的是想通过对相关观测成果的精度估计以及平差计算的讨论,使一般读者注意到顾及观测量之间的相关性进行精度估计的必要性和重要性,系统地掌握并应用相关平差方法,为进一步解决拟合推估问题奠定基础。

特别感谢周江文教授、陶本藻副教授对本文初稿提出了许多宝贵意见,作者根据这些意见进行了一定修改与补充。

本书在写作过程中,测绘研究所冯文青、张志新等领导同志给予多方面关怀,王大义同志大力支持和帮助。广东测绘局冯炳铜、江耀权、李棠佳等同志在内容安排方面提出许多意见,作者对他们表示衷心感谢。

由于水平有限,缺点和错误在所难免,恳请读者批评、指正。

作 者

1980年8月于北京

## 目 录

|                                     |         |
|-------------------------------------|---------|
| <b>第一章 偶然误差及其分布规律</b> .....         | ( 1 )   |
| §1-1 一元正态随机变量及其分布规律.....            | ( 1 )   |
| §1-2 二元正态随机变量及其分布规律.....            | ( 6 )   |
| §1-3 $n$ 元正态随机变量及其分布规律.....         | ( 8 )   |
| §1-4 $n$ 元正态随机变量一组线性函数的分布规律.....    | ( 10 )  |
| §1-5 正态分布的同一性规律以及正态分布的广泛性与普遍性.....  | ( 13 )  |
| §1-6 正态分布规律的扩充.....                 | ( 14 )  |
| <b>第二章 误差传播定律</b> .....             | ( 17 )  |
| §2-1 数学期望.....                      | ( 17 )  |
| §2-2 方差.....                        | ( 19 )  |
| §2-3 相关矩 (协方差) .....                | ( 21 )  |
| §2-4 误差传播定律.....                    | ( 22 )  |
| §2-5 相关方差矩阵的同一性规律.....              | ( 28 )  |
| §2-6 相关权逆阵及其同一性规律.....              | ( 29 )  |
| §2-7 误差传播定律的总结与扩充.....              | ( 31 )  |
| §2-8 直接观测中的数学期望、方差以及相关系数的估计量.....   | ( 40 )  |
| <b>第三章 最小二乘法的理论基础</b> .....         | ( 46 )  |
| <b>第四章 间接平差</b> .....               | ( 51 )  |
| §4-1 一个测区的间接平差.....                 | ( 51 )  |
| §4-1-1 法方程式的组成与解算.....              | ( 51 )  |
| §4-1-2 单位权方差以及 $VP_0V'$ 的计算 .....   | ( 54 )  |
| §4-1-3 未知数及其函数的方差.....              | ( 64 )  |
| §4-1-4 间接平差中估值的统计特性.....            | ( 66 )  |
| §4-1-5 算例.....                      | ( 71 )  |
| §4-2 $T$ 个测区的整体间接平差.....            | ( 88 )  |
| §4-2-1 分块法方程式的组成与解算.....            | ( 88 )  |
| §4-2-2 单位权方差以及 $V(P_0)V'$ 的计算 ..... | ( 97 )  |
| §4-2-3 未知数及其函数的分块相关方差矩阵.....        | ( 104 ) |
| §4-2-4 分区线的设计及其对分块法方程式结构的影响.....    | ( 106 ) |
| §4-2-5 $T$ 个测区整体间接平差后估值的统计特性.....   | ( 108 ) |
| §4-2-6 本章结束语.....                   | ( 109 ) |
| <b>第五章 条件平差</b> .....               | ( 110 ) |
| §5-1 一个测区的条件平差.....                 | ( 110 ) |

|             |                                    |       |
|-------------|------------------------------------|-------|
| §5-1-1      | 法方程式的组成与解算                         | (110) |
| §5-1-2      | 单位权方差以及 $VP_0V'$ 的计算               | (114) |
| §5-1-3      | 平差值及其函数的相关方差矩阵                     | (117) |
| §5-1-4      | 条件平差中估值的统计特性                       | (119) |
| §5-1-5      | 算例                                 | (120) |
| §5-1-6      | 带未知数的条件平差                          | (124) |
| §5-1-7      | 附有条件式的间接平差                         | (132) |
| §5-2        | $R$ 个测区整体条件平差                      | (136) |
| §5-2-1      | 分块法方程式的组成与解算                       | (136) |
| §5-2-2      | 单位权方差以及 $\dot{V}(P_0)\dot{V}'$ 的计算 | (142) |
| §5-2-3      | 平差值及其函数的分块相关方差矩阵                   | (143) |
| §5-2-4      | 分区线的设计及其对分块联系数法方程式结构的影响            | (145) |
| <b>第六章</b>  | <b>分组平差与分区多组平差</b>                 | (148) |
| §6-1        | 分组平差                               | (148) |
| §6-1-1      | 建立在初等变换理论基础上的分组相关平差方法              | (148) |
| §6-1-2      | 利用平差值的相关权逆阵作分组相关平差的方法              | (157) |
| §6-2        | 分区多组平差                             | (170) |
| §6-2-1      | 利用分块高斯法进行分区平差                      | (170) |
| §6-2-2      | 利用平差值的分块相关权逆阵进行分区平差                | (179) |
| §6-2-3      | 混合分区平差法                            | (183) |
| §6-2-4      | 利用克吕格法作分区平差                        | (185) |
| §6-2-5      | 利用带未知数的条件平差作分区平差的数学模型              | (186) |
| §6-2-6      | 利用附有条件式的间接平差作分区平差的数学模型             | (188) |
| <b>第七章</b>  | <b>关于直接观测量的相关性讨论</b>               | (191) |
| §7-1        | 相关观测量的定义                           | (191) |
| §7-2        | 相关系数的确定方法                          | (197) |
| §7-3        | 顾及观测量的相关性对精度估算结果产生的影响              | (200) |
| §7-4        | 观测条件的改变对相关系数的影响                    | (205) |
| §7-5        | 对误差传播定律的验证                         | (206) |
| §7-6        | 关于完全方向组的新概念                        | (210) |
| <b>附录</b>   | <b>关于最小二乘法理论的补充说明</b>              | (217) |
| <b>参考文献</b> |                                    | (221) |

# 第一章 偶然误差及其分布规律

## §1-1 一元正态随机变量及其分布规律

为了用概率论的观点研究偶然误差及其分布规律，首先需要说明“概率”这个基本概念。假定在同一条件下作投掷硬币的实验，整个实验以投掷次数分三种类型进行，每类均进行 10 次。实验结果载于表 1-1。表中  $n$  表示投掷硬币的次数， $m$  表示徽花向上的次数。

$f_i = \frac{m}{n}$  为徽花向上的频率。

表 1-1

| 实验序号 | $n=5$ |       | $n=50$ |       | $n=500$ |       |
|------|-------|-------|--------|-------|---------|-------|
|      | $m$   | $f_i$ | $m$    | $f_i$ | $m$     | $f_i$ |
| 1    | 2     | 0.4   | 22     | 0.44  | 251     | 0.502 |
| 2    | 3     | 0.6   | 25     | 0.50  | 249     | 0.498 |
| 3    | 1     | 0.2   | 21     | 0.42  | 256     | 0.512 |
| 4    | 5     | 1.0   | 25     | 0.50  | 253     | 0.506 |
| 5    | 1     | 0.2   | 24     | 0.48  | 251     | 0.502 |
| 6    | 2     | 0.4   | 21     | 0.42  | 246     | 0.492 |
| 7    | 4     | 0.8   | 18     | 0.36  | 244     | 0.488 |
| 8    | 2     | 0.4   | 24     | 0.48  | 258     | 0.516 |
| 9    | 3     | 0.6   | 27     | 0.54  | 262     | 0.524 |
| 10   | 3     | 0.6   | 31     | 0.62  | 247     | 0.494 |

从表 1-1 可以看出，当投掷硬币的次数较小时，徽花向上的频率极不稳定，但随着投掷次数增多，频率愈来愈明显地呈现出稳定性。如表中最后一列所示，频率愈来愈明显地稳定在 0.5 这个数。由此可见，当投掷次数充分多（用符号表示为  $n \rightarrow \infty$ ）时，徽花向上的频率大致是在 0.5 这个数附近摆动。同理，徽花向下的频率也在 0.5 附近摆动，且两个频率之和极接近于一。

投掷硬币时“徽花向上”或“徽花向下”这件事，可以看成是一偶然事件，或称随机事件  $A$ 。随机事件发生的可能性（或称可靠性）显然可以用一个数来表示，这个刻画随机事件  $A$  在实验中发生的可靠性程度的、小于一的正数称为随机事件  $A$  的概率。

如果我们将随机事件  $A$  看成是在同一条件下对一个已知其真值为  $a$  的物理量（此量可以是某角度、长度、高差、重力差等等）进行  $n$  次直接测量。由于各种随机（偶然）因素的综合影响，每次测量的结果也不可能完全一致。如果将被测量的对象称为观测量，每次测量得到的结果称为观测值（又称观测量的取值），并分别用  $X$  和  $x$  表示，则  $(X-a)$  为观测量的真误差（又称观测误差），它的取值就是  $(x-a)$ 。测量实践证明，如果观测量取值均

属偶然性质，则  $X$  和  $(X-a)$  取值的规律完全相同。换言之， $X$  或  $(X-a)$  取得某个数或在某个区间内取某些数值也有相当稳定的可靠性。如在同一条件下测量一个真值为  $a$  的角度，则  $X$  取值大于  $a$  或小于  $a$  的都有百分之五十的“可靠性”。同样，相应的观测误差  $(X-a)$  出现为正的或出现为负的也有百分之五十的“可靠性”。这就是说， $X$  和  $(X-a)$  的取值有着确定的概率与之相对应。由此可见，“随机事件”这个概念的含义极为广泛，既可以将它看成为受随机因素影响的某些现象，也可以看成受随机因素影响的某些变量。如果是后者，通常被称为随机变量。

例如，在同一条件下对一段直线进行 200 次测量。设该直线的真正长度为  $a$ ，观测量为  $X$ 。根据实际测量得到的结果，按真误差  $(X-a)$  的绝对值大小排列成表 1-2。

表 1-2

| 误差区间<br>(米) | 正误差的个数 | 负误差的个数 | 总 数 | 频 率 $f_i$ |
|-------------|--------|--------|-----|-----------|
| 0.0~0.04    | 34     | 34     | 68  | 0.340     |
| 0.04~0.09   | 26     | 25     | 51  | 0.255     |
| 0.09~0.14   | 25     | 22     | 47  | 0.235     |
| 0.14~0.19   | 11     | 9      | 20  | 0.100     |
| 0.19~0.24   | 4      | 6      | 10  | 0.050     |
| 0.24~0.29   | 2      | 2      | 4   | 0.020     |
| 总 和         | 102    | 98     | 200 | 1         |
| 频 率         | 0.51   | 0.49   | 1   |           |

根据表 1-2，若以误差的大小为横坐标，误差出现在某区间  $\Delta x_i$  的频率  $f_i$  除以  $\Delta x_i$ （即  $\frac{f_i}{\Delta x_i}$ ）为纵坐标，由此得到图 1-1 的曲线。这条曲线形象地描述了误差取值的统计规律性。

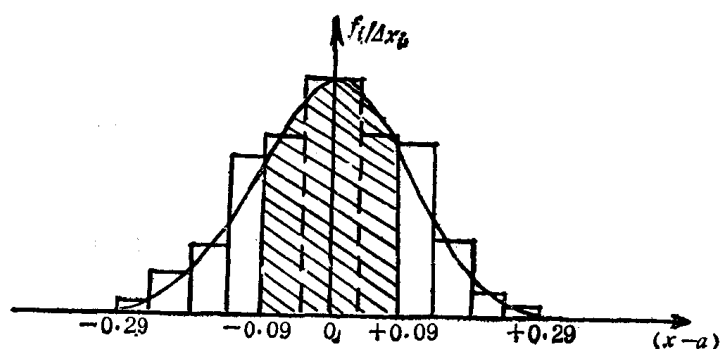


图 1-1

性。

分析表 1-2 以及图 1-1 可以得出以下几个特性：

(1) 真误差取值的绝对值不超过某个限值(此处为 0.29)。

(2) 真误差取值为正的有 102 个，负的有 98 个。二者的频率大致相等。即  $\frac{102}{200} \approx \frac{98}{200} \approx$

$$\frac{1}{2}。$$

(3) 真误差在区间  $(-0.29, +0.29)$  内取值的频率接近于一。即是说，真误差在这区间以外取值的频率接近于零。由此可见，图 1-1 的曲线与横坐标轴包围的面积积极接近

于一。即

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{f_i}{\Delta x_i} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=-0.20}^{+0.20} \frac{f_i}{\Delta x_i} \cdot \Delta x_i \approx 1$$

(4) 真误差在零附近取值的频率较大。例如  $(X-a)$  在区间  $(-0.09, +0.09)$  内取值的频率 0.595 较之在其他任何区间内取值的频率大得多。

(5) 随着观测次数的增加,直到  $n$  充分大的情况下,必然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)}{n} \Rightarrow 0 \quad (1-1)$$

符号  $\Rightarrow$  表示左边的变量稳定于右边的数。以上指出的几个特性,是偶然误差的特性。

毫无疑问,当  $n$  充分大,观测误差在各个区间内取值的频率也将与表 1-1 的情况一样,愈来愈稳定于某个数,这个数就是前面所说的概率。即是说,随着观测次数的增加,频率愈来愈稳定于概率(又称或然率),观测误差也分别以不同的概率在各个区间内取值。

如果所讨论的对象是观测量,则上述特性(1)~(4)所揭示的基本规律仍成立,但公式(1-1)将变成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow E(X) = a. \quad (1-2)$$

式中  $E(X)$  称为观测量  $X$  的数学期望。数学期望的严格定义和运算规律在第二章讨论。

根据以上所述,可得到随机变量的定义。

[定义 1] 在同一条件下进行  $n$  次科学实验,在  $n$  次实验中,变量  $X$  在某个区间内取值有着确定的概率与之相对应,则称变量  $X$  为随机变量<sup>①</sup>。

依定义,上面所介绍的观测量以及观测误差都是随机变量。因为讨论的对象是一个物理量,所以又称一元随机变量。为了叙述的方便,以后将观测量、观测误差以及随机变量混为一谈而不加区别。凡是提到“观测量”指的就是随机变量,观测量的取值,指的就是随机变量的取值。反之亦然。从广义上说,观测值也可视为随机变量。根据这个思想,由上面几个特性可以导出观测量  $X$  的分布规律<sup>(1)</sup>

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (1-3)$$

(1-3) 式称为正态分布的密度函数,又称正态分布密度。变量  $X$  称为正态随机变量。因为只有一个变量,故又称为一元正态随机变量。

第二章将严格证明,(1-3) 式中的  $a$  就是一元正态随机变量的数学期望。由此可见,可将数学期望看成是随机变量  $X$  的真值。(1-3) 中的  $\sigma^2$  称为方差,它的非负平方根为均方差。

随机变量  $X$  每取得一个值  $x_i$ , 从 (1-3) 式可得到一个函数值  $f(x)$  与之对应,由此得到一条服从正态分布的曲线(图 1-2)。

① 随机变量分两种类型:一为离散型,另一为连续型。后者可在某区间内取所有数值。以后如不作特别说明,所讨论的对象均为连续型随机变量。

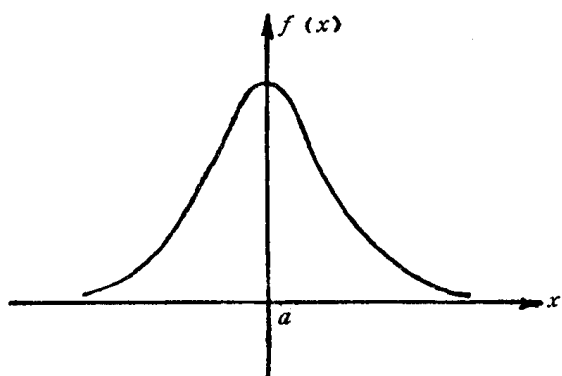


图 1-2

这条曲线完整地描述了随机变量  $X$  的分布规律。如果图 1-1 的均方差为  $\sigma$ ，则当  $n$  充分大时，图 1-1 的曲线将与图 1-2 的图形完全一致。

这儿的密度函数  $f(x)$  是由偶然误差几个特性推导出来的，所以它所描绘的曲线与横坐标轴所包围的总面积肯定为一。从积分学的观点看，这就是正态随机变量  $X$  在整个数轴上取值的定积分为一。用公式表示为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

如果规定观测量取值小于  $x$  的概率用

$$F(x) = P(X < x)$$

表示，并定义

$$F'(x) = f(x).$$

则随机变量  $X$  取值小于  $x$  的概率为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

式中  $F(x)$  称为随机变量  $X$  的分布函数。由此可见，随机变量  $X$  的分布密度  $f(x)$  是分布函数  $F(x)$  的导函数。换言之，分布函数  $F(x)$  是分布密度  $f(x)$  的一个原函数。对于正态随机变量而言，则得

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dz. \quad (1-4) \bullet$$

根据以上所述，易知分布密度  $f(x)$  存在下列几个性质：

$$(1) f(x) \geq 0,$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

$$(3) F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

式中  $F(x_2)$ 、 $F(x_1)$  分别表示  $X$  取值小于  $x_2$  和  $x_1$  相应的概率。由此得到图 1-3。图中阴影部分即为  $X$  在区间  $(x_1, x_2)$  内取值的概率。

如果讨论的对象是观测误差，则由 (1-1) 式知其数学期望为零。即

$$E(X - a) = E(\Delta) = 0.$$

此时，式 (1-3) 式变成

$$f(\Delta) = f(x - a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (1-5)$$

● 为了避免与积分上限混淆，在被积函数中改用  $z$ ， $dz$ ，这种改变不影响积分结果。

在这种情况下，随机变量就是观测误差，它每取得一个值，由 (1-5) 式得到一个相应的函数值，同样可得到一条正态分布曲线(图1-4)。

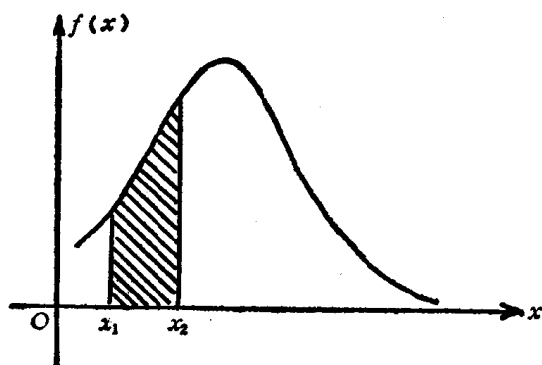


图 1-3

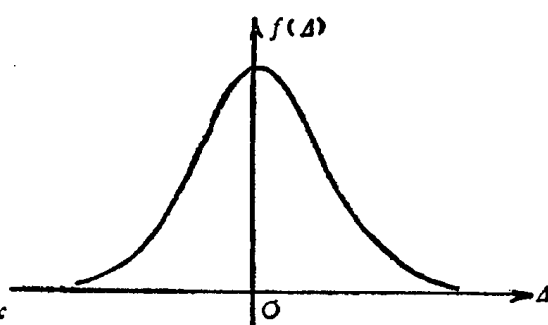


图 1-4

从公式 (1-3) 和 (1-5) 看出：观测量以及相应的观测误差具有相同的方差，相同的分布规律。二者的主要区别只有数学期望的不同，前者为  $a$ ，后者为零。

仿 (1-4) 并顾及 (1-5) 式得观测误差的分布函数为

$$F(\Delta) = \int_{-\infty}^{\Delta} f(\Delta) d\Delta.$$

据此，可算得下面几个概率值：

$$P(|\Delta| < \sigma) \approx 68.3\%,$$

$$P(|\Delta| < 2\sigma) \approx 95.4\%,$$

$$P(|\Delta| < 3\sigma) \approx 99.7\%.$$

这些结果说明，测量误差大于二倍均方差的概率为 4.6%，大于三倍的为 0.3%。因此，人们常将  $2\sigma$  和  $3\sigma$  规定为极限误差。这是测量工作者规定限差的理论基础。

从图1-2和图 1-4 的曲线变化过程可以看出：密度函数  $f(x)$  和  $f(\Delta)$  均在随机变量取值为其数学期望处达到极大值。

下面讨论另一种情况。设正态随机变量  $X$  的方差为  $\sigma_1^2$ ，另一正态随机变量  $Y$  的方差为  $\sigma_2^2$ ，且  $E(X) = E(Y) = a$ 。由此得

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\ f(y) &= \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y-a)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

令 (1-6) 式中的  $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma_2 = 1$ ，由此得 (1-6) 式的分布曲线为图 1-5。

图 1-5 说明，如果用两种精度不同的方法分别测定同一物理量，虽然两种方法得到的数学期望相同，但不能充分说明哪种测量方法较好。要说明这个问题，必须比较均方差的大小。在图 1-5 中，均方差  $\sigma$  的数值越小，曲线的极大值就越大，并且下降得越快。可见

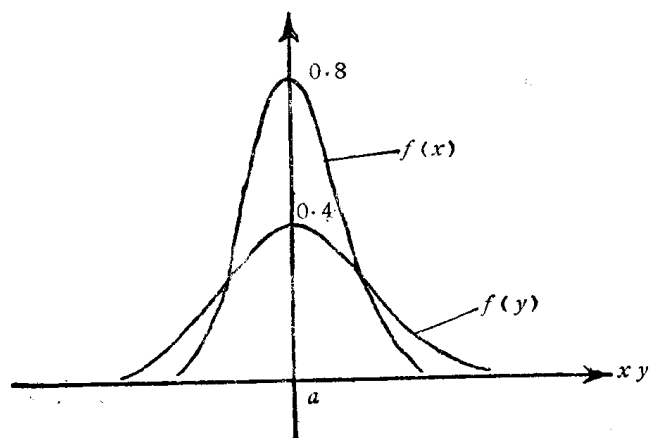


图 1-5

$\sigma_1 = \frac{1}{2}$  那种测量方法较  $\sigma = 1$  的方法好。这事实说明, 为了比较两种测量方法的优劣, 必须了解均方差的大小。均方差这个量, 主要是用来描述随机变量对数学期望的离散程度 (即精度)。因此, 测量工作者最终目的不但要确定观测量的数学期望, 而且要进一步研究它的离散程度。关于离散程度这个概念, 第二章还要作详细讨论。

综上所述可得结论: 正态分布的密度函数主要由数学期望和方差 (或均方差) 这两个参数决定。因此, 只要知道正态随机变量  $X$  的数学期望和均方差, 则其分布密度就完全确定。

在测量工作中, 大多数观测量或观测误差均服从正态分布。如果不作特别说明, 以后所讨论的观测量、观测误差均为正态随机变量。

## §1-2 二元正态随机变量及其分布规律

在实际问题中, 有些试验仅用一个随机变量来描述是不够的, 必须同时用几个随机变量。例如, 导弹向某个目标发射, 命中点的位置就不能用一个随机变量表示, 必须同时用作为平面点的坐标——两个量来确定。又如由一个已知点确定另一待定点的平面坐标, 至少需要同时测量一个方位角和一条边的长度, 如此等等。这就产生所谓二元随机变量的问题。为了研究二元正态随机变量的分布规律, 先从最简单的情况开始。

设随机变量  $X_1$  和  $X_2$  的分布密度分别为

$$f(x_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (1-7)$$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}. \quad (1-8)$$

如果  $X_1$  和  $X_2$  相互独立 (简称独立), 则得这两个随机变量同时取值分别为  $x_1$  和  $x_2$  时的分布密度应为两个密度函数之积。即

$$f^*(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \quad (1-9)$$

公式 (1-9) 称为二元正态随机变量  $X^* = (X_1, X_2)$  的密度函数, 又称为  $X^*$  的联合分布密度。这个函数所描绘出来的曲面具有山丘的形状, 山顶 (函数  $f^*(x_1, x_2)$  取得极大值处) 位于  $(a_1, a_2)$  之上 (见图 1-6)。

在图 1-6 中, 与  $x_1 O x_2$  平面平行的, 在分布曲面所作的截面就是分布曲面的椭圆廓线。令  $f^*(x_1, x_2) = k^2$  (常数), 则得

$$\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2} = k^2. \quad (1-10)$$

(1-10) 式就是在平面  $x_1 O x_2$  上椭圆的投影方程。这是一簇以点  $(a_1, a_2)$  为中心的相似椭圆, 其对称轴平行于  $Ox_1$  轴和  $Ox_2$  轴的直线。在每个椭圆内的一切点上, 分布密度为一常数。所以这些椭圆又称等分布椭圆。

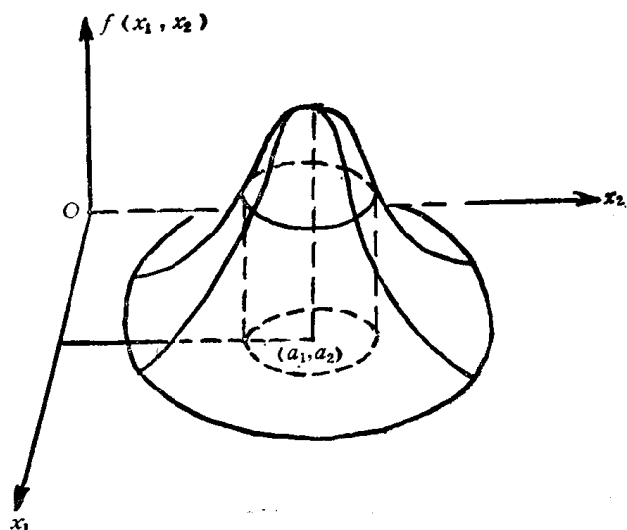


图 1-6

如果随机变量  $X_1$  和  $X_2$  是两个统计相关 (简称相关) 的正态随机变量, 则可证明二元正态随机变量  $X = (X_1, X_2)$  的分布密度为<sup>[2]</sup>

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\gamma_{12}^2)} \left[ \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\gamma_{12}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \quad (1-11)$$

式中  $\sigma_i^2$  为  $X_i$  的方差,  $\gamma_{12}$  称为  $X_1$  和  $X_2$  的相关系数。相关系数的意义在第二章和最后一章讨论。因  $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ , 所以两个随机变量的相关系数具有对称的特性。其值界于 -1 到 +1 之间。

按公式 (1-11) 绘出的图形仍然和图 1-6 一样具有山丘的形状, 山顶仍位于  $(a_1, a_2)$  之上, 不过在这种情况下椭圆的对称轴不平行于坐标轴。

公式 (1-9)、(1-11) 虽然均属二元正态分布的密度函数, 但两个公式有差别, 前者是在独立情况下得到的, 后者是在相关的情况下得到的。随机变量的独立与相关, 是研究误差理论的重要概念。

[定义 2] 设  $X_1$  和  $X_2$  为两个随机变量, 若对于任意的  $x_1$  和  $x_2$ , 等式

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$$

成立, 则称  $X_1$  和  $X_2$  相互独立。式中  $f(x_1, x_2)$  为  $(X_1, X_2)$  的联合分布密度,  $f(x_1)$  和  $f(x_2)$  分别为  $X_1$  和  $X_2$  的分布密度。

定义 2 可以推广到  $n$  元随机变量的情况。即  $n$  个随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  两两相互独立的充分必要条件为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n). \quad (1-12)$$

式中  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为  $n$  元随机变量的联合分布密度,  $f(x_i)$  为  $X_i$  的分布密度。

比较公式 (1-9) 和 (1-11) 可看出, 要使公式 (1-12) 成立, 唯一的条件就是相关

系数  $\gamma_{ii} = 0$ 。由此得出结论：正态随机变量相互独立的充要条件是其相关系数为零。

如果不了解随机变量服从何种分布时，当  $\gamma_{12} = 0$ ，则称两个随机变量不相关，但不能说它们相互独立。反之，如果两个随机变量相互独立，则它们一定不相关。对正态随机变量而言， $\gamma_{12} = 0$  不但说明它们不相关，而且相互独立。

由上所述，可见二元正态随机变量的分布密度由五个参数  $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \gamma_{12}$  决定。

如果讨论的对象是观测误差，则二元正态分布密度为

$$f(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{12}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\gamma_{12}^2)} \cdot \left[\frac{\Delta_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\gamma_{12}\Delta_1\Delta_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\Delta_2^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \quad (1-13)$$

其中五个参数为  $0, 0, \sigma_1, \sigma_2, \gamma_{12}$ 。

如果定义  $b_{12} = \sigma_1\sigma_2\gamma_{12} = b_{21} = \sigma_2\sigma_1\gamma_{21}$  为相关矩(又称协方差)，则称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\gamma_{12} \\ \sigma_2\sigma_1\gamma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

为二行二列的相关方差矩阵，或称方差-协方差矩阵。有些著作又称为协方差阵或积差阵等等。由此可将公式 (1-11) 和 (1-13) 分别用矩阵的形式改写成

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta X A^{-1}\Delta X'\right\}, \quad (1-14)$$

$$f(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|A|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta X_0 A^{-1}\Delta X_0'\right\}. \quad (1-15)$$

式中  $|A|$  为相关方差矩阵  $A$  的行列式， $A^{-1}$  为  $A$  的逆矩阵。 $\Delta X'$  和  $\Delta X_0'$  分别为  $\Delta X$  和  $\Delta X_0$  的转置矩阵，其中

$$\begin{aligned} \Delta X &= [x_1 - a_1 \quad x_2 - a_2], \\ \Delta X_0 &= [\Delta_1 - 0 \quad \Delta_2 - 0] = [\Delta_1 \quad \Delta_2]. \end{aligned}$$

比较公式 (1-14) 和 (1-15) 可得出与一元正态分布情况相似的结论：对二元正态随机变量来说，观测量与观测误差具有相同的相关方差矩阵以及相同的分布规律。

### §1-3 $n$ 元正态随机变量及其分布规律

在测量实践中，经常遇到不能用一个或两个而必须用多个随机变量才能描述的现象。譬如要决定一个三角网各点的坐标，必须对三角网中各个角度(或方向、长度)进行测量。这就得到  $n$  个观测量。要研究  $n$  个观测量的分布密度，必须将平面坐标系推广到  $n$  维空间坐标系。下面仍以直观描述的方式介绍  $n$  个正态随机变量同时取值分别为  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  时的分布规律。

设  $n$  元正态随机变量  $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$  中  $X_i$  和  $X_j$  两两相关，可以证明， $n$  元正态随机变量的分布密度为 [1, 3, 39]

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|A|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta X A^{-1} \Delta X' \right\}. \quad (1-16)$$

式中  $\Delta X = X - E(X) = [x_1 - E(X_1) \quad x_2 - E(X_2) \quad \dots \quad x_n - E(X_n)]$  是  $n$  个观测真误差组成的行矩阵。 $A$  是个  $n$  行  $n$  列满秩、对称相关方差矩阵，它由  $n^2$  个元素组成：

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \gamma_{12} & \dots & \sigma_1 \sigma_n \gamma_{1n} \\ \sigma_2 \sigma_1 \gamma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \sigma_n \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n \sigma_1 \gamma_{n1} & \sigma_n \sigma_2 \gamma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (1-17)$$

式中  $b_{ii}$  为  $X_i$  的方差，即  $b_{ii} = \sigma_i^2$ 。 $b_{ij} (i \neq j)$  为  $X_i$  和  $X_j$  的相关矩， $b_{ij} = b_{ji} = \sigma_i \sigma_j \gamma_{ij} = \sigma_j \sigma_i \gamma_{ji}$ 。其中  $\gamma_{ij}$  为  $X_i$  和  $X_j$  的相关系数。由此可见，相关方差矩阵对角线上的元素为随机变量  $X_i$  的方差，非对角线上的元素为  $X_i$  和  $X_j$  的相关矩。(1-16) 式中的  $|A|$  为  $A$  的行列式， $A^{-1}$  为  $A$  的逆矩阵。当  $X_i$ 、 $X_j$  独立，即相关系数为零，(1-17) 式变成

$$A = M = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

(1-16) 式变成

$$f(X^*) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|A|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta X M^{-1} \Delta X' \right\}. \quad (1-18)$$

式中  $M$  称为方差矩阵，其对角线上元素为  $X_i$  的方差。它是一般最小二乘法教本中常见的公式<sup>[11]</sup>。

如果讨论的对象是  $n$  个观测误差，则 (1-16) 式变成

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|A|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta X_0 A^{-1} \Delta X_0' \right\}. \quad (1-19)$$

式中  $\Delta X_0 = [\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n]$ 。

如果各观测误差两两相互独立，则得

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|A|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta X_0 M^{-1} \Delta X_0' \right\}.$$

由此得出结论： $n$  个正态观测量与  $n$  个正态观测误差具有相同的相关方差矩阵和相同的分布规律。

由此可见， $n$  元正态分布密度取决于  $n$  个观测量的数学期望， $n$  个均方差以及  $\frac{n(n-1)}{2}$

个相关系数。

与一、二元正态随机变量相似， $n$  元正态随机变量的密度函数在  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  处取得极大值，由此得

$$\Delta X A^{-1} \Delta X' = \min. \quad (1-20)$$

#### §1-4 $n$ 元正态随机变量一组线性函数的分布规律

引例：在相同条件下，测量 162 个三角形的三个内角。设每个三角形三内角之和的真值为  $a$ ，观测量为  $X$ ，则真误差为  $\Delta = X - a$ 。这里  $X$  是三个正态随机变量之和的函数，可以看成是一个新随机变量。因为  $a$  是常量，所以  $\Delta$  与  $X$  具有相同的分布规律。现按真误差  $\Delta$  取值的绝对值大小列于表 1-3。

表 1-3

| 误差区间          | 正误差的个数 | 负误差的个数 | 总 数 | 频 率 $f_i$      |
|---------------|--------|--------|-----|----------------|
| 0.0 ~ 0.195   | 21     | 21     | 42  | $42/162=0.259$ |
| 0.195 ~ 0.395 | 19     | 19     | 38  | $38/162=0.235$ |
| 0.395 ~ 0.595 | 15     | 12     | 27  | $27/162=0.167$ |
| 0.595 ~ 0.795 | 9      | 11     | 20  | $20/162=0.123$ |
| 0.795 ~ 0.995 | 9      | 8      | 17  | $17/162=0.105$ |
| 0.995 ~ 1.195 | 5      | 6      | 11  | $11/162=0.067$ |
| 1.195 ~ 1.395 | 1      | 3      | 4   | $4/162=0.025$  |
| 1.395 ~ 1.595 | 1      | 2      | 3   | $3/162=0.019$  |
| 总 和           | 80     | 82     | 162 | 1              |

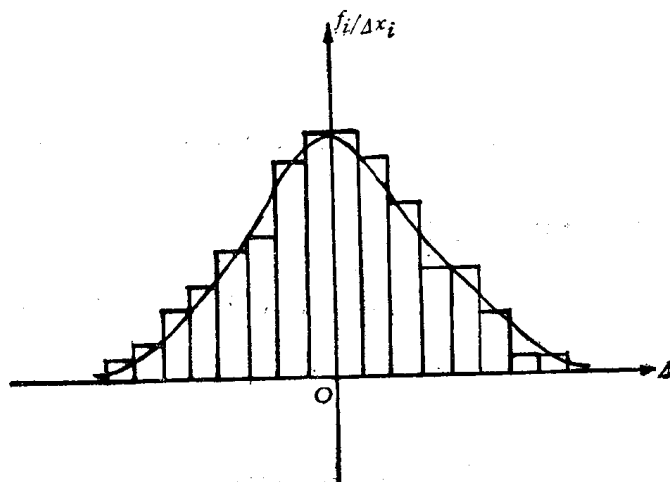


图 1-7

根据表 1-3 的数据，以真误差的大小为横坐标，频率  $f_i$  除以误差取值的相应区间  $\Delta x_i$  为纵坐标。由此可绘成图 1-7。

将表 1-2 与表 1-3，图 1-1 与图 1-7 作一比较可以看出：由三个正态随机变量的代数和组成新的随机变量仍然服从正态分布。

在进行大规模三角测量工作中，不但需要了解  $n$  个随机变量之和的分布规律，而且需要了解由  $n$  个随机变量组成的一组 ( $n$  个) 线性函数的分

布规律。这个命题的一般提法可归纳如下：

已知  $n$  元正态随机变量  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布密度为公式 (1-16)，设

$$Y' = A X' + A'_0, \quad (1-21)$$

式中  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  由  $n$  个随机变量  $X_i$  组成的行矩阵,  $X'$  是它的转置矩阵,  $Y'$  与  $X'$  不但可逆, 且存在连续一阶偏导数。  $A$  为已知的系数矩阵, 非对称。  $A_0$  为常量矩阵, 它们分别表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix}.$$

求证  $n$  元随机变量  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  的联合分布密度。

证明: 由文献[3]、[29]、[30]知  $n$  元随机变量  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  与  $n$  元随机变量  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布密度存在下述关系:

$$f(Y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{f(X)}{\left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|}. \quad (1-22)$$

式中

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (1-23)$$

为雅可比 (Jacobi) 行列式。  $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$  为偏导数。由 (1-21) 式并根据矩阵微分法则 (6.15) 得雅可比行列式为

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = |A|. \quad (1-24)$$

又由公式 (1-21) 得

$$X' = A^{-1}(Y' - A_0'). \quad (1-25)$$

根据数学期望的运算规律 (见第二章) 得

$$\begin{aligned} \Delta X' &= X' - E(X') = A^{-1}(Y' - A_0') - A^{-1}(E(Y') - A_0') \\ &= A^{-1}(Y' - E(Y')) = A^{-1} \Delta Y'. \end{aligned} \quad (1-26)$$

$\therefore \Delta X = \Delta Y (A^{-1})' = \Delta Y (A')^{-1}.$

将 (1-16), (1-24) 代入 (1-22) 并顾及 (1-26) 得

$$f(Y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |A| \sqrt{|A|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta Y (A')^{-1} A^{-1} A^{-1} \Delta Y' \right\}$$